

بسم الله الرحمن الرحيم

حل تمرينات كتاب كار
رياضيات پايه سوم راهنمايى

مولى :

آيتا عبدالهى نانوآپيشه

فهرست مطالب

عنوان

.....پیشگفتار

فصل اول: حساب و مجموعه‌های اعداد

.....عددهای طبیعی

.....جذر

.....عددهای صحیح

.....عددهای گویا

فصل دوم: مختصات و جبر

.....بردار

.....جبر

.....معادله

فصل سوم: هندسه ۱

.....زاویه و بردار

.....رابطه فیثاغورس

.....دوران

فصل چهارم: اعداد حقیقی و آمار

..... اعداد حقیقی

..... آمار

فصل پنجم: معادله‌های خطی

..... معادله خط

..... دستگاه معادله‌های خطی

فصل ششم: هندسه ۲

..... خطوط موازی و قضیه تالس

..... تشابه

..... حجم

..... نمونه سوالات تیزهوشان

پیشگفتار

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

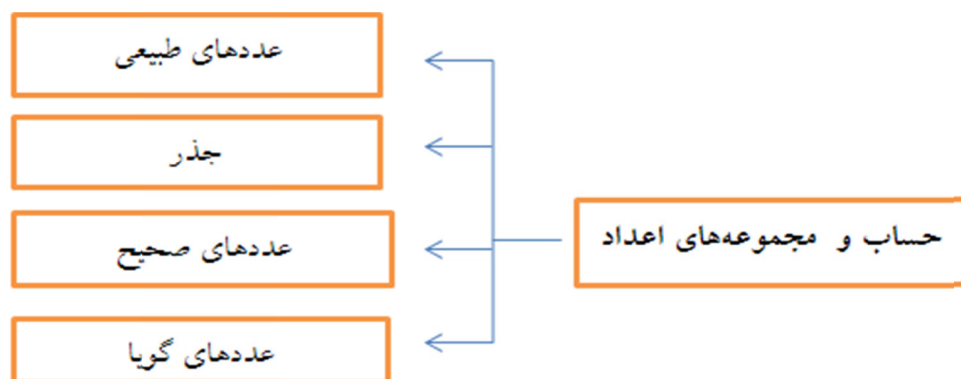
جهان امروز با پدیده تولید و گسترش روزافزون اطلاعات روبروست، به طوری که هر دم بر حجم آن افزوده می شود. سیطره نفوذ آن خارج از ابعاد زمانی و مکانی، شکلی جهانی به خود گرفته و در این بین، اگرچه دستیابی به آن به مدد فناوری های نوین تا حد بسیاری ممکن می نماید، لیکن مستلزم صرف وقتی است که شاید در محدوده فوریت های زمانی و مکانی خاص نباشد، در این راستا، عطش یادگیری و دسترسی به منابعی که فرد را با روش و ساختار خودآموزی و خودآزمونی آماده نماید به همان نسبت مورد توجه قرار گرفته است.

هدف ما در این کتاب، ضمن معرفی طیف وسیعی از تعاریف و اصطلاحات ریاضی، ارائه تست هایی است که دانش آموزان را با انواع مختلفی از سوالات المپیاد، آزمون های علمی و کنکورهای آزمایشی آشنا سازد. عقیده ما این است که اگر به دانش آموزان توضیحات کافی درباره علم ریاضیات و مفاهیم آن داده شود، درک بسیار بهتری از آن خواهند داشت لذا در کتاب حاضر قبل از ارائه تست ها، توضیحات و مثال هایی آورده ایم تا قلمرو موضوع، بیشتر مشخص گردد و انگیزه ای برای مطالعه آن ایجاد شود. این کتاب شامل شش فصل می باشد که در تمامی این فصول با تاکید بر ارائه تست هایی، هدف عمومی، ایجاد زمینه هایی در دانش آموزان است که آن ها را قادر سازد علاوه بر انجام اعمال ریاضی، کاربرد ریاضیات را در زندگی روزمره مشاهده نموده و به بررسی مسائل محیط اطراف بپردازد. معمولاً مسائلی که در ریاضیات مطرح هستند به گونه ای هستند که افق های تازه ای را در برابر دانش آموزان باز می نمایند و در نتیجه دانش آموزان از وسعت دید بیشتری برخوردار می شوند. در خاتمه مراتب قدردانی خود را از تمامی کسانی که بنده را در تدوین این کتاب یاری نمودند اعلام می دارم.

آیتا عبدالمهی

فصل اول

حساب و مجموعه‌های اعداد



حل تمرینات فصل اول

- عبارت‌های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید.

$$0 \notin \mathbb{N}, \quad 3\frac{2}{3} \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{5} \notin \mathbb{N}, \quad -2 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{4}{2} \in \mathbb{N}$$

- کوچکترین و بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی را بنویسید.

پاسخ: کوچکترین: ۱۰۰۰ بزرگترین: ۹۹۹.



- مجموعه مضرب‌های عدد ۸ را نوشته، دور اعداد مرکب خط بکشید. آیا همگی آن‌ها مرکب‌اند؟

پاسخ: خیر، همه مرکب نیستند. $8: \{1, 2, 4, 8\}$

- مقسوم علیه‌های اول عدد ۱۲ را بنویسید.

پاسخ: $12: \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

- سه مقسوم علیه عدد ۴ را نوشته و در بین آن‌ها عدد اول را مشخص کنید.

پاسخ: عدد اول ۲، $4: \{1, 2, 4\}$



- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ۸۹ عددی اول است. درست

ب) تنها مضرب اول ۵، خود ۵ است. درست

پ) غیر از ۲، هیچ مضرب ۲ اول نیست. درست

ت) هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ حداقل یک مقسوم علیه اول دارد. درست

ث) ۲ یک مقسوم علیه اول ۱۴ است. درست

- با استفاده از الگوریتم غربال اعداد اول بین ۳۰ تا ۶۰ را به دست آورید.

پاسخ:

ابتدا تمامی اعداد بین ۳۰ تا ۶۰ را نوشته، سپس مضرب‌های ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... (اعداد اول) را خط می‌زنیم. اعداد باقیمانده همگی اولند. در این سوال اعداد اول عبارتند از: ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹

- اعداد اول بین ۲۰ تا ۴۰ را بنویسید.

پاسخ:

این اعداد عبارتند از ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷

- عدد ۱۴۳ چه نوع عددی است؟ چرا؟

پاسخ: عددی مرکب است زیرا می‌توان آن را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت.

$$۱۴۳ = ۱۳ \times ۱۱$$

- عددی بنویسید که مجموع مقسوم علیه‌های اول آن ۲۰ باشد.

۹۱ و ۱۵۴ زیرا $\{۷، ۱۳\}$: ۹۱ و $\{۲، ۷، ۱۱\}$: ۱۵۴

- در مجموعه زیر چند عدد اول وجود دارد؟

$$A = \{ -(-۲)^۲, \sqrt[۳]{۲۷}, \frac{\sqrt{۱۶}}{\sqrt{۴}}, -\sqrt{۲۵}, ۱, ۳ \}$$

پاسخ: در مجموعه فوق تنها عدد ۳ اول است.

- اگر a یک عدد اول بزرگتر از ۳ باشد، کدامیک از مطالب زیر صحیح است؟

(۱) تمام مقسوم علیه‌های عدد، زوج هستند (۲) تمام مقسوم علیه‌های عدد، فرد هستند

(۳) فقط عدد ۱ مقسوم علیه عدد است

(۴) عدد فوق مقسوم علیه ندارد.

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

- چند جفت عدد اول وجود دارد به طوری که تفاضل مربعات آنها با مجموعشان برابر باشد؟

پاسخ: یک جفت عدد اول وجود دارد به طوری که تفاضل مربعات آنها با مجموعشان برابر باشد

$$x=3, y=2$$

$$x^2 - y^2 = x + y \rightarrow 5 = 5$$

- در مجموعه $A = \left\{ \left(\frac{x}{2} - 2 \right) \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}, -100 \leq x < 100 \right\}$ چند عدد اول وجود دارد؟

پاسخ: اعداد منفی فرد نمیتوانند جزء جواب باشند، از طرفی باید اعداد زوج مثبت را در نظر بگیریم.

تنها عدد اول موجود در این مجموعه ۲ است که با قرار دادن $x=12$ به دست می آید.

- چند عدد اول کوچکتر از ۱۳۹۱ وجود دارد که مجموع ارقام آن ۲ باشد؟

در این مجموعه، ۲ عدد اول کوچکتر از ۱۳۹۱ وجود دارد که مجموع ارقام آن ۲ است. یکی ۱۱ و

دیگری عدد ۲.



- برای نقاشی یک ساختمان، ۳ کارگر ۱۸ روز کار کردند. اگر تعداد کارگرها ۶ نفر بود، این کار چند روزه

انجام می شد؟

$$3 \times 18 = 6 \times x$$

پاسخ:

$$x = \frac{54}{6} = 9$$

- ۷ کارگر ساختمانی را در ۱۶ روز نقاشی می کنند. اگر ۳ نفر از آنها بیمار شوند، باقیمانده کارگران، این

ساختمان را در چند روز نقاشی خواهند کرد؟

$$7 \times 16 = 4 \times x$$

پاسخ:

$$x = \frac{112}{4} = 28$$

۵ - نفر قالیباف یک قالی را در ۱۲۰ روز می‌بافند. اگر ۳ نفر دیگر به آن‌ها اضافه شوند، این قالی را چند روزه خواهند بافت؟

$$5 \times 120 = 8 \times x \quad \text{پاسخ:}$$

$$x = \frac{600}{8} = 75$$

۸ - x نفر با روزی x ساعت در x روز x وسیله را می‌سازند.

y نفر با روزی y ساعت در y روز چند وسیله می‌سازند؟

$$x \times x \times x \times x = y \times y \times y \times t \quad \text{پاسخ:}$$

$$x^4 = y^3 t \rightarrow t = \frac{x^4}{y^3}$$

۱۸ - کارگر، کاری را در ۱۲ روز انجام می‌دهند. $\frac{4}{5}$ کارگران همان کار را در چند روز انجام می‌دهند؟

$$18 \times 12 = 12 \times x$$

$$x = \frac{216}{12} = 18$$

۱۵ - کارگر قرار گذاشتند کاری را در ۲۴ روز تمام کنند. پس از آنکه $\frac{1}{4}$ از کار را انجام دادند ۳ نفر به آن‌ها اضافه شد. بقیه کار چند روزه تمام خواهد شد؟

$$\frac{1}{4} \times 24 = 6, \quad 24 - 6 = 18 \quad \text{بقیه کار}$$

$$15 \times 18 = 18 \times x$$

$$x = \frac{270}{18} = 15$$



- حاصل عبارات زیر را به صورت تواندار بنویسید.

$$5^4 \times 5^2 = 5^6, \quad 8^4 \div 8^2 = 8^2, \quad 49^7 \div 7^7 = 7^7$$

$$x^5 \div \left(\frac{1}{y}\right)^5 = (xy)^5, \quad (-3.7)^8 \div (-3.7)^3 = (-3.7)^5,$$

$$(3.5)^5 \div \left(3\frac{5}{10}\right)^3 = (3.5)^2, \quad \left(\frac{-2}{5}\right)^7 \div \left(\frac{-1}{10}\right)^7 = \left(\frac{2}{5}\right)^7,$$

$$\frac{6^5 \times 7^6 \times 15^3}{35^3 \times 6^5} = \frac{6^5 \times 7^6 \times 15^3}{5^3 \times 7^3 \times 6^5} = 3^3 \times 7^3 = 21^3, \quad (0.75)^2 \times 6^4 \times 8^2 = 6^2 \times 6^4 = 6^6,$$

$$2^4 \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right) = 2^4 \times 4 \times \frac{1}{5} = 2^4 \times 2^2 \times \frac{1}{5} = 2^6 \times \frac{1}{5},$$

$$\frac{(1.5)^2 + (0.25)}{\frac{1}{2}} = \frac{2.5}{0.5} = 5, \quad \frac{1^3 \times 1^5}{6^4} = \frac{1^8}{6^4}, \quad \frac{3^9 \times 5^1}{5^5 \times 3^6} = 5^3 \times 3^3 = 15^3$$

$$\frac{35^7}{7^4 \times 5^{10}} = \frac{5^7 \times 7^7}{5^{10} \times 7^4} = \frac{7^3}{5^3} = \left(\frac{7}{5}\right)^3, \quad \frac{(2.5)^7 \times 4^7 \times 10^3}{2^5 \times 5^5} = \frac{10^7 \times 10^3}{10^5} = \frac{10^{10}}{10^5} = 10^5$$

