مبانی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

و. ا. گرانویل پ. ف. اسمیت و. ر. ولنگلی

ترجمهٔ محمود آق اولی

استاد دانشگاه تهران

کتابفروشی

دهخدا

شاهرضا مقابل دانشگاه

تلفن ۶۶۰۱۸۵

مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال

تألیف

و. ا. گرانویل ـ پ. ف. اسمیت ـ و. ز. لانگلی

ترجمهٔ

دکتر محمود آق اولی
استاد دانشگاه تهران

تهران ، ۱۳۵۳

This is an authorized Persian translation of
ELEMENTS OF THE DIFFRENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS
New Revised Edition by William Anthony Granville,
Percy F. Smith and William-Raymond Longley.

Originally published by Ginn and Company, New York.

Tehran, 1974

چاپ اول : ۱۳۴۵
چاپ دوم : ۱۳۴۸
چاپ سوم : ۱۳۵۳

انتشارات دهخدا

خیابان شاهرضا ، روبروی دانشگاه

با همکاری مؤسسه انتشارات فرانکلین

این کتاب در سه هزار نسخه در چاپخانهٔ زیبا به چاپ رسید

شمارهٔ ثبت در دفتر کتابخانه ملی : ۱۵۰۴ به تاریخ : ۱۳۵۳/۱۱/۱

مقدمهٔ مترجم

متجاوز از نیم قرن است که کتاب «مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال» تألیف ویلیام آنتنی گرانویل وپرسی ف . اسمیت مأخذ مطمئنی برای موفقیت دانشجویان بسیاری از رشته های علوم منجمله ریاضی ، فیزیک و مهندسی بوده است . در هرفصل این کتاب موضوع معینی مورد مطالعه قرار گرفته و نتیجهٔ عملی هرشماره به صورت یک «دستورالعمل» خلاصه شده است. برای درک وفهم بهتر مطالب کتاب به دنبال هرمطلب یک یاچند مثال دقیقاً حل شده است. در پایان هرشماره و فصل نیز تمرینهای متعدد و فراوانی افزوده گردیده است تا خواننده بتواند هم تسلط خویش را برمبانی حساب دیفرانسیل وانتگرال بیفزاید و هم خودرا بیازماید .

کتاب «مبانی حساب دیفرانسیل وانتگرال» تا سال ۱۹۵۷ چندین بار مورد تجدید نظر قرار گرفته و مکرر تجدید چاپ شده است و تنها ترجمهٔ فرانسوی آن متجاوز از چهارده بار به طبع رسیده است .

پروفسور ویلیام ریمند لانگلی همکاراستادان فقید ، گرانویل و اسمیت ، پس از تجدید نظر کامل متن کتاب و افزودن فصل «توابع هذلولی» و استفاده از مختصات استوانه‌ای و کروی برای حل بسیاری از مسائل ، این کتاب را در سال ۱۹۵۷ تجدید چاپ کرده است.

ترجمهٔ حاضر از روی متن آمریکایی چاپ سال ۱۹۶۲ به زبان فارسی برگردانده شده و با ترجمهٔ فرانسوی آن تطبیق گردیده است و چون واحدهای آمریکایی با سیستم متریک یکی نیست ، اعداد بعضی از مسائل از ترجمهٔ فرانسوی گرفته شده است . روشن است که این ترجمه خالی از نقص نیست . مترجم از همکاران گرامی و ارجمندی که این کتاب را ازنظر میگذرانند و از دانشجویان عزیزی که آن را مطالعه میکنند توقع دارد اگر به نقایصی برخوردند ، با یادآوری آن اورا مرهون مراحم خود فرمایند.

محمود آقاولی

فهرست

حساب دیفرانسیل

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل نهم

فصل دهم

فصل یازدهم

حساب انتگرال

فصل شانزدهم

فصل هفدهم

فصل هجدهم

حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل نوزدهم

فصل بیستم

فصل بیست و یکم

فصل بیست و دوم

فصل بیست و سوم

فصل بیست‌وچهارم

فصل بیست‌وپنجم

فصل بیست‌وششم

فصل بیست‌وهفتم

حساب ديفرانسيل

فصل اول

یادآوری چند دستور

۱- دستورهایی از جبر و هندسهٔ مقدماتی. - به منظور کمک به خوانندگان، درشماره‌های ۱ تا ۴، به یاد آوری چند دستور می‌پردازیم. با جبر شروع می‌کنیم.

(۱) معادلهٔ درجهٔ دوم $Ax^۲+Bx+C=۰$

را می‌توانیم به‌سه راه حل کنیم. **الف**: سه جملهