دستاوردهای نوین ریاضی

(کشف‌شده‌های جدید در ریاضیات)

$$x^{\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۰}^{\frac{\beta-1}{۲}}(-۱)^{k+۱}\frac{\beta!\,\pi^{\beta-۲k-۱}}{(\beta-۲k)!\,n^{۲k+۱}}\right]\sin(nx)$$

$$f^{\left(\frac{n}{m}\right)}(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{(f(x))^{n}}-\sqrt[m]{(f(a))^{n}}}{\sqrt[m]{(x)^{n}}-\sqrt[m]{(a)^{n}}}$$

$$\int f(x)\,d\sqrt{x}$$

$$A(y^{(n)})^{a}=B(y^{(m)})^{b}$$

$$Ay^{(n)}=Bx^{\alpha}y^{(Z)}y^{m}$$

مؤلف:
سعید مصیبی

بسم الله الرحمن الرحیم

دستاوردهای نوین ریاضی

مولّف:

سعید مصیبی

سرشناسه	:	مصیبی، سعید، ۱۳۷۴-
عنوان و نام پدیدآور	:	دستاوردهای نوین ریاضی/ مولف سعید مصیبی.
مشخصات نشر	:	تهران: موسسه آموزشی تالیفی ارشدان، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری	:	۳۸ ص.
شابک	:	۹۷۸-۶۲۲-۰۸-۷۰۰۷-۴
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	ریاضیات -- راهنمای آموزشی (متوسطه) Mathematics -- Study and teaching (Secondary) ریاضیات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه) Mathematics -- Problems, exercises, etc. (Secondary)
رده بندی کنگره	:	QA۱۳۹
رده بندی دیویی	:	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۹۲۶۰۲۸۰
اطلاعات رکورد کتابشناسی	:	فیپا

ارشدان

مؤسسه آموزشی تألیفی ارشدان

- نام کتاب: **دستاوردهای نوین ریاضی**
- تألیف: **سعید مصیبی**
- ناشر: آموزشی تألیفی ارشدان
- ویرایش: اول
- نوبت چاپ: اول ۱۴۰۲
- حروفچینی و صفحه آرایی: www.irantypist.com
- طراح و گرافیست: www.irantypist.com
- شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۸-۷۰۰۷-۴
- شمارگان: ۱۰۰۰
- مرکز خرید آنلاین: www.arshadan.com www.arshadan.net
- مرکز پخش و توزیع: ۰۲۱۴۷۶۲۵۵۰۰
- قیمت: ۶۰۰۰۰ تومان

پیشگفتار ناشر:

به نام ایزد دانا که آغاز و انجام از آن اوست

هرگز دل من ز علم محروم نشد   کم ماند ز اسرار که مفهوم نشد
اکنون که به چشم عقل در می نگرم   معلومم شد که هیچ معلوم نشد

ای دانای بی‌همتا، ای بخشنده‌ای که ناخواسته عطا فرمایی و هر نیازمندی را به عدالت بی‌نیاز گردانی، مگر این‌که نالایق باشد و آن عنایت را به بازگونه از دست دهد. در عرصه پیشرفت تکنولوژی در هزاره سوم، هنوز نیاز بر مطالعه کتاب در کنار استفاده از منابع کامپیوتری و اینترنت احساس می‌شود. از این بابت خوشحالیم که می‌توانیم در جهت اعتلای علم، دانش و فرهنگ کشور، قدمی هر چند کوچک برداریم.

و من الله التوفیق

دکتر شمس الدین یوسفیان

مدیر مسئول انتشارات ارشدان

مقدمه

ریاضیات دریچه‌ی عمیقی به روی ذهن انسان باز می‌کند. از آن‌جا که ریاضیات مادر همه‌ی رشته‌هاست، توسعه و به‌دست آوردن روش‌ها و کشف روابط جدید اهمیت می‌یابد.

علوم ریاضی مانند سایر علوم هر روزه رو به پیشرفت و توسعه است. مقالات جدید به رشد این علوم کمک شایانی کرده است. بعد از سال‌ها تحقیق و پژوهش روی این علوم بر آن شدم تا کتابی تألیف کنم که همه‌ی دستاوردهای خود را در آن بگنجانم. دستاوردهایی که به طور جد برای اولین بار است که ارائه می‌شوند و تا قبل از آن در ریاضیات وجود نداشته و یا به این گستردگی نبوده‌اند.

پایه‌ی پژوهش‌ها و اکتشافات من بر معادلات دیفرانسیل متمرکز است. معادلات دیفرانسیلی که برای اولین بار بررسی می‌شوند. در کنار آن روشی ابداعی برای به‌دست آوردن سری فوریه‌ی جملات جبری ارائه کرده‌ام که محاسبات پیچیده را با یک فرمول‌بندی به‌صورت یک سری، به سادگی به حل می‌رساند و نیازی به محاسبات و انتگرال‌گیری‌های پیچیده در آن نیست.

معادلات دیفرانسیل مورد بررسی در این کتاب شامل یک روش برای به‌دست آوردن جواب صریح برای دسته‌ای از معادلات لاگرانژ است که تا قبل از آن جواب صریحی برایشان به‌دست نیامده بود. علاوه بر آن معادلات دیفرانسیلی بررسی می‌شوند که تا قبل از این کتاب مورد توجه چندانی نبوده‌اند و یا به نوعی کشف نشده بودند که آن‌ها را فرمول‌بندی کرده‌ام و به گونه‌ای این کار را انجام داده‌ام که معادلات دیفراسیل غیر خطی با مراتب بالا از مشتق و درجات بالا از توان به راحتی با جایگذاری در دو فرمول به جواب می‌رسند که البته دارای یک جواب خصوصی هستند.

این اکتشافات کمک شایانی به حل مسائل شیمی، فیزیک و... نیز می‌کنند.

امیدوارم از مطالعه‌ی این کتاب لذت کافی و وافی را ببرید و به درک عمیق از آن برسید و از مطالب آن در حل مسائل مورد نظر خود استفاده کنید و حتی آن‌ها را گسترش بدهید.

آدرس ایمیل و شماره تماس اینجانب به‌صورت زیر است. درصورت پیشنهادات و انتقادات با بنده در تماس باشید:
www.saeedmosayebi٢٤٩٨@gmail.com و تلفن تماس: ۰۹۳۶۵۱۶۶۲۶۳

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

روش سری ابداعی برای سری فوریه جملات جبری

سری فوریه بسطی است که هر تابع متناوب را به‌صورت حاصل جمع تعدادی نامتناهی از توابع نوسانی ساده سینوسی، کسینوسی یا تابع نمایی مختلط بیان می‌کند. این تابع به نام ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، ژان باپتیست ژوزف فوریه (Joseph Fourier) زاده‌ی ۲۱ مارس ۱۷۶۸ در اوسر- درگذشته‌ی ۱۶ مه ۱۸۳۰ در پاریس نامگذاری شده است. با بسط هر تابع به‌صورت سری فوریه، مؤلفه‌های بسامدی آن تابع به‌دست می‌آید.

توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نمایانگر سیگنال‌ها معمولاً توابعی از زمان هستند یا به عبارت دیگر توابعی که در میدان زمان تعریف شده‌اند. برای حل بسیاری از مسائل بهتر است که تابع در دامنه فرکانس تعریف شده باشد؛ زیرا این دامنه ویژگی‌هایی دارد که به راحتی محاسبات می‌انجامد.

در این قسمت سری‌های فوریه‌ی توابع x^{α} و x^{β} که در آن α عددی زوج و β عددی فرد است، حل شده و به‌صورت یک سری نوشته شده است. حل این سری‌ها توسط حدس انتگرال‌های پی در پی در بی‌نهایت ممکن شده است که در نظر اول کمی مشکل می‌نماید.

اگر $f: R \to C$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، یعنی $f(t+T) = f(t)$. آنگاه این تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_{.}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

که در آن ضرایب b_n و a_n و $a_{.}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_{.} = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

در سری فوریه، ما توابع را به‌صورت یک تابع متناوب و نوسانی می‌نویسیم. فرم نمایی مختلط سری فوریه به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\left(\frac{n\pi}{l}x\right)i}$$

که در آن c_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}x\right)i}dx$$

ما در این قسمت، حاصل ضرایب فوریه برای درجات نامتناهی از توان‌های x را محاسبه کرده و انتگرال‌ها را در بی‌نهایت حدس می‌زنیم و حاصل را به‌صورت یک سری می‌نویسیم که برای به‌دست آوردن سری فوریه تنها کافی باشد اعداد را در بسط جایگذاری کنیم.

اگر $f(x) = x^{\alpha}$ و α عددی زوج باشد، در بازه‌ی متقارن (π,π-) داریم:

$$\frac{a_۰}{۲} = \frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{\alpha}dx$$

$$\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{۱}{\alpha+۱}x^{\alpha+۱}\Big]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{\pi^{\alpha}}{\alpha+۱}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{\alpha}\sin(nx)\,dx = ۰$$

دقت داریم که چون سینوس تابعی فرد بوده و x^{α} تابعی زوج، در کل تابع فرد می‌باشد که در بازه‌ی متقارن حاصل انتگرال آن صفر است.

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{\alpha}\cos(nx)\,dx$$

برای حل این انتگرال باید روش جز به جز را تا بی‌نهایت حدس بزنیم و از جدول کمک می‌گیریم. به این‌صورت که در سمت راست انتگرال از تابع کسینوسی می‌گیریم و در سمت چپ، از x^{α} مشتق می‌گیریم. مشتق و انتگرال را در هم ضرب می‌کنیم. این فرایند را تا جایی ادامه می‌دهیم که عبارت سمت چپ به صفر برسد.

$$x^{\alpha} \;\rightarrow\; \frac{۱}{n}\sin(nx)$$

$$-\alpha x^{\alpha-۱} \;\rightarrow\; \frac{-۱}{n^{۲}}\cos(nx)$$

$$\alpha(\alpha-۱)x^{\alpha-۲} \;\rightarrow\; \frac{-۱}{n^{۳}}\sin(nx)$$

$$-\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)x^{\alpha-۳} \;\rightarrow\; \frac{۱}{n^{۴}}\cos(nx)$$

....

....

$$-\alpha!\,x \;\rightarrow (-۱)^{\frac{\alpha}{۲}}\frac{۱}{n^{\alpha}}\cos(nx)$$

$$\alpha! \;\rightarrow (-۱)^{\frac{\alpha}{۲}}\frac{۱}{n^{\alpha+۱}}sin(nx)$$

حاصل این انتگرال را می‌توانیم به‌صورت یک دنباله بنویسیم. باید دقت کنیم که جملات دارای $\sin(nx)$ در بازه مذکور همگی صفر هستند.

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x^{\alpha}\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{۲}{\pi}\left[\frac{\alpha\pi^{\alpha-۱}}{n^{۲}}-\frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)x^{\alpha-۳}}{n^{۴}}+\cdots(-۱)^{\frac{\alpha}{۲}+۱}\frac{\alpha!\,\pi}{n^{\alpha}}\right](-۱)^{n}$$

$$a_n=۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۱}^{\frac{\alpha}{۲}}(-۱)^{k+۱}\frac{\alpha!\,\pi^{\alpha-۲k}}{(\alpha-۲k+۱)!\,n^{۲k}}\right]$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$x^{\alpha}=\frac{\pi^{\alpha}}{\alpha+۱}+\sum_{n=۱}^{\infty}۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۱}^{\frac{\alpha}{۲}}(-۱)^{k+۱}\frac{\alpha!\,\pi^{\alpha-۲k}}{(\alpha-۲k+۱)!\,n^{۲k}}\right]\cos(nx)$$

به طریق مشابه می‌توان برای $\boldsymbol{x^{\beta}}$ یک بسط به‌دست آورد.

اگر $f(x)=x^{\beta}$ و β عددی فرد باشد، در بازه‌ی متقارن (π,π-) داریم:

$$\frac{a_{.}}{۲}=\frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{\beta}dx=\cdot$$

چون $f(x)=x^{\beta}$ تابعی فرد است، لذا حاصل انتگرال فوق صفر می‌شود.

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{\beta}\cos(nx)\,dx=\cdot$$

چون x^{β} تابعی فرد و $\cos(nx)$ تابعی زوج است و حاصل‌ضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است، پس حاصل انتگرال فوق نیز صفر می‌شود.

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{\beta}\sin(nx)\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_{.}^{\pi}x^{\beta}\sin(nx)\,dx$$

برای حل این انتگرال از جدول و به روش جز به جز کمک می‌گیریم:

$$x^{\beta}\ \rightarrow\ -\frac{۱}{n}\cos(nx)$$

$$-\beta x^{\beta-۱}\rightarrow\ \frac{-۱}{n^{۲}}\sin(nx)$$

$$+\beta(\beta-۱)x^{\beta-۲}\rightarrow\ \frac{۱}{n^{۳}}\cos(nx)$$

$$-\beta(\beta-۱)(\beta-۲)x^{\beta-۳}\rightarrow\frac{۱}{n^{٤}}\sin(nx)$$

….

….

$$+\beta!\,x \rightarrow \frac{(-۱)^{\frac{\beta+۱}{۲}}}{n^{\beta}}\cos(nx)$$

$$\beta! \rightarrow \frac{(-۱)^{\frac{\beta+۱}{۲}}}{n^{\beta+۱}}\sin(nx)$$

واضح است که جملات دارای $\sin(nx)$ در بازه‌ی مذکور همگی صفر می‌شوند و مقدار $\cos(nx)$ نیز در این بازه همواره $(-۱)^{n}$ خواهد بود.

بنابراین حاصل این انتگرال را می‌توانیم به‌صورت یک دنباله بنویسیم:

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{\beta}\sin(nx)\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x^{\beta}\sin(nx)\,dx =$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}(-۱)^{n}\left[-\frac{\pi^{\beta}}{n} + \frac{\beta(\beta-۱)\pi^{\beta-۲}}{n^{۳}} + \cdots + \frac{(-۱)^{\frac{\beta+۱}{۲}}\beta!\,\pi}{n^{\beta}}\right]$$

با تقسیم کردن کل عبارت داخل کروشه، بر π و به‌صورت فاکتوریل نوشتن جملات داریم:

$$x^{\beta} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۰}^{\frac{\beta-۱}{۲}}(-۱)^{k+۱}\frac{\beta!\,\pi^{\beta-۲k-۱}}{(\beta-۲k)!\,n^{۲k+۱}}\right]\sin(nx)$$

حال به حل چند مثال می‌پردازیم:

۱) سری فوریه‌ی $f(x) = x$ را به‌دست آورید.

دقت داریم که توان تابع فرد است، پس باید از بسط دوم استفاده کنیم:

$$\beta = ۱$$

$$x^{\beta} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۰}^{\frac{\beta-۱}{۲}}(-۱)^{k+۱}\frac{\beta!\,\pi^{\beta-۲k-۱}}{(\beta-۲k)!\,n^{۲k+۱}}\right]\sin(nx)$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۰}^{\frac{۱-۱}{۲}}(-۱)^{۰+۱}\frac{۱!\,\pi^{۱-۲(۰)-۱}}{(۱-۲(۰))!\,n^{۲(۰)+۱}}\right]\sin(nx)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n}\left[\sum_{k=۰}^{۰}(-۱)^{۱}\frac{۱}{n^{۱}}\right]\sin(nx) = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin(nx)$$

۲) سری فوریه‌ی $f(x) = x^{۲}$ را به‌دست آورید.

چون توان تابع، زوج است از بسط اول استفاده می‌کنیم.

$$\alpha = ۲$$

$$\mathrm{x}^{\alpha} = \frac{\pi^{\alpha}}{\alpha + ۱} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[\sum_{k=۱}^{\frac{\alpha}{۲}} (-۱)^{k+۱} \frac{\alpha!\, \pi^{\alpha - ۲k}}{(\alpha - ۲k + ۱)!\, n^{۲k}} \right] \cos(nx)$$

$$= \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[\sum_{k=۱}^{\frac{۲}{۲}} (-۱)^{۱+۱} \frac{۲!\, \pi^{۲-۲(۱)}}{(۲ - ۲(۱) + ۱)!\, n^{۲}} \right] \cos(nx)$$

$$= \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[\sum_{k=۱}^{\frac{۲}{۲}} \frac{۲}{n^{۲}} \right] \cos(nx)$$

$$= \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{n}}{n^{۲}} \cos(nx)$$

۳) سری فوریه‌ی $f(x) = x^{۳}$ را به‌دست آورید.

$$x^{\beta} = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[\sum_{k=۰}^{\frac{\beta-۱}{۲}} (-۱)^{k+۱} \frac{\beta!\, \pi^{\beta - ۲k - ۱}}{(\beta - ۲k)!\, n^{۲k+۱}} \right] \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[\sum_{k=۰}^{\frac{۳-۱}{۲}} (-۱)^{k+۱} \frac{۳!\, \pi^{۳-۲k-۱}}{(۳ - ۲k)!\, n^{۲k+۱}} \right] \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(-۱)^{n} \left[(-۱) \frac{۶\pi^{۲}}{۶n} + (-۱)^{۲} \frac{۶}{n^{۳}} \right] \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \left[\frac{۲\pi^{۲}(-۱)^{n+۱}}{n} + \frac{۱۲(-۱)^{n}}{n^{۳}} \right] \sin(nx)$$

سری فوریه، تبدیل فوریه و انتگرال فوریه به‌طور گسترده در علوم گوناگون، برای تحلیل فیزیکی پارامترهای ریاضی، ساده‌سازی مسائل مختلف و حل آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مطلب به بررسی مفهوم سری فوریه و شیوه‌ی محاسبه‌ی آن در توابع متنوع می‌پردازد. مفهوم پایه، در پیدایش سری‌های فوریه این است که توابع مختلف را می‌توان به کمک توابع سینوسی و کسینوسی بازنویسی کرد.

در کاربردهای مهندسی، به‌طور کلی فرض می‌شود که سری‌های فوریه تقریباً در همه جا همگرا شوند. البته استثنائاتی در ناپیوستگی‌های گسسته وجود دارد. زیرا عمکردهایی که در مهندسی مشاهده می‌شوند رفتار بهتری نسبت به توابعی دارند که ریاضی‌دانان می‌توانند به‌عنوان نمونه‌های متضاد این فرض ارائه دهند. به‌طور خاص اگر تابعی پیوسته باشد،

مشتق آن که ممکن است در همه جا وجود نداشته باشد، مربع انتگرال‌دار است، پس سری‌های فوریه به‌طور کامل و یکنواخت به آن تابع همگرا می‌شوند. برای به‌دست آوردن سری فوریه‌ی درجات بالا کار محاسبه و انتگرال‌گیری بسیار سخت می‌شود. این درحالی است که با فرمول‌بندی‌های اخیر جواب به راحتی و سریع به‌دست می‌آید.

تعریف مشتق مرتبه گویا، انتگرال دیفرانسیل گویا و معادلات دیفرانسیل مرتبه گویا

مشتق‌گیری در حالت کلی مراتبی دارد که همگی اعداد طبیعی هستند. اما در این کتاب قصد داریم تعریف دیگری که دیگاه متفاوتی نسبت به تغییرات متوسط و لحظه‌ای نسبت به متغیر مورد نظر به ما می‌دهد را بیان کنیم، تحت عنوان مشتق مراتب گویا. این تعریف شاید بتواند به حل مسائل دیگر مثل معادلات دیفرانسیل در ریاضیات و حتی به حل مسائل فیزیکی کمک کند.

اگر $Q = \frac{n}{m}$ یک عدد گویا و مثبت و مؤکداً غیر گنگ باشد، با شرط این که n بر m بخش‌پذیر نباشد، $f^{\left(\frac{n}{m}\right)}(x)$ که مشتق مرتبه‌ی گویای $\frac{n}{m}$ است را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{\left(\frac{n}{m}\right)}(x) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[m]{(f(x))^n} - \sqrt[m]{(f(a))^n}}{\sqrt[m]{(x)^n} - \sqrt[m]{(a)^n}}$$

تذکر ۱: دقت کنید که اگر دو مرتبه‌ی گویا پیاپی بر یک تابع اثر کند، مرتبه‌ها الزاماً با هم جمع و یا در هم ضرب نمی‌شوند. یعنی نامساوی‌های زیر مگر در مواقع خاص برقرارند:

$$((y)^{(\frac{n}{m})})^{(\frac{s}{t})} \neq (y)^{(\frac{n}{m}+\frac{s}{t})}$$
$$((y)^{(\frac{n}{m})})^{(\frac{s}{t})} \neq (y)^{(\frac{n}{m}\times\frac{s}{t})}$$

مثلاً $((y)^{(\frac{۱}{۲})})^{(\frac{۱}{۲})}$ الزاماً به معنی $\acute{y}$ یا $y^{(\frac{۱}{۴})}$ نیست.

تذکر ۲: برای توابعی چون $y^{(\frac{۱}{۲})}$ اصلاح نیم مشتق یا مشتق نیمه و... کاملاً غلط است. این عبارت مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ است. در واقع ما طبق تعریف، نیم بار از تابع مشتق نگرفته‌ایم.

تذکر ۳: این تعریف، یک تعریف کاملاً نوین است که برای اولین بار ارائه می‌شود. بنابراین ممکن است موافقان یا مخالفان زیادی داشته باشد. اما به هر حال به حل مسائل موردنظر ما کمک می‌کند.

کار را با مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ شروع می‌کنیم. طبق تعریف داریم:

$$f^{\left(\frac{۱}{۲}\right)}(x) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

چون تابع مبهم است، طبق قاعده‌ی هوپیتال می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{\left(\frac{۱}{۲}\right)}(x) = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \overset{HOP}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to a}\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}f'(x)$$

حال می‌خواهیم برای تابع $f(t) = t^۲$ سرعت متوسط و سرعت جذر متوسط را بررسی کنیم. سرعت جذر متوسط طبق تعریف برابر است با:

$$\frac{\Delta\sqrt{f(t)}}{\Delta\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{f(t_۲)}-\sqrt{f(t_۱)}}{\sqrt{t_۲}-\sqrt{t_۱}}$$

همچنین می‌دانیم که فرمول سرعت متوسط برابر است با:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$$

حال ابتدا مقادیر سرعت متوسط را در هر ثانیه حساب می‌کنیم:

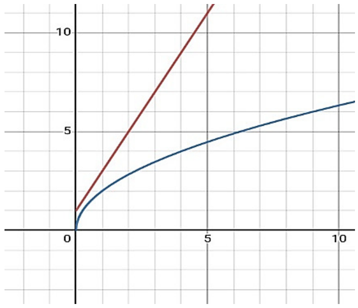
$$v_۱ = \frac{(۲)^۲-(۱)^۲}{۲-۱} = ۳ \quad , \qquad v_۲ = \frac{(۳)^۲-(۲)^۲}{۳-۲} = ۵ \quad , \quad v_۳ = \frac{(۴)^۲-(۳)^۲}{۴-۳} = ۷$$
$$v_۴ = \frac{(۵)^۲-(۴)^۲}{۵-۴} = ۹$$

مشاهده می‌شود که رابطه‌ی $v = ۲t + ۱$ برقرار است.

حال برای سرعت جذر متوسط در هر ثانیه، مقادیر زیر را داریم:

$$v_۱ = \frac{۲-۱}{\sqrt{۲}-\sqrt{۱}} \cong ۲/۴۱ \quad , \quad v_۲ = \frac{۳-۲}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} \cong ۳/۱۴ \quad , \quad v_۳ = \frac{۴-۳}{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}} \cong ۳/۷۳$$
$$v_۴ = \frac{۵-۴}{\sqrt{۵}-\sqrt{۴}} \cong ۴/۲۳ \quad , \quad v_۵ = \frac{۶-۵}{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}} \cong ۴/۶۸ \quad , \quad v_۶ = \frac{۷-۶}{\sqrt{۷}-\sqrt{۶}} \cong ۵/۰۹$$
$$v_{۱۰} = \frac{۱۱-۱۰}{\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}} \cong ۶/۴۷$$

مشاهده می‌شود که این تابع، اصلاً خطی نیست، برخلاف تابع سرعت متوسط که خطی بود. به نمودار دو تابع در زیر دقت کنید:



نمودار سرعت جذر متوسط نشان می‌دهد که تابع تقریباً شبیه تابع رادیکالی است.

حال مشتق مرتبه $\frac{۱}{۲}$ برخی توابع کاربردی را حساب می‌کنیم:

۱) $y = cx$

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{cx} - \sqrt{ca}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \sqrt{c}$$

۲) $y = x^n$

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{\frac{x}{f(x)}} f'(x) = \sqrt{\frac{x}{x^n}}(nx^{n-۱}) = x^{\frac{۱-n}{۲}}(nx^{n-۱}) = n\sqrt{x^{n-۱}}$$

۳) $y = e^{ax}$

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{\frac{x}{f(x)}} f'(x) = \sqrt{\frac{x}{e^{ax}}}(ae^{ax}) = a\sqrt{xe^{ax}}$$

مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ تابع زیر را حساب کنید:

$$y = e^x + x^۳ + x^۲ + ۳x$$

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{xe^x} + ۳|x| + ۲\sqrt{x} + \sqrt{۳}$$

با استفاده از تعریف مشتق مرتبه‌ی گویا، مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۳}$ تابع $y = x^۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y^{(\frac{۱}{۳})} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{a}} = \lim_{x\to a} \sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{ax} + \sqrt[۳]{a^۲} = ۳\sqrt[۳]{x^۲}$$

انتگرال توابع جبری با متغیر دیفرانسیل مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int f(x) d\sqrt{x}$$

برخی انتگرال‌های دیفرانسیل مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$۱)\int \sqrt{c}\, d\sqrt{x} = cx + d$$

$$\sqrt{c} = k \quad \to c = k^{۲}$$

$$\int k\, d\sqrt{x} = k^{۲}x + d$$

$$۲)\int n\sqrt{x^{n-۱}}d\sqrt{x} = x^n + c$$

$$\int x^{\frac{n-۱}{۲}}d\sqrt{x} = \frac{۱}{n}x^n + c$$

$$\frac{\mathrm{n}-۱}{۲} = \mathrm{k} \quad \to \mathrm{n}-۱ = ۲\mathrm{k} \quad \to \quad \mathrm{n} = ۲\mathrm{k}+۱$$

$$\int \mathrm{x}^{\mathrm{k}}d\sqrt{x} = \frac{۱}{۲k+۱}x^{۲k+۱} + c$$

انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int \left(\sqrt{۷}x^{۳} + \sqrt{x^{۳}} + ۲\right)d\sqrt{x} = \frac{۷}{۲(۳)+۱}x^{۲(۳)+۱} + \frac{۱}{۲\left(\frac{۳}{۲}\right)+۱}x^{۲\left(\frac{۳}{۲}\right)+۱} + (۲)^{۲}x + c$$

$$= x^{۷} + \frac{۱}{۴}x^{۴} + ۴x + c$$

حال معادلات دیفرانسیل شامل مشتق مرتبه‌ی گویا را بررسی می‌کنیم. در این معادلات، ابتدا رابطه‌ی بین مشتق مرتبه‌ی گویا را با مشتق مرتبه‌ی اول، به‌دست آورده سپس آن را در معادله‌ی دیفرانسیل جایگزین می‌کنیم.

برای مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}\acute{f}(x)$$

حال به حل چند معادله می‌پردازیم.

معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{xy}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}\acute{y} = \sqrt{xy} \quad \to \quad \acute{y} = \sqrt{xy}\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \to \quad \acute{y} = y \quad \to \quad y = ce^{x}$$

معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(\frac{۱}{۲})} = xy$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}\acute{y} = xy \quad \to \quad \acute{y} = xy\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \to \quad \acute{y} = (x^{\frac{۱}{۲}})\left(y^{\frac{۳}{۲}}\right) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = (x^{\frac{۱}{۲}})\left(y^{\frac{۳}{۲}}\right)$$

$$\frac{dy}{\left(y^{\frac{۳}{۲}}\right)} = (x^{\frac{۱}{۲}})dx \quad \rightarrow \quad y^{-\frac{۳}{۲}}dy = x^{\frac{۱}{۲}}dx \quad \rightarrow \quad \int y^{-\frac{۳}{۲}}dy = \int x^{\frac{۱}{۲}}dx$$

$$-۲y^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + c \quad \rightarrow \quad \frac{-۲}{\sqrt{y}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}} + c \quad \rightarrow \quad \sqrt{y} = \frac{-۲}{\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}} + c}$$

$$y = \frac{۴}{(\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}} + c)^{۲}}$$

معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(\frac{۲}{۳})} = \acute{y}$$

ابتدا با استفاده از تعریف مشتق، رابطه‌ی بین $y^{(\frac{۲}{۳})}$ و $\acute{y}$ را به‌دست آورده و بعد در معادله، جایگذاری می‌کنیم:

$$f^{\left(\frac{۲}{۳}\right)}(x) = \lim_{x\rightarrow a}\frac{\sqrt[۳]{(f(x))^{۲}} - \sqrt[۳]{(f(a))^{۲}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}} - \sqrt[۳]{a^{۲}}} \quad \overset{HOP}{\Longrightarrow} \quad \frac{\frac{۲}{۳}(f(x))^{-\frac{۱}{۳}}}{\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}}f(\acute{x}) = \sqrt[۳]{\frac{x}{y}}\acute{y}$$

$$\sqrt[۳]{\frac{x}{y}}\acute{y} = \acute{y} \quad \rightarrow \quad \sqrt[۳]{\frac{x}{y}}\acute{y} - \acute{y} = ۰ \quad \rightarrow \quad \acute{y}\left(\sqrt[۳]{\frac{x}{y}} - ۱\right) = ۰$$

$$\begin{cases} \acute{y} = ۰ \quad \rightarrow \quad y = c \\ \sqrt[۳]{\frac{x}{y}} - ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad \sqrt[۳]{x} = \sqrt[۳]{y} \quad \rightarrow \quad y = x \end{cases}$$

جواب خصوصی نوع خاصی از معادلات لاگرانژ

هر معادله، به‌شکل زیر، یک معادله‌ی لاگرانژ است:

$$y = xf(\acute{y}) + g(\acute{y})$$

روش حل معادله‌ی لاگرانژ، به‌این‌صورت است که ابتدا فرض می‌کنیم $\acute{y} = p$ باشد. بعد از دوسوی معادله، نسبت به x مشتق می‌گیریم، پس داریم:

$$\acute{y} = f(p) + x\acute{f}(p)\frac{dp}{dx} + \acute{g}(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}(x\acute{f}(p) + \acute{g}(p))$$

یک جواب این معادله، به‌صورت زیر است:

$$p - f(p) = ۰$$

اگر جواب معادله‌ی بالا، به‌صورت $p.$ باشد، جواب اول معادله به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = xf(p.) + g(p.)$$

برای به‌دست آوردن جواب دیگر کافیست فرض کنیم $\frac{dp}{dx} = \frac{۱}{\acute{x}}$ پس داریم:

$$p - f(p) = \frac{۱}{\acute{x}}(x\,\acute{f}\,(p) + \acute{g}\,(p))$$

$$\acute{x} - \frac{\acute{f}(p)}{p - f(p)}x = \frac{g(\acute{p})}{p - f(p)}$$

حال معادله، به یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود که قابل حل است. اما مشکل این‌جاست که x بر حسب p به دست می‌آید ولی p بر حسب x به‌طور صریح به‌دست نمی‌آید تا y به طور صریح بر حسب x به‌دست آید.

به مثال زیر توجه کنید:

$$y = x(\acute{y})^۲ + (\acute{y})^۳ \qquad y = xp^۲ + p^۳$$

حال از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\acute{y} = p^۲ + ۲px\frac{dp}{dx} + ۳p^۲\frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad p - p^۲ = (۲px + ۳p^۲)\frac{۱}{\acute{x}}$$

جواب‌های غیرعادی معادله، به‌صورت زیر است:

$$p - p^{۲} = ۰ \qquad p = ۰ \;\;,\;\; p = ۱$$

$$y = xp^{۲} + p^{۳} \;\; \rightarrow \quad y = ۰ \;, \qquad y = x + ۱$$

جواب دیگر معادله به‌صورت زیر است:

$$x' + \frac{۲}{p-۱}x = \frac{۳p}{۱-p}$$

$$\mu(p) = e^{\int \frac{۲}{p-۱}dp} = e^{۲\ln(p-۱)} = (p-۱)^{۲}$$

$$x(p) = \frac{۱}{(p-۱)^{۲}}\left[\int \frac{۳p(p-۱)^{۲}}{-(p-۱)}dp + c\right]$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c}{(p-۱)^{۲}} \\ y = xp^{۲} + p^{۳} \end{cases}$$

$$y = \frac{\frac{۳p^{۲}}{۲} - p^{۳} + c}{(p-۱)^{۲}}p^{۲} + p^{۳}$$

مشاهده می‌شود که $\boldsymbol{y}$ برحسب $\boldsymbol{p}$ به‌دست آمده است نه بر حسب $\boldsymbol{x}$ و نمی‌توان به طور صریح $\boldsymbol{p}$ را برحسب $\boldsymbol{x}$ به‌دست آورد.

اما ما در این بخش نوع خاصی از دسته معادلات لاگرانژ را حل کرده و یک جواب خصوصی به‌طور صریح برای $\boldsymbol{y}$ بر حسب $\boldsymbol{x}$ به‌دست می‌آوریم و آن دسته را فرمول‌بندی می‌کنیم.

معادله‌ی لاگرانژ از نوع خاص، به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$y = ax\acute{y} + b(\acute{y})^{n}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $\acute{y} = p$ باشد. بعد از دو سوی معادله، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y = axp + bp^{n}$$
$$\acute{y} = ap + ax\acute{p} + bnp^{n-۱}\acute{p}$$

با فرض $\acute{p} = \frac{۱}{\acute{x}}$ داریم:

$$p - ap = \frac{۱}{\acute{x}}(ax + bnp^{n-۱})$$

با توجه به $p - ap = ۰$ و $p = ۰$، یک جواب معادله $y = ۰$ است.

$$(p - ap)\acute{x} = ax + bnp^{n-۱}$$

$$\acute{x} + \frac{a}{(a-۱)p}x = \frac{bn}{۱-a}p^{n-۲}$$

$$\mu(p)=e^{\int\frac{a}{(a-۱)p}dp}=e^{\frac{a}{a-۱}lnp}=p^{\frac{a}{a-۱}}$$

$$x(p)=p^{\frac{a}{۱-a}}\left[\int p^{\frac{a}{a-۱}}\left(\frac{bn}{۱-a}p^{n-۲}\right)dp+c\right]$$

$$x(p)=p^{\frac{a}{۱-a}}\left[\frac{bn}{n-an-۱}p^{\frac{an-n+۱}{a-۱}}+c\right]$$

در این مرحله، برای این‌که بتوانیم جواب صریح p برحسب x را به‌دست بیاوریم، فرض می‌کنیم $c=۰$ است تا یک جواب خصوصی به‌دست‌آوریم:

$$x=\frac{bn}{n-an-۱}p^{\frac{an-a-n+۱}{a-۱}}$$

$$p=\left(\frac{n-an-۱}{bn}x\right)^{\frac{a-۱}{an-a-n+۱}}$$

حال با توجه به x و p و رابطه‌ی $y=axp+bp^n$ ، جواب خصوصی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\left(\frac{abn}{n-an-۱}+b\right)\left(\frac{n-an-۱}{bn}x\right)^{\frac{an-n}{an-a-n+۱}}$$

به مثال زیر توجه کنید:

$$y=۲x\acute{y}+\ (\acute{y})^{۲}$$

کافیست اعداد a = ۲ , b = ۱ , n = ۲ را در فرمول بالا جایگزین کنیم:

$$y=\left(\frac{۴}{-۳}+۱\right)\left(\frac{-۳}{۲}x\right)^{۲}=\frac{-۳}{۴}x^{۲}$$

بررسی و حل معادلات دیفرانسیل توانی – مرتبه‌ای

معادلات دیفرانسیل به فرم زیر حتماً جوابی خصوصی به شکل $y = cx^{\lambda}$ دارند که c و λ در آن معلوم‌اند:

$$A(y^{(n)})^a = B(y^{(m)})^b$$

که در آن n و m مرتبه‌های دلخواه از y و همچنین a و b توان‌های دلخواه هستند. اگر شرط $b > a$ را لحاظ کنیم، داریم:

$$A\left(c\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-n+1)x^{\lambda-n}\right)^a = B\left(c\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-m+1)x^{\lambda-m}\right)^b$$
$$Ac^a(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-n+1))^a x^{a\lambda-an} = Bc^b(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-m+1))^b x^{b\lambda-bm}$$

حال توان‌ها و ضرایب را مساوی قرار می‌دهیم:

$$a\lambda - an = b\lambda - bm \qquad \rightarrow \qquad (a-b)\lambda = an - bm$$
$$\lambda = \frac{an-bm}{a-b}$$

می‌دانیم که جملات $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-n+1)$ حاصل‌ضرب n جمله از دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول λ و قدر نسبت -1 را تشکیل می‌دهند. فرمول این حاصل‌ضرب به‌صورت زیر است:

$$P_n = d^n \frac{\Gamma(\frac{a_1}{d}+n)}{\Gamma(\frac{a_1}{d})}$$

که در آن d قدر نسبت، a_1 جمله اول و Γ نماد فاکتوریل همه‌ی اعداد حقیقی از جمله اعداد گویا می‌باشد. بنابراین داریم:

$$Ac^a\left\{(-1)^n\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{-1}+n)}{\Gamma(\frac{\lambda}{-1})}\right\}^a x^{a\lambda-an} = Bc^b\left\{(-1)^m\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{-1}+m)}{\Gamma(\frac{\lambda}{-1})}\right\}^b x^{b\lambda-bm}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$c = \tau(-\lambda)\sqrt[b-a]{\frac{A}{B}(-1)^{an-bm}\frac{(\tau(n-\lambda))^a}{(\tau(m-\lambda))^b}}$$

اما باید دقت داشت که فرمول رابطه‌ی c که به‌دست آوردیم، فقط برای $\lambda < ۰$ صادق است. بنابراین اگر λ مثبت بود، درصورتی که توان‌ها و مرتبه‌های معادله، کوچک بود می‌توان c را با جایگذاری به‌دست‌آورد و در صورتی که توان‌ها و مرتبه‌های مشتق بالا بود c مجهول می‌ماند.

به مثال زیر دقت کنید:

$$(y^{(۳)})^{۲} = (y')^{۴}$$

$$\lambda = \frac{an - bm}{a - b} = \frac{۲(۳) - ۴(۱)}{۲ - ۴} = -۱$$

$$c = \tau(-\lambda)^{b-a}\sqrt{\frac{A}{B}(-۱)^{an-bm}\frac{(\tau(n-\lambda))^{a}}{(\tau(m-\lambda))^{b}}} = \tau(-(-۱))^{۲}\sqrt{(-۱)^{۲}\frac{(\tau(۳-(-۱)))^{۲}}{(\tau(۱-(-۱)))^{۴}}}$$

از آنجا که $\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)!$ برای اعداد طبیعی است، داریم:

$$c = (۰)!^{۲}\sqrt{\frac{(۳!)^{۲}}{(۱!)^{۴}}} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{۶}{x}$$

به مثال زیر توجه کنید:

$$(y'')^{۲} = (y^{(۳)})^{۳}$$

$$\lambda = \frac{an - bm}{a - b} = \frac{۴ - ۹}{۲ - ۳} = ۵$$

حال مشتقات $y = cx^{۵}$ را محاسبه می‌کنیم تا در معادله جایگزین کرده و c را به‌دست آوریم:

$$y' = ۵cx^{۴} \quad , \quad y'' = ۲۰cx^{۳} \ , \ y^{(۳)} = ۶۰cx^{۲}$$

$$(۲۰cx^{۳})^{۲} = (۶۰cx^{۲})^{۳}$$

$$۴۰۰c^{۲}x^{۶} = ۲۱۶۰۰۰c^{۳}x^{۶} \ \rightarrow \ ۴۰۰c^{۲} = ۲۱۶۰۰۰c^{۳} \ \rightarrow \ ۲۱۶۰۰۰c^{۳} - ۴۰۰c^{۲} = ۰ \ \rightarrow c = \frac{۱}{۵۴۰}$$

$$y = \frac{۱}{۵۴۰}x^{۵}$$

به مثال دیگری دقت کنید:

$$۲(y^{(۲۱)})^{۳۳} = ۳\,(y^{(۱۱)})^{۴۳}$$

$$\lambda = \frac{an - bm}{a - b} = \frac{۳۳(۲۱) - (۴۳)۱۱}{۳۳ - ۴۳} = \frac{۲۲۰}{-۱۰} = -۲۲$$

$$c = \tau(-(-۲۲))\sqrt[۱۰]{\frac{۲}{۳}(-۱)^{۲۲۰}\cdot\frac{(\tau(۲۱-(-۲۲))^{۳۳}}{(\tau(۱۱-(-۲۲))^{۴۳}}} \cong ۱/۴۸ \times ۱۰^{۳۶}$$

$$y \cong \frac{۱/۴۸ \times ۱۰^{۳۶}}{x^{۲۲}}$$

مسأله‌ی توزیع مهره‌ها برای محتمل‌ترین شانس بیرون آمدن مهره‌ی مطلوب

فرض کنید k جعبه، n مهره‌ی قرمز و m مهره‌ی سبز داریم. به‌تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. قبل از انتخاب، چگونه مهره‌ها را در جعبه‌ها توزیع کنیم تا شانس بیرون آمدن مهره‌ی سبز بیشترین مقدار شود؟

پاسخ به این صورت است که درون $k-۱$ جعبه، هر کدام یک مهره‌ی سبز و درون جعبه‌ی آخر $m-k+۱$ مهره‌ی سبز باقی مانده به‌علاوه‌ی n مهره‌ی قرمز را قرار می‌دهیم. به این ترتیب، شانس بیرون آمدن مهره‌ی سبز بیشترین مقدار می‌شود. این تکنیک را برای سه نوع یا بیشتر مهره هم می‌توان انجام داد. این احتمال برابر است با:

$$P(g)_{max}=\frac{k-۱}{k}+\frac{m-k+۱}{k(n+m-k+۱)}$$

برای این که شانس بیرون آمدن مهره‌ی سبز کمترین مقدار شود، درون $k-۱$ جعبه هر کدام یک مهره‌ی قرمز قرار می‌دهیم و الی آخر.

فرض کنید سه جعبه داریم. همچنین ۹۹ مهره‌ی قرمز و ۹۹ مهره‌ی سبز موجود است. اگر مهره‌ها را به‌طور یکنواخت توزیع کنیم، باید در هر جعبه، ۳۳ مهره‌ی قرمز و ۳۳ مهره‌ی سبز قرار دهیم؛ که شانس بیرون آمدن مهره‌ی سبز و قرمز هر دو $\frac{۱}{۲}$ شود. ولی اگر در دو جعبه، در هر کدام، یک مهره‌ی سبز قرار دهیم. همچنین در جعبه‌ی سوم، ۹۷ مهره‌ی سبز باقی مانده به‌علاوه‌ی ۹۹ مهره‌ی قرمز را قرار دهیم، شانس بیرون آمدن مهره‌ی سبز بیشترین مقدار می‌شود. این احتمال برابر است با:

$$\mathrm{P(g)_{max}}=\frac{۲}{۳}+\frac{۹۷}{۳(۹۷+۹۹)}=\frac{۴۸۹}{۵۸۸}=۰/۸۳$$

حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم و مرتبه اول غیر خطی

معادلات دیفرانسیل به فرم زیر را می‌توان با استفاده از روش دلتا حل کرد:

$$a(\acute{y})^۲ + b\acute{y} + c = y$$

$$a(\acute{y})^۲ + b\acute{y} + c - y = ۰$$

$$\acute{\Delta} = b^۲ - ۴a(c-y) = b^۲ - ۴ac - ۴ay = \Delta - ۴ay$$

$$\boldsymbol{\acute{y}} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta - ۴ay}}{۲a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta - ۴ay}}{۲a}$$

$$\frac{۲a}{-b \pm \sqrt{\Delta - ۴ay}} dy = dx$$

حالا فقط کافی است از طرفین انتگرال بگیریم:

$$\int \frac{۲a}{-b \pm \sqrt{\Delta - ۴ay}} dy = \int dx$$

در این‌صورت، دو جواب برای معادله‌ی دیفرانسیل وجود دارد:

$$x + c = \int \frac{۲a}{-b + \sqrt{\Delta - ۴ay}} dy$$

$$x + c = \int \frac{۲a}{-b - \sqrt{\Delta - ۴ay}} dy$$

به مثال زیر دقت کنید:

$$۲\,(\acute{y})^۲ + ۳\,\acute{y} + ۱ = y$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۳)^۲ - ۴(۲)(۱) = ۱$$

$$\int \frac{۴}{-۳+\sqrt{۱-۸y}}dy = x+c \quad \to \quad -\sqrt{۱-۸y}-۳\ln\left(۳-\sqrt{۱-۸y}\right) = x+c$$

$$\int \frac{۴}{-۳-\sqrt{۱-۸y}}dy = x+c \quad \to \quad \sqrt{۱-۸y}-۳\ln\left(\sqrt{۱-۸y}+۳\right) = x+c$$

به مثال دیگری توجه کنید:

$$(\acute{y})^{۲}+۲\,\acute{y}+۱ = y$$

$$\Delta = ۲^{۲}-۴(۱)(۱) = ۰$$

$$\int \frac{۲}{-۲+\sqrt{-۴y}}dy = x+c \quad \to \quad -۲\left(\sqrt{-y}+\ln\left(۱-\sqrt{-y}\right)\right) = x+c$$

$$\int \frac{۲}{-۲-\sqrt{-۴y}}dy = x+c \quad \to \quad ۲\sqrt{-y}-۲\ln\left(\sqrt{-y}+۱\right) = x+c$$