- عبارت‌های زیر را به صورت عبارت‌های توان‌دار بنویسید.

$$(xy)^2 \times x^3 = x^2 y^2 \times x^3 = y^2 x^5, \quad xy \times y^3 = y^4 x$$

- اگر $3^x = a$ باشد، مقدار 3^{x+1} را بر حسب a بنویسید.

$$3^{x+1} = 3^x \times 3^1 = a \times 3 = 3a$$

- اگر $x^2 = 2 - x$ باشد، حاصل $x^4 - (x - 2)^2$ کدام است؟

$$x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

$$x^4 - (x - 2)^2 \xrightarrow{x=1, -2} \begin{cases} 1 - (-1)^2 = 0 \\ (-2)^4 - (-2 - 2)^2 = 16 - 16 = 0 \end{cases}$$

- نصف عدد 2^{100} را حساب کنید.

$$2^{100} \div 2^1 = 2^{99}$$

- ربع عدد 4^{10} را حساب کنید.

$$4^{10} \div 4^1 = 4^9$$

- اگر $b = 4^x$ باشد، مقدار 4^{x-1} را بر حسب b به دست آورید.

$$4^{x-1} = 4^x \times 4^{-1} = b \times \frac{1}{4} = \frac{b}{4}$$

- حاصل عبارت $\frac{1+3+5+\dots+39}{41+43+\dots+79}$ برابر با چه عددی است؟

پاسخ: میدانیم که اگر عدد اول یک دنباله حسابی و عدد آخر آن مشخص باشند فرمول زیر را برای مجموع عددهای یک دنباله داریم:

$$s_n = \frac{n(a+l)}{2}, \quad a = \text{عدد اول}, l = \text{عدد آخر}$$

$$\frac{1+3+5+\dots+39}{41+43+\dots+79} = \frac{\frac{20(1+39)}{2}}{\frac{20(41+79)}{2}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

- حاصل عبارت زیر به صورت تواندار چیست؟

$$2^{1000} - 2^{999} - 2^{998} - \dots - 2^{101} - 2^{100}$$

پاسخ: برای رابطه فوق از فرمول زیر استفاده می‌کنیم، زیرا دنباله‌های داده شده یک دنباله هندسی هستند.

$$\frac{lq - a}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} 2^{1000} - 2^{999} - 2^{998} - \dots - 2^{101} - 2^{100} &= 2^{1000} - [2^{999} + 2^{998} + \dots + 2^{100}] \\ &= 2^{1000} + 2^{100} - 2^{1000} = 2^{100} \end{aligned}$$

- اگر $x = 1 - \sqrt{2}$ حاصل $\sqrt{x} - x^{-1}$ را به دست آورید

پاسخ: ابتدا مخارج مشترک گرفته، سپس صورت و مخارج کسر را گویا می‌کنیم؛ یعنی در مزدوج مخارج ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt{x} - x^{-1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{1}} - \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})^2-1}{1-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{2}+2-1}{1-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

– حاصل $\frac{[2 \times (2.5 - 0.75)]^3}{(0.75 + 2\frac{3}{4})^3}$ را به دست آورید.

پاسخ:
$$\frac{[2 \times (2.5 - 0.75)]^3}{(0.75 + 2\frac{3}{4})^3} = \frac{(3.5)^3}{(3.5)^3} = (3.5)^1$$

– حاصل ضرب مربع در مکعب عددی برابر است با معکوس عدد 2.5 . آن عدد کدام است؟

پاسخ:
$$x^2 \times x^3 = \frac{1}{2.5} \rightarrow x^5 = \frac{1}{2.5} \rightarrow x = \frac{1}{2.5}$$

– عدد $10^x \times 1.25$ به ازای چه مقدار از x مکعب کامل است؟

پاسخ: اگر $x = 2$ باشد،
$$1.25 \times 10^x = 1.25 \times 10^2 = 125$$

– بین دو عدد 2^{-4} و 2^{-4} چند عدد طبیعی وجود دارد؟

$$2^{-4} < x < -2^{-4} \rightarrow \frac{1}{-2^4} < x < \frac{1}{2^4} \rightarrow \frac{1}{-16} < x < \frac{1}{16}$$

پاسخ: هیچ عدد طبیعی بین این دو مقدار وجود ندارد.

– اگر عددهای مثبت a و b در برابریهای $a^b = ba = 3a$ صدق کند مقدار a کدام است؟

از رابطه $ba = 3a$ مقدار $b = 3$ از $a^3 = 3a$ داریم

$$a^3 - 3a = 0 \rightarrow a(a^2 - 3) = 0 \rightarrow a = 0, a = \pm\sqrt{3}$$

که تنها $\sqrt{3} +$ قابل قبول است.

– اگر $\frac{A+B}{A-B} = 3x$ در اینصورت حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

پاسخ: با طرفین وسطین کردن عبارت داده شده، داریم:

$$A + B = 3Ax - 3Bx \rightarrow A - 3Ax = -3Bx - B \rightarrow A(1 - 3x) = B(-1 - 3x) \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-1 - 3x}{1 - 3x}$$

– اگر $5^x = 20$ باشد، مقدار 5^{x+2} را به دست آورید.

$$5^{x+2} = 5^x \times 5^2 = 20 \times 25$$

پاسخ:

– اگر a و b دو عدد طبیعی و $a^4 = b^4 + 65$ باشد مقدار a کدامست؟

$$a^4 - b^4 = 65 \rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 65 \rightarrow a = 3 \text{ و } b = 2$$

پاسخ:

– اگر $a^b = a$ و $a^b = a$ مقدار $a-b$ کدامست؟

پاسخ: چون $a^b = a$ در عبارت دوم بجای a مقدارش را قرار می‌دهیم، لذا داریم

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -1 \rightarrow a-b = \frac{5}{4}$$

– عبارتهای زیر را ساده کنید و به صورت یک عدد تواندار بنویسید

$$9^6 \times 27 = 3^{12} \times 3^3 = 3^{15}, \quad 8^2 \times 2^9 = 2^6 \times 2^9 = 2^{15}$$



– جذرهای زیر را با تقریب نقصانی کمتر از یک حساب کنید.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2416} & 49 \\ - & 16 \\ \hline & 816 \\ - & 816 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 49 \\ 4 \times 2 = 8 \\ 89 \times 9 = 801 \end{array}$$

۱۵

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{521} & 22 \\ - & 4 \\ \hline & 121 \\ - & 121 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 22 \\ 2 \times 2 = 4 \\ 42 \times 2 = 84 \end{array}$$

۳۷

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1225} & 35 \\ - & 9 \\ \hline & 322 \\ - & 322 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 35 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 64 \times 4 = 256 \end{array}$$

۶۶



- جذرهای زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید و درستی آن‌ها را امتحان کنید.

| | | |
|--|--|--|
| $\begin{array}{r} \sqrt{71.96} \\ 8.2 \\ \hline 8 \times 2 = 16 \\ \hline 79.6 \\ 162 \times 2 = 606 \\ \hline 606 \\ \hline 1.40 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \sqrt{42.50} \\ 6.5 \\ \hline 6 \times 2 = 12 \\ \hline 67.0 \\ 120 \times 5 = 620 \\ \hline 620 \\ \hline 0.45 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \sqrt{71.00} \\ 8.2 \\ \hline 8 \times 2 = 16 \\ \hline 70.0 \\ 162 \times 2 = 606 \\ \hline 606 \\ \hline 0.44 \end{array}$ |
|--|--|--|

- جذر عددی ۱۳ و باقیمانده عدد ۵ است. عدد اصلی را به دست آورید.

پاسخ:

$$13 \times 13 + 5 = 174$$

- من چه عددی هستم؟ اگر ۴۷ را از مجذورم کم کنید عدد ۶۸۴۲ به دست می‌آید.

پاسخ:

$$x^2 - 47 = 6842$$

$$x^2 = 6842 + 47$$

$$x^2 = 6889 \rightarrow x = \sqrt{6889}$$

- دو عدد را جداگانه بر عدد ۳ تقسیم کرده‌ایم، باقیمانده‌ها در هر دو حالت یک عدد اول است. حال اگر حاصل جمع آنها را بر ۳ تقسیم کنیم، باقیمانده را حساب کنید.

پاسخ: باقیمانده ؛ یعنی عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

| | |
|--|--|
| $\begin{array}{r} 14 \overline{) 3} \\ 12 \\ \hline 1 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 17 \overline{) 3} \\ 15 \\ \hline 1 \end{array}$ |
|--|--|

$$14 + 17 = 31 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 31 \overline{) 3} \\ 30 \\ \hline 1 \end{array}$$

- عددی را به دست آورید که اگر مجذور آن را در ۱۲ ضرب کنیم عدد ۲۴۳۰۰ به دست آید.

پاسخ: $12x^2 = 24300$

$$x^2 = \frac{24300}{12} = 2025$$

$$x = \sqrt{2025} = 45$$

- به عبارت $A = (x-3)(x+1)$ چقدر اضافه شود تا جذر عبارت حاصل، $(x-1)$ شود.

$$(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{+4} (x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر عدد}} \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

- اگر n مربع کامل باشد، مربع کامل قبل از آن کدام است؟

پاسخ: اگر n مربع کامل باشد، مربع کامل قبل از آن $\sqrt{n} - 1$ است.

- جذر عدد ۹.۶ را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

| | |
|----------------|----------------|
| $\sqrt{9.600}$ | ۳.۰۹ |
| - | ۹ |
| ۶۰ | ۳ × ۲ = ۶ |
| - | ۶۰ × ۰ = ۰ |
| ۰۰ | ۳۰ × ۲ = ۶۰ |
| ۶۰۰۰ | ۶۰۹ × ۹ = ۵۴۸۱ |
| - | ۵۴۸۱ |
| ۰.۰۵۱۹ | |

- جذر عدد $\frac{3}{11}$ را با تقریب کمتر از ۰.۰۱ به دست آورید و باقیمانده آن را مشخص کنید.

پاسخ: $\sqrt{\frac{3}{11}} = \sqrt{0.27} = \sqrt{27} \times \sqrt{0.01} = 5.1 \times 0.1 = 0.51$

| | |
|----------------|---------------|
| $\sqrt{27.00}$ | ۵.۱ |
| - | ۲۵ |
| ۲۰۰ | ۵ × ۲ = ۱۰ |
| - | ۱۰۱ |
| ۹۹ | ۱.۱ × ۱ = ۱.۱ |

- حاصل عبارت زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

پاسخ:

$$\sqrt{\sqrt{81} - \sqrt{16}} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

پاسخ:

$$\sqrt{\sqrt{36} \times \sqrt{2.25}} = \sqrt{6 \times 1.5} = \sqrt{9} = 3, \sqrt{625} \times \sqrt{1.69} = 25 \times 1.3 = 32.5$$

- اگر $A = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{4}}}$ باشد، مجذور A^2 را به دست آورید

پاسخ: $A^2 = 5 + \sqrt{7}$ بنابراین مجذور A^2 برابر است با

$$(5 + \sqrt{7})^2 = 25 + 10\sqrt{7} + 7 = 32 + 10\sqrt{7}$$



- عبارت های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید .

$$-35 \in \mathbb{Z} \quad 0.45 \notin \mathbb{Z} \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Z} \quad 0 \in \mathbb{Z}$$

- کوچکترین و بزرگترین عدد صحیح دو رقمی کدامند؟

کوچکترین: -۹۹ بزرگترین: ۹۹

- کوچکترین عدد صحیح مثبت سه رقمی و بزرگترین عدد صحیح منفی کدامند؟

کوچکترین: -۹۹۹ بزرگترین: ۹۹۹



- هر یک از مجموعه‌های زیر را با مشخص کردن اعضای آنها بنویسید.

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, -2 < x < 8\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{x | -x \in A\} = \{1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7\}$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

$$A = \{-3, -2, \dots, +2\} = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}.$$

$$B = \{-14, -15, \dots\} = \{x | x \in \mathbb{Z}, x \leq -14\}.$$

- مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1\}$ دارای چند عضو است؟

پاسخ: دارای بینهایت عضو می‌باشد زیرا مجموعه اعداد حقیقی شامل تمامی اعداد گویا و اصم می‌باشد.

- مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, 20 < x < 50\}$ چند عضو دارد؟

پاسخ: دارای ۲۹ عضو می‌باشد.



- حاصل عبارتهای زیر را در صورت امکان با استفاده از قرینه‌یابی به دست آورید.

$$(+35) + (+51) = +86$$

$$(+75) + (-21) = +54$$

$$(-33) + (-17) = -50$$

$$(-25) + (-\sqrt{25}) = -25 - 5 = -30$$

$$\left(-\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{+3}{8}\right) = \frac{-1}{8}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right) + \left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{-10}{8}$$

$$\left(2 \frac{-3}{2}\right) + \left(4 \frac{-7}{5}\right) = \frac{-7}{2} - \frac{-27}{2} = \frac{-89}{2}$$



- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(-4) - (+5) = -9$$

$$(-36) - (-\sqrt{36}) = -30$$

$$(-5)^3 - (-2)^3 = -125 + 8 = -117$$

$$(-7)^2 + (-3)^3 - 4^2 = 49 - 27 - 16 = 6$$

- هر یک از عبارتهای زیر را تا می توانید ساده کنید.

$$((-4) - (+5)) + ((+75) - (-21)) = -9 + 96 = 87$$

$$((-3) + (-5)) - ((+75) + (-2)) = -8 - 73 = -81$$

- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$10 - 3 + 25 - 20 = 12$$

$$8 - 5 + 3 + 2 = 8$$

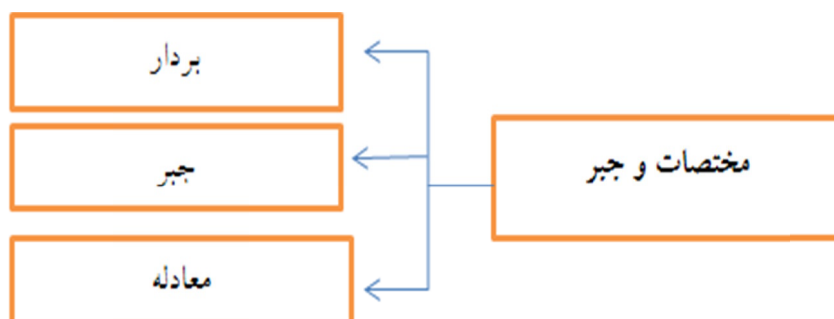
- اختلاف ۴۰ درصد و ۳۰ درصد عددی، ۶ است. آن عدد چیست؟

$$10x = 6 \rightarrow x = \frac{600}{10} = 60$$

پاسخ:

فصل دوم

مختصات و جبر



- عبارت‌های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید.

$$-۳۵ \in \mathbb{Q} \quad ۰.۴۵ \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{۳} \notin \mathbb{Q} \quad ۰ \in \mathbb{Q}$$

- آیا عبارت $(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$ یک عدد گویاست؟ چرا؟

پاسخ: حاصل این عدد برابر است با $۲-۳ = -۱$

- درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad \text{درست} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \quad \text{درست} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \text{درست} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \quad \text{نادرست}$$

- آیا غیر از اعداد گویا اعداد دیگری وجود دارند؟ اگر بله، نام ببرید. بله وجود دارند. اعداد اصم یا گنگ.



- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(-۱۲) \times ۴۵ = -۵۴۰, \quad \left(\frac{-۸}{۳۰}\right) \div \left(\frac{-۲۴}{۱۵}\right) = \frac{-۸}{۳۰} \times \frac{-۱۵}{۲۴} = \frac{-۱}{۶}$$

$$\left(\frac{-۸}{۹}\right) \div (-۸) = \frac{-۸}{۹} \times \frac{۱}{۸} = \frac{-۱}{۹}, \quad \left(\frac{-۶}{۸}\right) \div \left[\left(\frac{-۳}{۱۴}\right) - \left(\frac{-۵}{۲۱}\right)\right] = \frac{-۶}{۸} \times \frac{۴۲}{۱} = \frac{-۲۵۲}{۸}$$

$$(-۰.۸۴) \div ۴ = \frac{-۲۱}{۱۰۰}, \quad \left[\left(\frac{۴}{۹}\right) - \left(\frac{-۳}{۹}\right)\right] \times \frac{۷}{۸} = \frac{۷}{۹} \times \frac{۷}{۸} = \frac{۴۹}{۷۲}$$

$$\left(\frac{-۲۸}{۳۵}\right) \times \left(\frac{-۵}{۴}\right) = +۱, \quad -۷.۸ \times -۴.۵ = +۳۵.۱$$

- حاصل عبارت $۲-۲ \times \left[۵ + \frac{۱}{۳} \times [-۵]\right]$ را به دست آورید.

پاسخ: $۲-۲۰ = ۱۸$

- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک کسر علامت‌دار بنویسید.

پاسخ: $-\left(\frac{۳}{۵}\right) = -\frac{۳}{۵}, \quad -\left(\frac{-۲۸}{-۳۵}\right) = \frac{-۲۸}{۳۵}, \quad -\left(\frac{-۲۸}{۳۵}\right) = \frac{-۲۸}{۳۵}$

- حاصل عبارت $\frac{a \div (b \div c)}{(a \div b) \div c} \div \frac{(a \div b) \div c}{a \div (b \div c)}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: $\frac{a \div (b \div c)}{(a \div b) \div c} \div \frac{(a \div b) \div c}{a \div (b \div c)} = c^2 \div \frac{1}{c^2} = c^4$



- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$0.5 - 0.85 = -0.35$$

$$-2.3 - 5.8 = -8.1$$

$$-3.01 + 75 = 71.99$$

$$4.02 - 7.25 - 16.29 = -19.52$$



- تساوی زیر را با نمایش بردار در روی محور اعداد مشخص کنید.



- عدد زیر را به صورت یک کسر علامت‌دار بنویسید.

$$-[-(\frac{-4}{-9})] = \frac{+4}{9}$$

- حاصلضرب دو عدد $\frac{-12}{35}$ است. اگر یکی از آن‌ها $\frac{+4}{7}$ باشد، عدد دیگر چند است؟

پاسخ: $\frac{+4}{7} \times x = \frac{-12}{35} \rightarrow x = \frac{2}{5}$

- مجموع دو عدد $\frac{-23}{48}$ است. اگر یکی از آن‌ها $\frac{-7}{24}$ باشد، عدد دیگر را حساب کنید.

پاسخ: $\frac{-7}{24} + x = \frac{-23}{48} \rightarrow x = \frac{+9}{48}$

- اگر از ۲۵ برابر عددی ۷- را کم کنیم عدد ۲۲- به دست می‌آید. آن عدد را حساب کنید.

پاسخ: $25x - (-7) = -22 \rightarrow x = \frac{-29}{25}$

- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\left(-4\frac{1}{15}\right) - \left(-3\frac{2}{5}\right) = -\frac{61}{15} + \frac{17}{5} = -\frac{61}{15} + \frac{51}{15} = \frac{-10}{15}$$

$$\frac{-3}{8} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{-9+1-24}{24} = \frac{-32}{24}$$

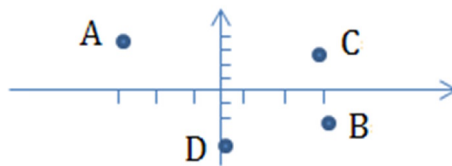
- قرینه و معکوس عدد $-8\frac{1}{4}$ را بنویسید.

قرینه: $\frac{-33}{4}$

معکوس: $\frac{-4}{33}$



- یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و نقاط $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ را روی آن مشخص کنید.



- با استفاده از شکل زیر مختصات نقاط A و B و مختصات بردار \overrightarrow{AB} را بنویسید و متناظر با آن یک جمع بنویسید.

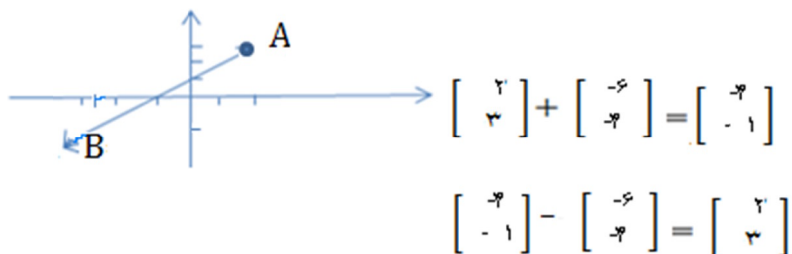


- حاصل جمع و تفریق زیر را به دست آورید.

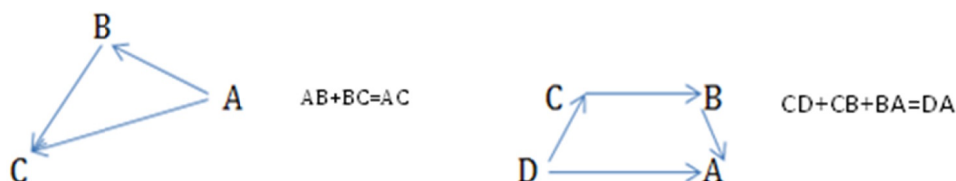
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ را روی یک دستگاه مختصات مشخص کنید و سپس بردار AB را رسم کنید و متناظر با آن یک جمع و یک تفریق بنویسید.



- با توجه به شکل‌های زیر یک تساوی جمع برداری بنویسید.



- دو بردار x و y که اندازه‌های برابر دارند، بر هم عمود نیستند. کدام دو بردار امکان دارد با هم زاویه قائمه بسازند؟

پاسخ: بردارهای $(x+y)$ $(x-y)$ امکان دارد با هم زاویه قائمه بسازند زیرا با توجه به فرمول زیر

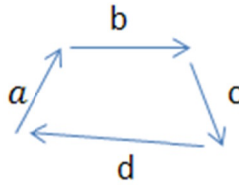
$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

مقدار $\cos \theta$ برابر صفر می‌شود و زاویه‌ای که $\cos \theta$ آن برابر صفر است برابر 90° درجه می‌باشد.

- در هریک از شکل‌های زیر بردار حاصل جمع دو بردار a و b را رسم کنید.



- مجموع بردارهای مقابل برابر کدام بردار است؟ بردار d



- اگر سه بردار a و b و c مساوی باشند و زاویه بین هر دوتای آن‌ها 120° درجه باشد $a+b+c$ برابر با چه چیزی است؟

پاسخ: برابر صفر است.

$$|a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2|a||b|\cos\theta + 2|a||c|\cos\theta + 2|b||c|\cos\theta = 0$$

- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$(-5) \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3 \\ 15 \\ -15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- اگر $a = \begin{bmatrix} -5 \\ +11 \end{bmatrix}$ باشد مختصات بردار $b=3a$ را به دست آورید. سپس مختصات بردار $a+b$ را پیدا کنید

پاسخ: $b=3a = 3 \times \begin{bmatrix} -5 \\ +11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ +33 \end{bmatrix}$

- اگر $a = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}$ باشد مختصات بردار $b=-15a$ را به دست آورید.