روش نوین حل معادلات دیفرانسیل خاص

معادلات دیفرانسیل، یکی از مهم‌ترین و البته کاربردی‌ترین مباحث ریاضی است. با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌توان بسیاری از قوانین حاکم بر پدیده‌های مختلف طبیعت را مورد بررسی قرار داد. در این کتاب معادلات دیفرانسیل مرتبط با علومی چون موسیقی، نیز کاربرد وسیعی دارد. با این حال ایده‌ی اصلی در این فصل از پژوهش‌های لئونارد اویلر (زاده ۱۵ آوریل ۱۷۰۷ در بازل سوئیس– در گذشته ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳) در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل، گرفته شده است. ساده‌ترین انواع معادلات دیفرانسیل معادلات جداشدنی، معادلات مرتبه اول و معادلات همگن خطی مرتبه دوم است و شاید بتوان گفت دشوارترین آن‌ها معادلات فربنیوس است. از معادلات دیفرانسیل مشهور می‌توان قانون دوم نیوتن در دینامیک، معادلات همیلتون در مکانیک کلاسیک، واپاشی هسته‌ای در فیزیک هسته‌ای، معادله‌ی موج، معادلات ماکسول در الکترومغناطیس، معادلات پواسن، معادله لاپلاس در توابع هارمونیک، مسئله منحنی کوتاه‌ترین زمان، فرمول انیشتین، قانون گرانش نیوتن، معادله‌ی شرودینگر در مکانیک کوانتوم، معادلات ناویه-استوکس در دینامیک شاره‌ها، معادلات کوشی-ریمان در آنالیز مختلط، معادله پواسن- بولتزمن، معادله موج برای تار مرتعش، نوسان‌گر همساز در مکانیک کونتومی، نظریه‌ی پتانسیل، معادله برنولی و... نام برد. معادلات قابل بررسی در این کتاب، در دسته‌ای نوین نسبت به معادلات سابق قرار می‌گیرند که مشتقات دلخواه مراتب بالا و توان‌های دلخواه بالا از x و y را شامل می‌شوند.

در ریاضیات معادله‌ی دیفرانسیل نوعی معادله‌ی ریاضی است که دارای یک یا چند تابع مجهول از یک تا چند متغیر مستقل و مشتق‌های آن توابع با مرتبه‌های مختلف است.

این معادلات در مدل‌سازی ریاضیاتی بسیاری از پدیده‌های طبیعی کاربرد دارند. بسیاری از پدیده‌های عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند.

از جمله کاربردهای آن می‌توان به مدارهای الکتریکی، سرعت حدی، غلظت مواد شیمیایی و رشد جمعیت اشاره کرد. معادلات دیفرانسیل همچنین در هندسه و نیز در مهندسی و بسیاری از حوزه‌های دیگر کاربرد فراوانی دارند.

هر زمان که نرخ تغییرات یک یا چند تابع، رابطه‌ای با خود یا متغیرهای خود داشته باشد، آن پدیده با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شود.

به عنوان مثال در مکانیک، حرکت جسم به وسیله‌ی سرعت و مکان آن در زمان مختلف توصیف می‌شود و معادلات نیوتن به ما رابطه‌ی بین مکان، سرعت و شتاب و نیروهای گوناگون وارده بر جسم را می‌دهند. در چنین شرایطی می‌توانیم حرکت جسم را در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیلی که در آن مکان ناشناخته‌ی جسم تابعی از زمان است، بیان کنیم.

تعریف عمومی معادله دیفرانسیل معمولی به شرح زیر است:

فرض کنید F تابعی معین از x و y و مشتقات آن باشد، در این‌صورت معادله‌ای به فرم زیر یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی صریح از مرتبه‌ی n نامیده می‌شود.

$$F(x, y, \acute{y}, \quad \ldots y^{(n-۱)}) = y^{(n)}$$

معادلات دیفرانسیل انواع گوناگونی دارند که به معادلات تفکیک‌پذیر، معادلات مرتبه اول، معادلات مرتبه دوم و... تقسیم می‌شوند.

ایده‌ی اصلی در این بخش مبتنی بر معادله‌ی اویلر است که به‌صورت زیر است:

$\mathrm{a}x^{۲}\mathrm{y}'' + \mathrm{b}xy' + cy = ۰$

اعتقاد اویلر بر این بود که هر معادله به این فرم حتماً جوابی به‌صورت $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\lambda}$ خواهد داشت و این فرض کاملاً صحیح بود.

به مثال زیر توجه کنید:

$x^{۲}\mathrm{y}'' + xy' + y = ۰$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\lambda} \text{ و } \mathrm{y}' = \lambda \mathrm{x}^{\lambda-۱} \text{ و } \quad y'' = \lambda(\lambda-۱)x^{\lambda-۲}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$x^{۲}\left(\lambda(\lambda-۱)x^{\lambda-۲}\right) + x\left(\lambda \mathrm{x}^{\lambda-۱}\right) + \mathrm{x}^{\lambda} = ۰$
$\lambda(\lambda-۱)x^{\lambda} + \lambda x^{\lambda} + x^{\lambda} = ۰$

با فاکتورگیری و حذف x^{λ} به دلیل ناصفر بودن آن داریم:

$\lambda(\lambda-۱) + \lambda + ۱ = ۰$

$\lambda^{۲} + ۱ = ۰ \qquad \lambda = \pm i \quad \to \quad y = cx^{\pm i}$

در این معادلات با مجموع مشتقات سروکار داریم. اما در این بخش حاصل‌ضرب مشتقات و توان‌های دلخواه تابع در معادلات دیفرانسیل بررسی می‌شوند.

معادله‌ای به فرم زیر، به شکل مشتق nام دلخواه و توانی دلخواه از m و حقیقی و ضرایب A و B عضو همه اعداد حقیقی حتماً دارای جوابی به فرم $\mathrm{y} = \mathrm{c}\,\mathrm{x}^{\lambda}$ است.

$Ay^{(n)} = By^{m}$

مقادیر c و λ به‌صورت زیر است:

$$c = \sqrt[m-۱]{\frac{A}{B}(-۱)^{n}\,\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}}$$

$$\lambda = \frac{n}{۱-m}$$

اثبات آن به شرح زیر است:

$y^{(n)} = c\lambda(\lambda-۱)(\lambda-۲)\ldots\ldots(\lambda-n+۱)x^{\lambda-n}$

$y^{m} = (cx^{\lambda})^{m} = c^{m}x^{\lambda m}$

$Ac\lambda(\lambda-۱)(\lambda-۲)\ldots\ldots(\lambda-n+۱)x^{\lambda-n} = Bc^{m}x^{\lambda m}$

می‌دانیم که جملات

$(\lambda-n+۱)\dots(\lambda-۲)(\lambda-۱)\lambda$ تشکیل حاصل‌ضرب n جمله از دنباله‌ی حسابی با جمله اول λ و قدر نسبت ۱- می‌دهد و فرمول حاصل‌ضرب جملات دنباله‌ی حسابی به‌صورت زیر است:

$$P_n = d^n \frac{\Gamma(\frac{a_۱}{d}+n)}{\Gamma(\frac{a_۱}{d})}$$

که در آن d قدر نسبت، $a_۱$ جمله اول و Γ نماد فاکتوریل همه‌ی اعداد حقیقی از جمله اعداد گویا می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Ac}\left\{(-۱)^{\mathrm{n}}\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{-۱}+\mathrm{n})}{\Gamma(\frac{\lambda}{-۱})}\right\}x^{\lambda-n} = Bc^m x^{\lambda m}$$

از مساوی قرار دادن توان‌های x و ضرایب دو طرف تساوی فرمول‌هایی که در ابتدا ذکر شد، حاصل می‌شود.

به مثال زیر توجه کنید:

$$y'' = \mathrm{y}^۳$$

$$\lambda = \frac{n}{۱-m} = \frac{۲}{۱-۳} = -۱$$

$$c = \sqrt[۳-۱]{\frac{۱}{۱}(-۱)^۲\frac{\Gamma(۲-(-۱))}{\Gamma(-(-۱))}}$$

باتوجه به این که $\Gamma(\alpha) = (\alpha-۱)!$ برای اعداد طبیعی است، داریم:

$$c = \sqrt[۲]{\frac{\Gamma(۳)}{\Gamma(۱)}} = \sqrt[۲]{\frac{۲!}{۰!}} = \sqrt{۲}$$

$$y = cx^{\lambda} = \sqrt{۲}x^{-۱} = \frac{\sqrt{۲}}{x}$$

حال جواب به‌دست آمده را چک می‌کنیم:

$$y'' = \mathrm{y}^۳$$

$$y = \sqrt{۲}x^{-۱} \text{ و } y' = -\sqrt{۲}x^{-۲} \text{ و } y'' = ۲\sqrt{۲}x^{-۳}$$

$$y^۳ = (\sqrt{۲}x^{-۱})^۳ = \sqrt{۸}x^{-۳} = ۲\sqrt{۲}x^{-۳}$$

دیدیم که دو سوی معادله به برابری رسید، پس جواب به دست آمده صحیح است. اما اگر تعداد مشتقات و توان‌های معادله بالا باشد، روش مشتق‌گیری و جایگزینی طاقت‌فرسا و گاهی ناممکن است؛ پس فرمول‌های به‌دست آمده اهمیت می‌یابد.