پاسخ: $b=-15a = -15 \times \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +9 \\ +3 \end{bmatrix}$

- در معادلات زیر x را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -9 \\ -16 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$x = \begin{bmatrix} -9 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$4x = \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$x = \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \end{bmatrix} \div 4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- مختصات $AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2j$ را به دست آورید.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2j = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{پاسخ:}$$

- در معادله زیر y را به دست آورید

$$7y = \begin{bmatrix} -21 \\ +35 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -21 \\ +35 \end{bmatrix} \div 7 = \begin{bmatrix} -3 \\ +5 \end{bmatrix} \quad \text{پاسخ:}$$

- اگر $a = 5i - 2j$ باشد و $b = -2a$ باشد، مختصات بردار $a + b$ را حساب کنید.

$$a + b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ +4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ +2 \end{bmatrix}, \quad b = -2 \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ +4 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{پاسخ:}$$



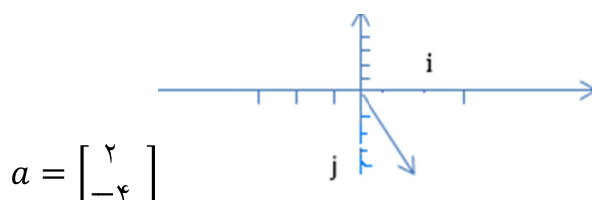
- بردارهای زیر را بر حسب i و j بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = -۲i - j, \quad b = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix} = -۵j, \quad c = \begin{bmatrix} -۹ \\ +۲ \end{bmatrix} = -۹i + ۲j$$

- مختصات هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.

$$a = ۵i - ۴j = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۴ \end{bmatrix}, \quad b = -۳j = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}, \quad c = -۸i - ۳j = \begin{bmatrix} -۸ \\ -۳ \end{bmatrix},$$

- بردار $a = ۲i - ۴j$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات آن را بنویسید.



- اگر $a = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $b = -۳i + ۶j$ باشد مختصات بردار $c = ۴a - ۲b$ را به دست آورید.

$$b = -۳i + ۶j = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \end{bmatrix}, \quad c = ۴ \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} - ۲ \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۲ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

- اگر $a = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۸ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ باشد و بردار $b = \frac{-۵}{۸}i + \frac{۳}{۱۵}j$ باشد مختصات بردار $a + b$ را به دست آورید

$$b = \begin{bmatrix} \frac{-۵}{۸} \\ \frac{۳}{۱۵} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad a + b = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۸ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-۵}{۸} \\ \frac{۳}{۱۵} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-۲۴}{۸} \\ \frac{۱۲۰}{۱۲۰} \\ \frac{-۲۰}{۱۲۰} \\ \frac{۶۰}{۱۲۰} \end{bmatrix}$$



- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$\frac{۲}{۷}x - \frac{۵}{۷}x = -\frac{۳}{۷}x$$

$$a - \frac{۹}{۴}a = -\frac{۵}{۴}a$$

$$۳a \times ۵ + (-۲a) \times ۴ = ۷a$$

$$۱۷x - ۳y - ۴y - ۲y + ۳y = ۱۷x - ۶y$$

$$۵(-۴x) + ۸(۳x) = ۴x$$

$$-۲a(۴a+b) - ۸a^۲ = -۱۶a^۲ + ۲ab$$

$$-۴a(۲a-۴b) - ۵(۲a-۳b) = -۸a^۲ + ۱۶ab - ۱۰a + ۱۵ab$$

- حاصل تفریق‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{r} ۲a(x - \frac{1}{۲}b + ۱) \\ -۳a(x + ۳b + ۴) \\ \hline -ax - ۱۰ab - ۱۰a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۳x - ۹a + ۴) \\ -۵(۲x + ۲a - ۱) \\ \hline -۷x - ۱۹a + ۹ \end{array}$$

- حاصل عبارت $x^۳[1 - (\frac{x}{y})^{-۳}]$ به ازای $x=۲$ و $y=-۲$ کدام است؟

$$۲^۳[1 - (\frac{۲}{-۲})^{-۳}] = ۱۶ \quad \text{پاسخ:}$$

- مقدار عددی هر عبارت جبری را به ازای مقادیر داده شده برای a و b به‌دست آورید.

$$a^۲ - b^۳ \quad a=-۴, b=-۲. \rightarrow a^۲ - b^۳ = ۱۶ - (-۸) = ۲۴$$

$$۱۵a - ۲۱b \quad a = \frac{-۲}{۵}, \quad b = \frac{۳}{۷}. \rightarrow ۱۵a - ۲۱b = -۶ - ۹ = -۱۵$$

$$\frac{x(x-y)}{x^۲-y^۲} \quad x=۲, y=۱. \rightarrow \frac{x(x-y)}{x^۲-y^۲} = \frac{۲}{۳}$$

- حاصل عبارت $-[-(-x)^{-۳}]$ به ازای $x = \frac{-۱}{۳}$ چیست؟

$$-[-(-\frac{-۱}{۳})^{-۳}] = \frac{۱}{۲۷} \quad \text{پاسخ:}$$

- عبارات زیر را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$۱۶xy - ۱۲x^2a = ۴x(۴y - ۳xa)$$

$$۴ba^2 + ۲۰ab^2 = ۴ab(a + ۵b)$$

$$۵ab + ۳abc = ab(۵ + ۳c)$$

$$۳a^2 + ۶ab^2 + ۱۸a^2b^2 = ۳a(a + ۲b^2 + ۶a^2b)$$

- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و جواب را ساده کنید.

$$(۲x)(۵x - y) = ۱۰x^2 - ۲xy$$

$$(۳y)(۲x + y) = ۶xy + ۳y^2$$

$$(a + ۵c)b = ab + ۵cb$$

$$(x - ۱)^3 = x^3 - ۳x^2 + ۳x - ۱$$

$$(x + ۲)(x + ۱) = x^2 + ۳x + ۲$$

$$(a + ۹)(a - ۹) = a^2 - ۸۱$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- حاصل عبارت $\frac{(1-a^{-2})a^2}{(\sqrt{a}-1)^2+2\sqrt{a}}$ را به دست آورید؟

$$\frac{(1-a^{-2})a^2}{(\sqrt{a}-1)^2+2\sqrt{a}} = \frac{a^2-a^{-2}}{a+1}$$

پاسخ:

- مساحت مستطیل زیر را به صورت عبارت جبری بنویسید.

$$s = (x - 1)(x + 1) = x^2 - ۱$$

پاسخ:

$(x + ۱)$



$(x - ۱)$

- دستور مساحت دایره و ذوزنقه را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

پاسخ: $s = \pi r^2$ دایره , $s = \frac{(a+b)h}{2}$ ذوزنقه

- به مجموعه عددهای زیر دقت کنید. در این دنباله عددی، عدد n ام را با یک عبارت جبری نشان دهید.

پاسخ: n^2

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$



- معادله‌های زیر را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادلات داده شده، x را در یک طرف و بقیه را در طرف دیگر قرار می‌دهیم.

$$x + 5 = 8 \rightarrow x = 3, \quad -9x - 5 = 13 \rightarrow x = -2$$

$$\frac{2}{5}x = 32 \rightarrow x = 80, \quad x + \frac{2}{5} = 8 \rightarrow x = \frac{38}{5}$$

$$-9y = 36 \rightarrow x = -4, \quad 5y + 3 = 3y + 43 \rightarrow y = 20$$

- معادله‌های زیر را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادلات داده شده، x را در یک طرف و بقیه را در طرف دیگر قرار می‌دهیم.

$$\frac{5}{7}x - \frac{1}{3} = \frac{4}{21} \rightarrow x = \frac{11}{3}$$

$$2x - \frac{3}{2} = 4 \rightarrow x = \frac{11}{4}$$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{x+1}{6} \rightarrow x = 11$$

- در معادله $\left(\frac{5}{13}\right)^{2x-11} = \left(\frac{13}{5}\right)^{11x-2}$ مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: عبارت سمت راست را معکوس می‌کنیم، بنابراین توان آن قرینه می‌شود:

$$\left(\frac{13}{5}\right)^{11x-2} = \left(\frac{13}{5}\right)^{-2x+11} \rightarrow 11x - 2 = -2x + 11 \rightarrow x = 1$$

- معادلات زیر را حل کنید.

پاسخ:

$$0.3x - 0.04 = 0.08x + 0.18 \rightarrow x = 1, \quad 7x + 2\left(\frac{-1}{3} - 7x\right) = 13 \rightarrow x = -2$$

- معادله‌های مقابل را حل کنید.

پاسخ:

$$\frac{2}{3} - 1x = 2x \rightarrow x = \frac{2}{9}, \quad 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

- جواب معادله $\frac{2x-3}{4} - 1 = \frac{x-5}{3}$ را به دست آورید.

پاسخ: کل عبارت را در ۱۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر ساده شود:

$$3(2x - 3) - 12 = 4(x - 5) \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



برای هریک از مسئله‌های زیر یک معادله بنویسید و سپس آن را حل کنید.

- از هفت برابر عددی ۳ تا کم کردیم، عدد ۱۸ به دست آمد. آن عدد چیست؟

$$7x - 3 = 18 \rightarrow x = 3$$

- شش برابر عددی به اضافه ۳ مساوی ۵۷ است. آن عدد چیست؟

$$6x + 3 = 57 \rightarrow x = 9$$

- محیط مستطیلی ۲۰۰ سانتی‌متر و طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. عرض مستطیل را حساب کنید.

$$2(10 + y) = 200 \rightarrow y = 90$$

- طول مستطیلی ۴ واحد بیشتر از عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۶۰ متر باشد، عرض مستطیل را حساب کنید.

$$x = 4 + y, \quad 2(x + y) = 60 \rightarrow y = 13$$

- مساحت متوازی الاضلاعی برابر با ۱۰۰ متر است. اگر قاعده آن ۵۰ متر باشد ارتفاع آن را حساب کنید.

$$S = a.h \rightarrow 100 = 50 \times h \rightarrow h = 2$$

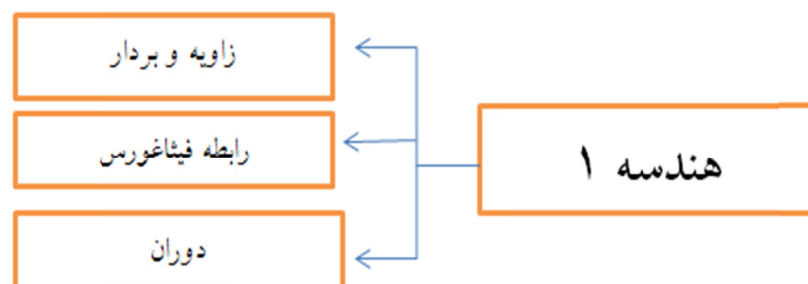
- محیط دایره‌ای ۵۰.۲۴ سانتی متر است. شعاع دایره را از طریق معادله به دست آورید.

$$P = \pi \times \text{قطر}$$

$$8 = 16 \div 2 = \text{شعاع} \rightarrow 16 = \frac{50.24}{3.14} = \text{قطر}$$

فصل سوم

هندسه ۱



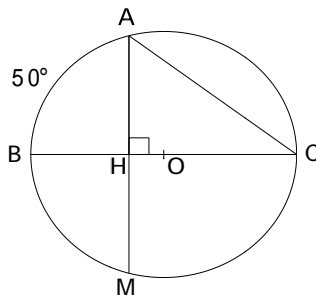
- با توجه به شکل، AM بر قطر BC عمود است. اندازه کمان و زاویه‌های خواسته شده را بنویسید.

پاسخ: c زاویه محاطی است لذا: $C = \frac{50}{2} = 25$ و چون زاویه داخلی هر مثلث 180 درجه است

$$90 + 25 = 115, 180 - 115 = 65 \rightarrow A$$

چون MC روبروی زاویه A است محاطی است پس:

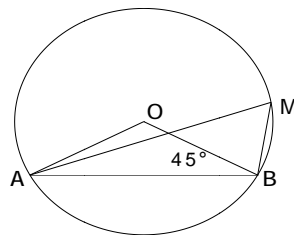
$$MC = 65 \times 2 = 130$$



- با توجه به شکل زیر اندازه زاویه محاطی M را تعیین کنید.

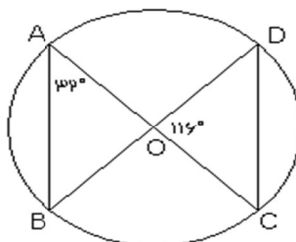
$$M = \frac{90}{2} = 45$$

پاسخ:



- با توجه به شکل زیر، اندازه زاویه‌های D ، C و B را تعیین کنید.

پاسخ:



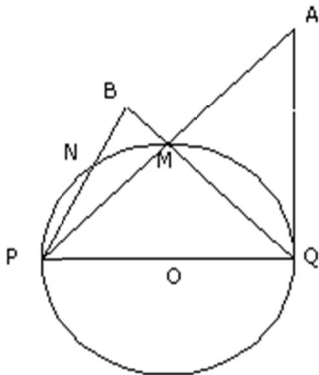
$$D = 32$$

$$C = 32$$

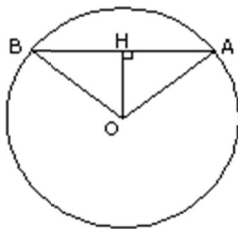
$$B = 32$$

- در دایره مقابل O مرکز دایره و AP و BQ یکدیگر را روی دایره قطع می کنند. اگر $A=60^\circ$ و $B=35^\circ$ باشند، اندازه کمان NP را حساب کنید. (AQ بر دایره مماس است).

پاسخ: $PN=10$



- در شکل زیر شعاع دایره برابر با ۱۰ سانتیمتر است و فاصله مرکز دایره تا وتر ۵ سانتیمتر است.

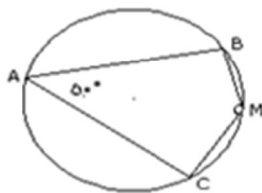


الف) طول وتر AB را حساب کنید.

ب) اندازه کمان AB را نیز را حساب کنید.

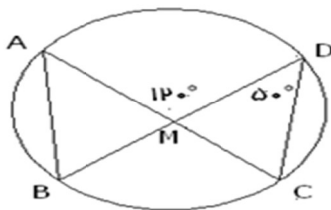
پاسخ: با استفاده از رابطه فیثاغورس $BH=\sqrt{75}$ لذا $AB=2\sqrt{75}$.

- با توجه به شکل، اندازه زاویه M را به دست آورید



$$M = 260 \div 2 = 130$$

- با توجه به شکل زیر اندازه کمانها و زاویه ها را بنویسید



$$A = 50^\circ$$

$$C = 70^\circ$$

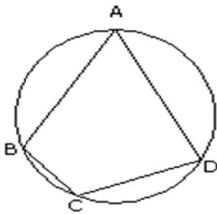
$$BC = 50 \times 2 = 100 \quad AD = 70 \times 2 = 140$$

- اندازه کمان مقابل به زاویه مرکزی ۴۵ درجه در دایره C با اندازه کمان مقابل به زاویه مرکزی ۳۰ درجه در دایره C برابر است. نسبت شعاع دایره C به C کدماست؟

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin 45/2}{\sin 15} \quad \text{پاسخ:}$$

- در شکل زیر، زاویه C سه برابر زاویه A است. زاویه A را به دست آورید.

$$A + D + B + C = 360 \rightarrow 4A + B + D = 360 \rightarrow A = 60 \quad \text{پاسخ:}$$



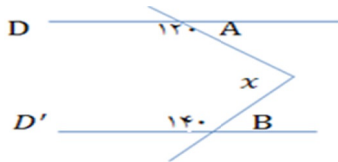
پاسخ:

- مربع یک چهارضلعی منتظم است.

- مثلث متساوی الاضلاع یک سه ضلعی منتظم است.

- در صورتی که دو خط D و D' موازی باشند، اندازه زاویه x چند درجه است؟

$$x = 40 + 60 = 100 \quad \text{پاسخ:} \quad 180 - 120 = 60, \quad 180 - 140 = 40$$

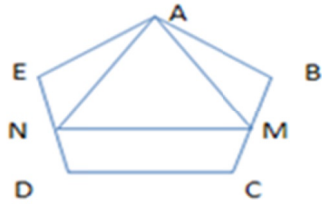


- اگر محیط دایره‌ای را به کمان‌های ۴۵ درجه تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم چه شکلی ایجاد می‌شود؟

$$\text{پاسخ:} \quad 360 \div 45 = 8 \quad \text{هشت ضلعی منتظم}$$

- در پنج ضلعی منتظم مقابل مثلث متساوی الاضلاعی محاط شده است. زاویه BMA چند درجه است؟ (EN=BM)

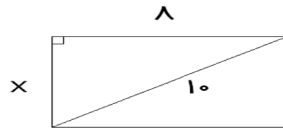
پاسخ: میدانیم مجموع زاویه های داخلی یک ۵ ضلعی ۵۴۰ درجه است لذا $۵۴۰ \div ۵ = ۱۰۸$



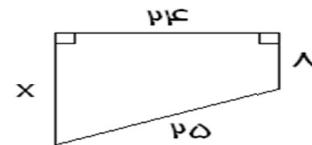
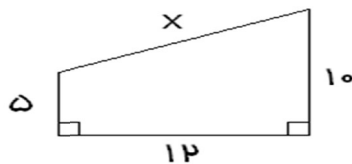
- در شکل زیر x چه عددی است؟

پاسخ: با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم

$$۱۰^2 = ۸^2 + x^2 \rightarrow x^2 = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \rightarrow x = ۶$$



- در شکل های زیر x را به دست آورید.



پاسخ: با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم

$$x^2 = ۱۲^2 + ۵^2 \rightarrow x^2 = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \rightarrow x = ۱۳,$$

$$۲۵^2 = ۲۴^2 + y^2 \rightarrow y^2 = ۶۲۵ - ۵۷۶ = ۴۹ \rightarrow y = ۷$$

- طول وتر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی به ساق $\sqrt{2}$ برابر با چه مقداری است؟

$$x^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \quad \text{پاسخ:}$$

- محیط یک لوزی به قطرهای ۸ و ۶ سانتی متر، چند سانتی متر است؟

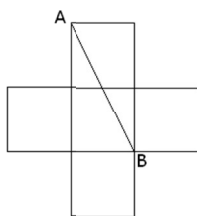
$$x^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5 \quad \text{پاسخ:}$$

لذا محیط لوزی برابر است با $5 \times 4 = 20$

- در شکل مقابل پنج مربع برابرند و $AB=10$. مساحت یک مربع چقدر است؟

پاسخ: طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$10^2 = x^2 + 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{100}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{100}{3}} \rightarrow s = \sqrt{\frac{100}{3}} \times \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{100}{3}$$



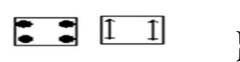
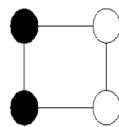
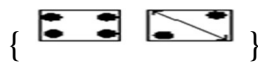
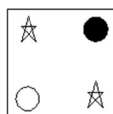
- نسبت اندازه طول یک مستطیل به عرض آن $\sqrt{3}$ است. اندازه قطر مستطیل چند برابر عرض آن است؟

پاسخ: $x = \sqrt{3}y \rightarrow d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d = 2y$ لذا رابطه قطر مستطیل و عرض آن به صورت زیر

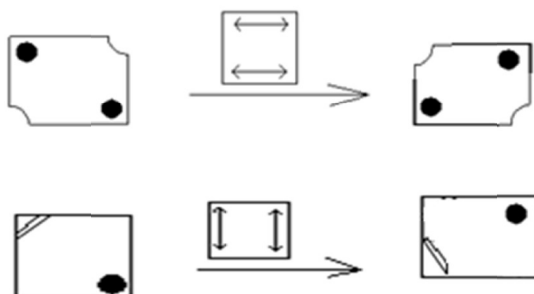
$$\frac{\text{قطر}}{\text{عرض}} = \frac{2y}{y} = 2 \quad \text{است.}$$



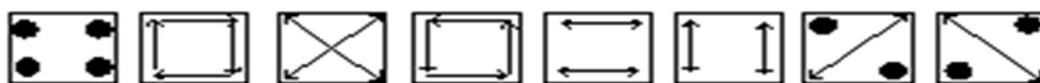
- در شکل های زیر، مجموعه دوران ها را مشخص کنید.





- شکل‌های زیر را دوران دهید.



- نام نمادهای دوران زیر را بنویسید.



از راست به چپ: ۱۸۰ درجه، ۱۸۰ درجه، ۱۸۰ درجه حول محور عمودی، ۱۸۰ درجه حول محور افقی، ۹۰ درجه یا پادساعتگرد، ۱۸۰ درجه مرکزی، ۹۰ درجه یا ساعتگرد، ثابت یا صفر درجه.

- شکلی رسم کنید که مجموعه دوران‌های آن به صورت زیر باشد. {   }



پاسخ:

- نمادهای مناسب دوران‌های زیر را رسم کنید:



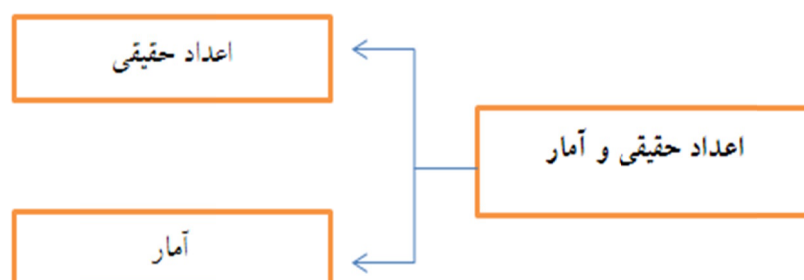
الف) ۱۸۰ درجه حول محور افقی



ب) صفر درجه

فصل چهارم

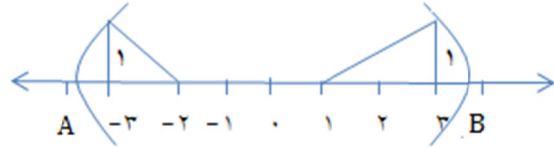
اعداد حقیقی و آمار



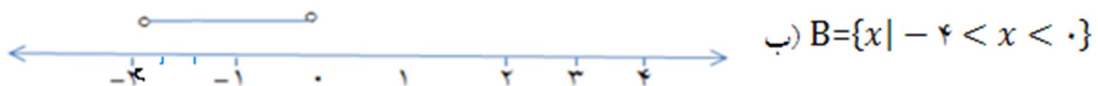
- با توجه به شکل زیر نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهند؟

پاسخ: $A \rightarrow x^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2} \rightarrow A = -2 - \sqrt{2}$

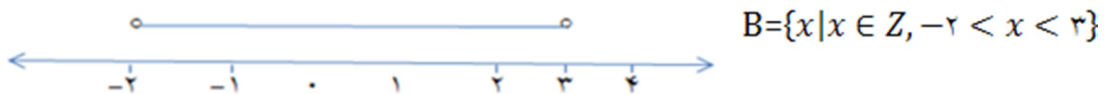
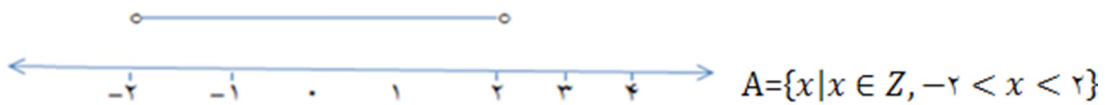
$B \rightarrow x^2 = 1^2 + 2^2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5} \rightarrow B = 1 + \sqrt{5}$



- هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.



- با توجه به محور، مجموعه‌های مشخص شده را بیان کنید.