به مثال مرتبط با فیزیک در زیر توجه کنید:

در یک شهربازی می‌خواهند وسیله‌ای بسیار مهیج را سفارش ساخت بدهند؛ به گونه‌ای که تا حد زیادی نوسان و هیجان ایجاد کند. مهندسان برای این سیستم جرک(خیز و جهش) را برابر قرینه‌ی مجذور مکان در نظر گرفته‌اند، به‌طوری که در زمان ۰/۱ ثانیه‌ی اول در ارتفاع h متری بوده و پس از یک دقیقه متوقف شود. معادله مکان- زمان این وسیله باید چگونه باشد؟

می‌دانیم که جرک، مشتق شتاب و مشتق سوم مکان است، پس داریم:

$$J_t = \frac{da}{dt} = \frac{d^۳x}{dt^۳}$$

$$x^{(۳)} = -x^۲ \qquad x = ct^{ƛ}$$

$$ƛ = \frac{n}{۱-m} = \frac{۳}{۱-۲} = -۳$$

$$c = \sqrt[۲-۱]{\frac{۱}{-۱}(-۱)^۳ \frac{Ɣ(۳-(-۳))}{Ɣ(-(-۳))}}$$

$$c = \frac{Ɣ(۶)}{Ɣ(۳)} = \frac{۵!}{۲!} = ۶۰$$

$$x(t) = \begin{cases} h, & t < ۰/۱ \\ \frac{۶۰}{t^۳}, & ۰/۱ < t < ۶۰ \end{cases}$$

با تکیه بر معادله‌ی قبلی می‌توان ادعا کرد که معادلات متنوعی همچون معادلات به فرم زیر، حتماً جوابی به شکل $y = c\, x^{ƛ}$ دارند.

$$Ay^{(n)} = Bx^{\alpha}y^m$$

$$Acƛ(ƛ-۱)(ƛ-۲)\ldots\ldots(ƛ-n+۱)x^{ƛ-n} = Bx^{\alpha}c^m x^{ƛm}$$

از تساوی فوق c و ƛ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$c = \sqrt[m-۱]{\frac{A}{B}(-۱)^n \frac{Ɣ(n-ƛ)}{Ɣ(-ƛ)}}$$

$$ƛ = \frac{\mathrm{n}+\alpha}{۱-\mathrm{m}}$$

در ادامه، معادله‌ی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$Ay^{(n)} = Bx^{\alpha}\acute{y}y^m$$

$$Acƛ(ƛ-۱)(ƛ-۲)\ldots\ldots(ƛ-n+۱)x^{ƛ-n} = Bx^{\alpha}cƛx^{ƛ-۱}c^m x^{ƛm}$$

با حذف عبارت $c\lambda$ از طرفین معادله، داریم:

$$A(\lambda-۱)(\lambda-۲)\ldots\ldots(\lambda-n+۱)x^{\lambda-n}=Bc^{m}x^{m\lambda+\lambda+\alpha-۱}$$

از تساوی توان‌های دو طرف، حاصل می‌شود:

$$\lambda-n=m\lambda+\lambda+\alpha-۱\quad\rightarrow\quad\lambda=\frac{۱-\alpha-n}{m}$$

از تساوی ضرایب، حاصل می‌شود:

$$c=\sqrt[m]{\frac{A}{B}(-۱)^{n-۱}\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(۱-\lambda)}}$$

در ادامه برای درک اهمیت فرمول‌ها، مثالی می‌زنیم:

$$x^{۵}y^{(۴۱)}=\acute{y}y^{۳۰}$$

طرفین را بر $x^{۵}$ تقسیم می‌کنیم:

$$y^{(۴۱)}=x^{-۵}\acute{y}y^{۳۰}$$

$$\lambda=\frac{۱-(-۵)-۴۱}{۳۰}=-\frac{۳۵}{۳۰}=-\frac{۷}{۶}$$

$$c=\sqrt[۳۰]{(-۱)^{۴۱-۱}\frac{\Gamma(۴۱-(-\frac{۷}{۶}))}{\Gamma(۱-(-\frac{۷}{۶}))}}\cong\sqrt[۳۰]{۵/۷۵۲۹\times ۱۰^{۴۹}}$$

$$\cong ۴۵/۵۶۸۳$$

$$y\cong\frac{۴۵/۵۶۸۳}{\sqrt[۶]{x^{۷}}}$$

مشاهده می‌شود که برای حل چنین معادله‌ی دیفرانسیلی، روش جایگذاری در معادله به همراه مشتقات آن که تا مشتق ۴۱ ام ادامه دارد، کار بسیار دشواری است؛ این در حالی است که با فرمول‌بندی‌های اخیر می‌توان *جواب‌ها* را تا مراتب بالا از مشتق و توان به‌راحتی محاسبه نمود.

برای معادله دیفرانسیل به فرم $Ay^{(n)}=Bx^{\alpha}y^{(z)}y^{m}$ که در آن z مرتبه‌ی مشتقی دلخواه از تابع است، با شرط $n>z$ داریم:

$$\lambda=\frac{z-n-\alpha}{m}$$

$$c=\sqrt[m]{\frac{A}{B}(-۱)^{n-z}\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(z-\lambda)}}$$

به مثال زیر توجه کنید:

$$۳y^{(۸۶)}=۴x^{۱۵}y^{(۷۱)}y^{۳۰}$$

$$\lambda = \frac{۷۱ - ۸۶ - ۱۵}{۳۰} = -۱$$

$$c = \sqrt[۳۰]{\frac{۳}{۴}(-۱)^{۸۶-۷۱}\ \frac{\Gamma(۸۶ - (-۱))}{\Gamma(۷۱ - (-۱))}} \cong ۸/۷۹i$$

$$y \cong \frac{۸/۷۹i}{x}$$

معادلات دیفرانسیل انواع متفاوتی دارند که به‌صورت زیر است:

مستقل: معادله‌ی دیفرانسیلی که به x وابسته نباشد.

خطی: معادله‌ای که بتوان F را به‌صورت زیر به عنوان یک ترکیب خطی از مشتقات y نوشت:

$$y^{(n)} = \sum_{i=۰}^{n-۱} a_i(x)y^{(i)} + r(x)$$

که در آن $a_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})$ و $r(x)$ توابعی پیوسته از x هستند.

معادلات غیرخطی را نمی‌توان به این فرم نوشت.

تابع $r(x)$ تابع ورودی نامیده می‌شود که دو دسته‌بندی مهم را برای این دسته از معادلات شکل می‌دهد:

همگن: اگر $r(x) = ۰$ باشد، معادله را همگن می‌نامند. برای چنین معادله‌ای $y = ۰$ یک جواب بدیهی به‌شمار می‌آید.

جواب یک معادله‌ی خطی همگن، تابع مکمل نامیده می‌شود که با y_{c} نمایش داده می‌شود.

ناهمگن: اگر $r(x) \neq ۰$ باشد، معادله را ناهمگن می‌نامند. چنین معادله‌ای علاوه بر جواب عمومی، یک پاسخ خصوصی هم دارد که با $\mathrm{y_p}$ بیان می‌شود.

در حالت کلی جواب یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y = y_c + y_p$$

با این تفاسیر نکته اینجاست که در این کتاب معادله‌های مورد بررسی و تحلیل جزو هیچ یک از این دسته‌بندی‌ها نیست و فرم‌ها و فرمول‌های جدید و قابل توسعه عرضه شده است.