- عدد $\sqrt{21}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: $5 < \sqrt{21} < 4 \rightarrow -4 < -\sqrt{21} < -5 \rightarrow -\sqrt{25} < -\sqrt{21} < -\sqrt{16}$

- آیا عدد $\sqrt{21}$ به مجموعه اعداد $\{x | x > 4\}$ تعلق دارد؟

پاسخ: بله تعلق دارد.

- عدد $1 - \frac{4\sqrt{2}}{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: با استفاده از ماشین حساب مقدار عدد داده شده برابر -1 بین صفر و منفی یک قرار دارد.

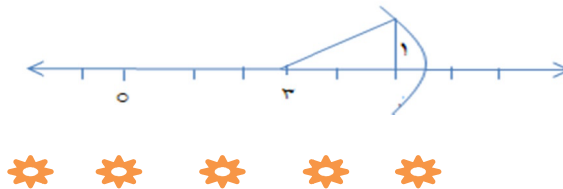
- کوچکترین عضو مجموعه $A = \{x^2 + 2^x | x \in N, x < 5\}$ را به دست آورید.

پاسخ: چون $x \in N, x < 5$ لذا $x = 2, 3, 4$ و لذا مقدار $x^2 + 2^x$ به ازای مقادیر $x = 2, 3, 4$ کمترین مقدار خود را در $x = 2$ که برابر -8 می باشد، دارد.

- عدد $\sqrt{3} + 4$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: مقدار عدد $\sqrt{3} + 4$ با استفاده از ماشین حساب برابر 5.7 است لذا عدد داده شده بین 5 و 6 قرار دارد.

- عدد $\sqrt{5} + 3$ را با رسم شکل روی محور نمایش دهید.



- محصول گندم یک مزرعه در سه سال گذشته 12 ، 15.5 ، 17.5 تن بوده است. میانگین محصول این مزرعه را در این سه سال به دست آورید.

پاسخ:
$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{17.5 + 15.5 + 12}{3} = 15$$

- میانگین 6 درس زهرا نمره 18 می باشد. مجموع نمرات او را به دست آورید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 18 = \frac{X}{6} \rightarrow X = 108$$

- اگر مجموع نمرات علی در 5 درس 90 باشد، میانگین نمرات او را حساب کنید

$$X = \frac{90}{5} = 18$$

- میانگین دو عدد ۱۶ می‌باشد. اگر یکی از اعداد برابر ۱۳ باشد، عدد دیگر را محاسبه کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 16 = \frac{X+13}{2} \rightarrow X = 19$$

- تعداد دانش‌آموزان یک کلاس ۵۰ نفر است. اگر مجموع نمرات درس ریاضیات این کلاس ۵۰ باشد میانگین نمرات کلاس چند است؟

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{50}{50} = 1$$

- میانگین نمره‌های ۳ درس ریاضی، علوم و عربی دانش‌آموزی ۱۷ است. اگر مجموع نمره‌های دو درس عربی و علوم ۳۲ باشد نمره ریاضی را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 17 = \frac{X}{3} \rightarrow X = 51 \rightarrow 51 - 32 = 19$$

- میانگین دو عدد ۳۲ است. اگر به یکی از این دو عدد ۱۲ واحد اضافه کنیم، میانگین جدید را به دست آورید

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 32 = \frac{X}{2} \rightarrow X = 64 \rightarrow 64 + 12 = 76 \rightarrow X = \frac{76}{2} = 38$$

- میانگین نمرات ۲۲ دانش‌آموز ۱۵.۵ است. مجموع نمرات آن‌ها را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 15.5 = \frac{X}{22} \rightarrow X = 341$$

- میانگین اعداد اول کوچکتر از ۲۰ را حساب کنید

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow X = \frac{77}{8} = 9.6$$

- میانگین ۳ درس علوم، ریاضی و عربی یک دانش‌آموز ۱۵ است. اگر نمرات علوم و ریاضی به ترتیب ۱۵ و ۱۶ باشند، نمره درس عربی را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 15 = \frac{X}{3} \rightarrow X = 15 \times 3 = 45, 15 + 16 = 31, 45 - 31 = 14$$

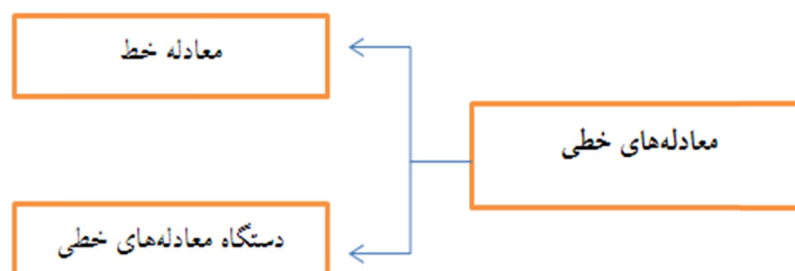
- میانگین ۵۰ عدد برابر ۳۸ است. اگر دو عدد ۴۵ و ۵۵ حذف شوند، میانگین اعداد باقیمانده را به دست آورید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \rightarrow 38 = \frac{X}{50} \rightarrow X = 1900, 55 + 45 = 100, 1900 - 100 = 1800$$

$$X = \frac{1800}{50} = 36$$

فصل پنجم

معادله‌های خطی



- مختصات نقطه‌ای از خط $y=5x$ را که طول آن ۲ باشد، پیدا کنید.

پاسخ: $y=5x \rightarrow y = 5 \times 2 = 10$

- مختصات نقطه‌ای از خط $y=3x$ را که عرض آن ۶ باشد، پیدا کنید.

پاسخ: $y=3x \rightarrow 6 = 3x \rightarrow x = 2$

- معادله خطی بنویسید که از مبدا مختصات و نقطه $A=[\begin{smallmatrix} 3 \\ -6 \end{smallmatrix}]$ بگذرد.

پاسخ: $Y=ax \rightarrow Y=-2x$, شیب $\frac{y}{x} = -2$

- معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}]$ و $B=[\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}]$ بگذرد.

پاسخ: چون عرض‌ها با هم برابرند لذا $y=4$

- معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}]$ و $B=[\begin{smallmatrix} 6 \\ 8 \end{smallmatrix}]$ بگذرد.

پاسخ: معادله خطی که از ۲ نقطه می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-4 = \frac{8-4}{6-3}(x-3)$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

- کدامیک از نقاط زیر روی خط $y = \frac{-2}{3}x$ قرار دارند؟. گزینه ۳

$$\begin{matrix} (1) & [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}] & (2) & [\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}] & (3) & [\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \end{smallmatrix}] \end{matrix}$$

- عدد b را طوری تعیین کنید که نقطه $A=[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]$ روی خط $y = \frac{3}{2}x + b$ واقع باشد.

پاسخ: $1 = \frac{3}{2} \times 2 + b \rightarrow b = -3$

- معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=[\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}]$ و $B=[\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}]$ بگذرد. $x = 5$

- کدامیک از نقاط زیر روی خط $y = -4x$ قرار دارند؟ گزینه ۱

(۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- عدد a را طوری تعیین کنید که نقطه $M = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $ax + 3y = 10$ قرار داشته باشد.

$$2a + 3 \times -3 = 10$$

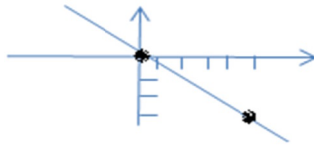
$$2a - 9 = 10$$

$$a = \frac{19}{2}$$



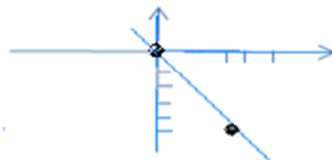
- خط $y = \frac{-3}{5}x$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود و یک بار به x عدد ۵ را می‌دهیم که y برابر -۳ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



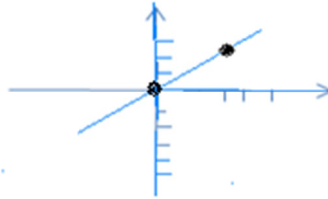
- خط $y = -5x$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود و یک بار به x عدد ۱ را می‌دهیم که y برابر -۵ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



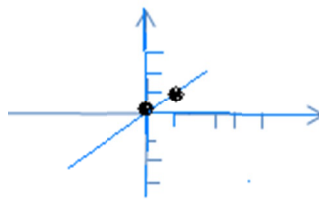
- خط $y - 3x = 0$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود و یک بار به x عدد ۱ را می‌دهیم که y برابر ۳ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



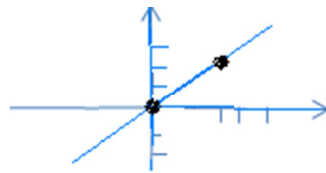
- خط $y - x = 0$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: ابتدا x را به سمت راست انتقال می‌دهیم. برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود و یک بار به x عدد ۱ را می‌دهیم که y برابر ۱ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



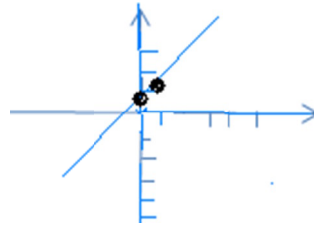
- خط $y = 6x$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم $y = 3x$. برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود و یک بار به x عدد ۱ را می‌دهیم که y برابر ۳ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



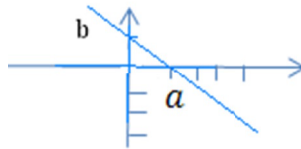
- خط به معادله $y - \frac{3}{4}x = 1$ را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم $y = \frac{3}{4}x + 1$. برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر ۱ می‌شود و یک بار به x عدد ۴ را می‌دهیم که y برابر $\frac{3}{4} \times 4 + 1 = 4$ می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.

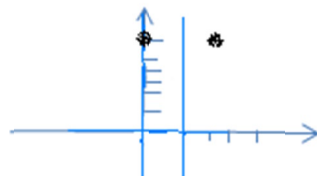


- شکل خط به معادله $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم $a x + y a = a b$. برای حل یکبار به x صفر می‌دهیم که y برابر b می‌شود و یک بار به x عدد a را می‌دهیم که y برابر صفر می‌شود سپس آن را روی محور رسم می‌کنیم.



- قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ نسبت به خط $x = 1$ را به دست آورید.



با توجه به شکل قرینه نقطه داده شده برابر است با $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

- اگر خط $x + y = 6$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه A قطع کند فاصله A تا مبدا مختصات را به دست آورید.

پاسخ: با حل دستگاه زیر نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید و فاصله نقطه داده شده تا مبدا به صورت زیر است:

$$x^2 = 2^2 + (-2)^2 \rightarrow x = \sqrt{8}, \quad \begin{cases} y = -x \\ x + y = 6 \end{cases}$$



- کدام یک از خطوط زیر موازیند؟ قسمت ج، زیرا شیب های آنها برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y = 3x - 3 \end{array} \right\} \text{ (ج) } \left. \begin{array}{l} y = -x + 5 \\ y = -x - 1 \end{array} \right\} \text{ (ب) } \left. \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = x - 3 \end{array} \right\} \text{ (الف)}$$

- معادله خطی بنویسید که شیب آن $\frac{-3}{5}$ باشد و از نقطه $[-2, 0]$ بگذرد.

پاسخ: معادله خطی که از ۲ نقطه می گذرد به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{-3}{5}(x - 0)$$

$$y = \frac{-3}{5}x + 2$$

- معادله خطی بنویسید که با خط $y = \frac{1}{3}x - 1$ موازی باشد و عرض از مبدا آن ۱+ باشد.

پاسخ:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

- معادله خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ گذشته و موازی با محور طول باشد چیست؟

پاسخ:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = 0(x - 2)$$

$$y = 8$$

- شیب خط $y = 3x - 5$ را به دست آورید.

پاسخ: کل عبارت را بر ۲ تقسیم می کنیم $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ لذا شیب برابر $\frac{3}{2}$ است.

- شیب خط $y + \frac{4}{5}x = 3$ را به دست آورید.

پاسخ: x و ضریب آن را به سمت راست انتقال می دهیم لذا شیب برابر $\frac{-4}{5}$ می شود.

- شیب و عرض از مبدا خط به معادله $3y - 4x = 24$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا x و ضریب آن را به سمت راست انتقال داده سپس کل عبارت را بر ۳ تقسیم می کنیم لذا شیب برابر $\frac{4}{3}$ می شود و عرض از مبدا برابر ۸ می شود.

- m را طوری تعیین کنید که دو خط $y_1 = 3 + (1 - m)x$ و $y_2 = -3x$ با هم موازی باشند.

پاسخ: $(1 - m) = -3 \rightarrow m = 4$

- شیب خط های $y=5$ و $x=-2$ را مشخص کنید.

پاسخ: شیب خط اول برابر صفر و شیب خط دوم برابر ۲- است.

- خط $(m - 1)x - ny = m$ از نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می گذرد و از نقطه $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ نمی گذرد. m و n دارای چه شرایطی هستند؟

پاسخ: چون خط داده شده از نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می گذرد پس نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ در معادله صدق می کند.

$$(m - 1)2 - n(1) = m \rightarrow m - n = 2$$

با توجه به رابطه فوق، $m=1$ ، $n=-1$ می تواند باشد.

- محل برخورد دو خط به معادله های $y = x + 2$ و $my = x + n$ روی محور x قرار دارد. n را به دست آورید؟

پاسخ: وقتی محل برخورد روی محور x ها باشد $y=0$ است لذا داریم: $x + n = x + 2 \rightarrow n = 2$

- آیا دو خط $y + 2x + 3 = 0$ و $2y - x + 4 = 0$ با خط $x - 2y = 10$ تشکیل یک مثلث می دهند؟ چرا؟

پاسخ: باید مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر باشد. ابتدا مقدار هر سه ضلع مثلث را محاسبه می‌کنیم با استفاده از حل دستگاه متوجه می‌شویم که چون مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر نیست لذا تشکیل مثلث نمی‌دهند.

- شیب خط به معادله $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{5}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم سپس عبارت را ساده کرده، y را تنها در سمت چپ می‌نویسیم

$$5x + 15 = 2y + 8 \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} \rightarrow m = \frac{5}{2}$$



- دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادلات داده شده ابتدا x و y را باهم در یک طرف و بقیه را در طرف دیگر قرار می‌دهیم.

اگر عبارات داده شده کسری بود ابتدا مخرج کسر را ساده کرده سپس دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 12y = -45 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{-45}{14} \rightarrow x = \frac{-110}{14}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x = 5y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = 14 \\ -8x - 20y = -28 \end{cases}$$

$$y = 1 \rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = \frac{2}{6} \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$y = \frac{26}{28} \rightarrow x = \frac{94}{28}$$

$$\begin{cases} x + 3(1 - y) = 0 \\ -2(6 - x) + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 - 3y = 0 \\ -12 + 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$x = 3 \rightarrow y = -2$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -x - 2y + 12 = 0 \\ -3x = 5y - 33 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4 \\ 2(2x - y) = 4(y - x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - \frac{2}{3}x \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \\ \hline \begin{cases} 3x + 6y = 36 \\ -3x - 5y = -33 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 48 \\ 4x + 4x - 2y - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \\ \hline y=3 \rightarrow x=6 \quad y=8 \rightarrow x=6 \quad x=3 \rightarrow y=0 \end{array}$$

- حاصل جمع دو عدد $\frac{5}{6}$ و اختلاف آن دو عدد $\frac{1}{6}$ است. هر یک از آن دو عدد را به دست آورید.

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{پاسخ:}$$

$$2x = \frac{10}{6} \rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$y = -\frac{13}{6}$$

- اختلاف طول و عرض مستطیلی ۷ متر و محیط آن ۳۴ متر است. مساحت مستطیل را حساب کنید.

پاسخ: با حل دستگاه زیر مقادیر طول و عرض به دست می آیند.

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + 2y = 34 \end{cases}$$

$$x = 12 \rightarrow y = 12 - 7 = 5 \rightarrow S = 5 \times 12 = 60$$

- لاله به دوستش گفت که سن پدرش هنگام تولد او ۲۴ سال بوده است. حالا سن پدرش ۳ برابر سن اوست. لاله حالا چند سال دارد؟

پاسخ: با حل دستگاه زیر سن لاله و پدرش به دست می آیند.

$$\begin{cases} y = x + 24 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$x = 12 \rightarrow y = 3 \times 12 = 36$$

- دو زاویه متمم‌اند و اندازه یکی ۳ برابر دیگری است. اندازه هریک از این زاویه‌ها را پیدا کنید

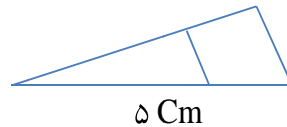
$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x = 3y \end{cases} \quad \rightarrow y = \frac{90}{4}, \quad x = 67.5$$

فصل ششم

هندسه ۲



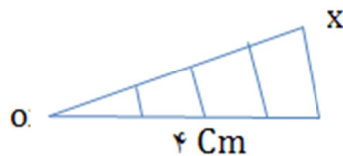
- پاره خطی به اندازه ۵ سانتی متر رسم نموده و آن را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کنید.



پاسخ: $3+2=5$ ،

- با استفاده از خاصیت خطوط موازی، پاره خط AB را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید.

پاسخ: ابتدا خطی به اندازه ۴ سانتی متر رسم کرده سپس خط دلخواه OX را رسم می کنیم و روی آن پاره خطهای یک سانتی متری جدا می کنیم. از آخرین نقطه به خط OA وصل کرده ، سایر خطوط را نیز به ترتیب ارائه شده، رسم می کنیم.

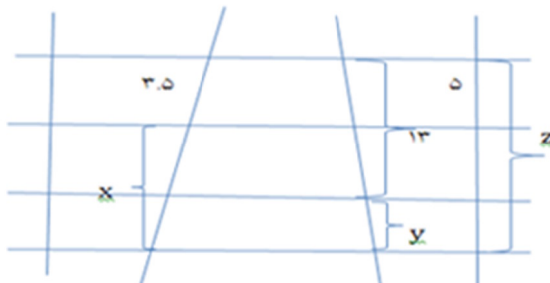


- اگر بخواهید پاره خطی را به نسبت $\frac{1}{2}$ ، ۱ و ۲ تقسیم کنید می توانید پاره خط را به چند قسمت متساوی تقسیم کنید؟

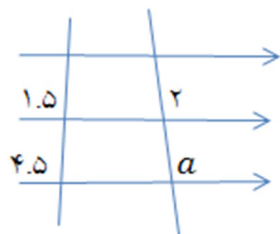
پاسخ: $2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \div 3 = \frac{7}{6}$

- مقدار x و y و z را در شکل زیر پیدا کنید.

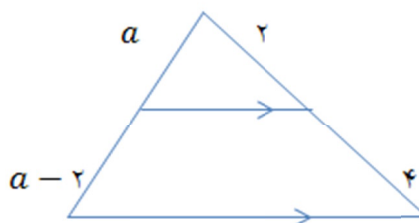
پاسخ: $x = 3.5 \times 2 = 7$, $y = \frac{12}{3} = 4$, $z = 3 \times 5 = 15$



- در شکل های زیر a چه عددی است؟



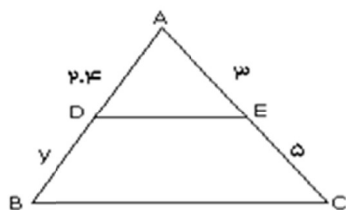
$$\frac{1.5}{4.5} = \frac{2}{a} \rightarrow a = 6$$



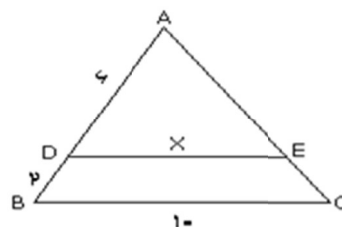
$$\frac{a}{a-2} = \frac{2}{4} \rightarrow a = -2$$



- در هر شکل DE موازی BC رسم شده است. مقادیر x و y را به دست آورید..

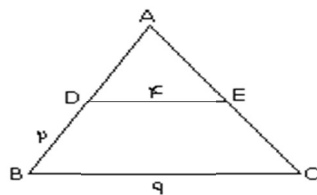


$$\frac{2.4}{y} = \frac{3}{5} \rightarrow y = 4$$



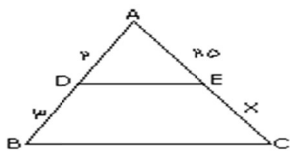
$$\frac{6}{8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{60}{8}$$

- در شکل مقابل DE موازی BC رسم شده است. اندازه AD چند است؟

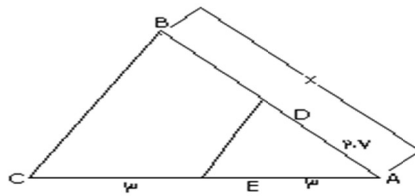


$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{4}{9} \rightarrow AD = \frac{4}{5}$$

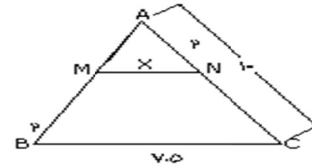
- در شکل های زیر x را به دست آورید.



$$\frac{2}{3} = \frac{2.5}{x} \rightarrow x = 3.75$$



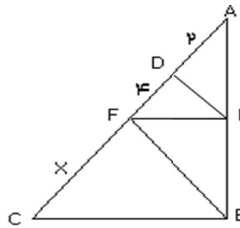
$$\frac{2.7}{x} = \frac{3}{6} \rightarrow x = 5.4$$



$$\frac{2}{10} = \frac{x}{7.5} \rightarrow x = 1.5$$

پاسخ :

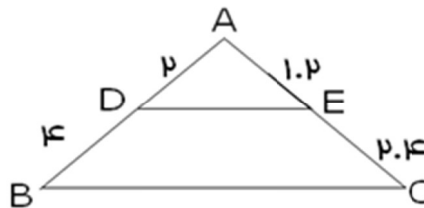
- در شکل زیر $AD=2$, $FD=4$, $FB \parallel DE$ و $BC \parallel EF$ است. طول FC چقدر است؟



$$\frac{2}{4} = \frac{6}{FC} \rightarrow FC = 12$$

پاسخ:

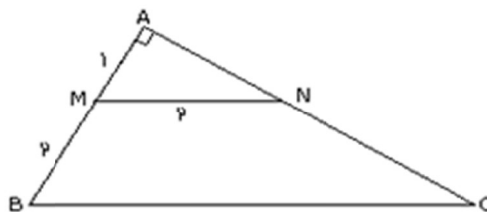
- آیا در شکل زیر DE با BC موازی است؟ چرا؟



$$\frac{2}{4} = \frac{1.2}{2.4} \rightarrow 4.8 = 4.8$$

پاسخ :

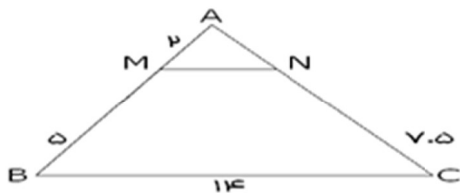
- در شکل زیر $BC \parallel MN$ است. با توجه به اطلاعات داده شده، مساحت مثلث ABC کدامست؟ ($A=90^\circ$)



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

پاسخ :

- در شکل زیر MN با BC موازی است. اندازه MN را به دست آورید.

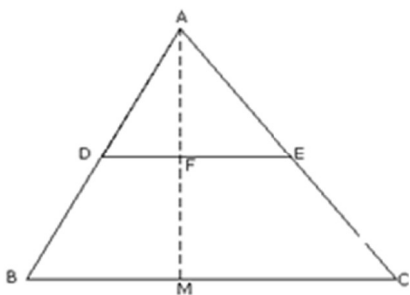


$$\frac{2}{5} = \frac{x}{14} \rightarrow x = 4$$

پاسخ :

- در شکل زیر، D وسط ضلع AB و E وسط ضلع AC است. نسبت $\frac{AF}{FM}$ چقدر است؟

نسبت $\frac{AF}{AM}$ چقدر است؟



$$\frac{1}{1} = \frac{AF}{FM} \rightarrow \frac{AF}{FM} = 1 \quad \frac{AF}{AM} = \frac{1}{2}$$

پاسخ :

- در شکل زیر مقدار x و y را به دست آورید.



$$\frac{3}{8} = \frac{x}{12} \rightarrow x = \frac{36}{8}$$

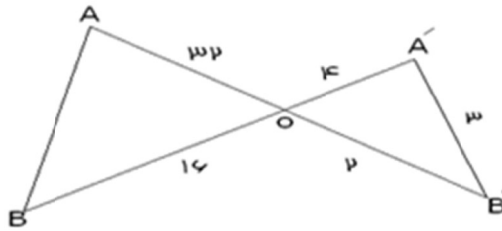


$$\frac{2}{5} = \frac{3}{y} \rightarrow y = \frac{15}{2}$$

پاسخ :



- ثابت کنید دو مثلث OAB و $OA'B'$ متشابهند. سپس اندازه ضلع AB را حساب کنید.

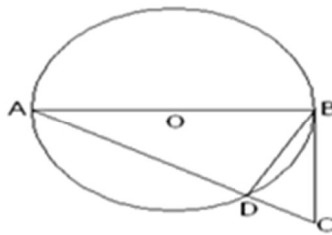


پاسخ : دو مثلث بنا به حالت تناسب سه ضلع با هم متشابهند.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$$

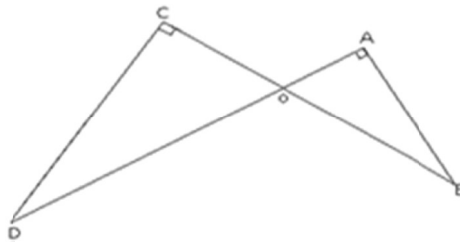
$$\frac{x}{3} = \frac{32}{4} \rightarrow x = 24$$

- در شکل زیر نقطه O مرکز دایره و BC بر دایره مماس است. چرا دو مثلث ABC و ABD متشابهند؟



پاسخ : $ABD \sim ABC$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} B=D=90^\circ \\ A=\text{مشتک} \end{cases}$

- در شکل زیر چرا دو مثلث OAB و OCD متشابهند؟ تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید.



پاسخ : $OAB \sim OCD$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} A=C=90^\circ \\ O_1=O_2 \end{cases}$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB}$$

- در شکل زیر HA ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. چرا دو مثلث AHB و ABC متشابهند؟

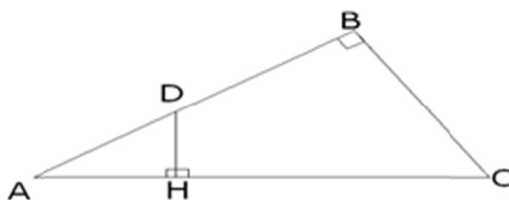


پاسخ : $ABC \sim AHB$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} A=H=90^\circ \\ B=B \end{cases}$

ب) با توجه به شکل، تناسب زیر را کامل کنید.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

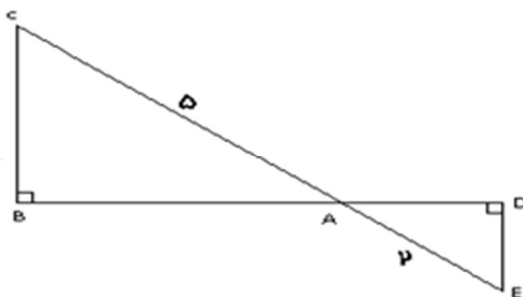
- در شکل زیر چرا دو مثلث ABC و AHD متشابهند؟ تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید.



پاسخ : $AHD \sim ABC$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} D=H=90^\circ \\ A=A \end{cases}$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{HD} = \frac{AB}{AH}$$

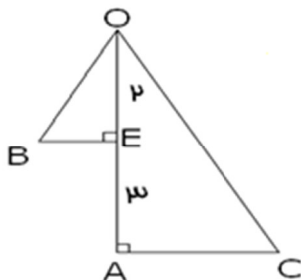
- با توجه به شکل چرا دو مثلث ABC و AED متشابهند؟



پاسخ : $AED \sim ABC$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} A_1=A_2 \\ D=B \end{cases}$

ب) نسبت تشابه این دو مثلث چقدر است؟ $\frac{5}{2}$

- در شکل زیر ثابت کنید دو مثلث AOC و BOE متشابهند.



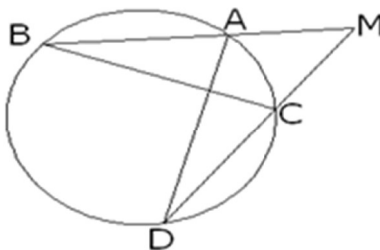
پاسخ : $\xrightarrow{\text{بنا به حالت دوزاویه}} \begin{cases} A=E \\ O_1=O_2 \end{cases} \rightarrow BOE \sim AOC$

ب) تناسب بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.

$$\frac{OE}{OA} = \frac{BE}{AC} = \frac{OB}{OC}$$

ج) نسبت تشابه دو مثلث چقدر است؟ $\frac{2}{5}$

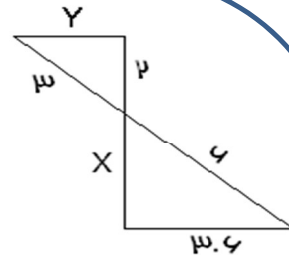
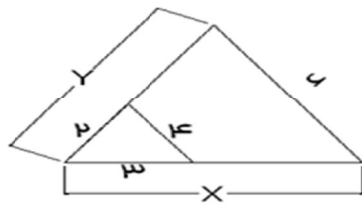
- در شکل زیر چرا دو مثلث MBC و MAD متشابهند؟ تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید.



پاسخ : $\xrightarrow{\text{بنا به حالت دوزاویه}} \begin{cases} M=M \\ B=D \end{cases} \rightarrow MAD \sim MBC$

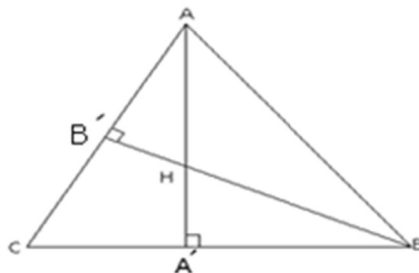
$$\frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC} = \frac{MD}{MB}$$

- در شکل زیر پاره‌خطهای مجهول را حساب کنید.



پاسخ: $\frac{Y}{X} = \frac{3}{6} = \frac{4}{6} \rightarrow Y = 3, X = \frac{18}{4}$, $\frac{Y}{X} = \frac{3}{6} = \frac{Y}{3.6} \rightarrow Y = 1.8, X = 4$

- در شکل زیر AA' و BB' دو ارتفاع مثلث ABC هستند. دلیل تشابه مثلث‌های AHB' و BHA' را بنویسید. تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید



پاسخ : $AHB' \sim BHA'$ بنا به حالت دوزاویه $\begin{cases} B' = A' = 90^\circ \\ H_1 = H_2 \end{cases}$

$$\frac{AB'}{BA'} = \frac{HB'}{HA'} = \frac{AH}{BH}$$

- اگر نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{4}$ باشد، نسبت مساحت آن‌ها چقدر است؟ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = K^2 =$ نسبت مساحتها



- مساحت قاعده هرمی ۱۲ و ارتفاع آن ۱۰ است، حجم این هرم را حساب کنید.

پاسخ : $\text{حجم} = \frac{1}{3} \times 12 \times 10 = 40$

- قاعده هرمی، یک مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۴ سانتی‌متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۰ سانتی‌متر باشد حجم هرم را حساب کنید.

پاسخ : $۱۶۰ = ۱۰ \times ۱۲ \times ۴ \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم}$

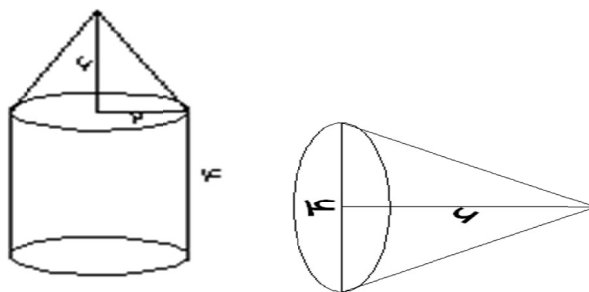
- قاعده هرمی، یک لوزی به قطرهای ۳ و ۹ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی متر باشد حجم هرم را حساب کنید.

پاسخ : $\frac{۱۳۵}{۶} = ۵ \times \frac{۳ \times ۹}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم}$

- مثلث قائم الزاویه ای که اضلاع زاویه قائمه آن ۶ و ۹ سانتی متر است را حول ضلع ۶ سانتی متری دوران می دهیم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.

پاسخ : $۱۰۸\pi = ۹ \times \pi \times ۶ \times ۶ \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم}$

- حجم شکل های زیر را حساب کنید.



پاسخ : $۳۲\pi = ۶ \times \pi \times ۴ \times ۴ \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم مخروط}$

$\frac{۸۰\pi}{۳} = ۶ \times \pi \times ۲ \times \frac{۱}{۳} + ۴ \times \pi \times ۲ \times ۲ = \text{حجم استوانه} + \text{حجم مخروط} = \text{حجم کل شکل}$

- استخری به ابعاد ۲۰، ۸ و ۴ است. در صورتیکه $\frac{۳}{۴}$ این استخر آب داشته باشد چند لیتر دیگر باید به آب استخر اضافه کنیم تا کاملاً پر شود؟

پاسخ : $۱۶۰ = ۶۴۰ - ۴۸۰ \rightarrow ۴۸۰ = \frac{۳}{۴} \times ۶۴۰, ۶۴۰ = ۴ \times ۸ \times ۲۰ = \text{حجم کل استخر}$

۱۶۰ لیتر دیگر باید آب اضافه کنیم.

- قاعده یک هرم، مربعی به ضلع ۵ سانتی متر است. اگر حجم هرم ۱۲۰ سانتی متر مکعب باشد، ارتفاع هرم را حساب کنید.

پاسخ : $120 = \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times h \rightarrow h = 120 \div \frac{25}{3} = 14.4$

- دایره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر را حول قطر آن دوران می‌دهیم. حجم و مساحت شکل را به‌دست آورید.

پاسخ : $\frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi$ ، $10 \div 2 = 5$ ، حجم کره

$4\pi 5^2 = 100\pi$: مساحت کره

- اگر شعاع قاعده یک مخروط را دو برابر کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

پاسخ : $\frac{\frac{4}{3} \times \pi r^2 h}{\frac{4}{3} \times \pi r^2 h} = 4$ $\rightarrow \frac{4}{3} \times \pi r^2 h =$ حجم مخروط دوم ، $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h =$ حجم مخروط

- شعاع نیمکره‌ای ۵ سانتی‌متر است. حجم آن را به‌دست آورید.

پاسخ : $\frac{400}{3} \pi = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3$: حجم کره ، $10 = 5 \times 2$ شعاع کره

- مساحت کره‌ای ۵۰۰ سانتی‌متر مربع است. حجم کره را به‌دست آورید.

پاسخ : $500 = 4 \times \pi \times r^2 \rightarrow r^2 = \frac{500}{12.56} = 39.80$

- حجم یک مخروط ۶۰ سانتی‌متر مکعب است. اگر ارتفاع این مخروط ۱۰ سانتی‌متر باشد شعاع قاعده آن

را حساب کنید.

پاسخ : $60 = 10.46 r^2 \rightarrow r^2 = 5.7 \rightarrow r = 2.3$ $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h =$ حجم مخروط

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.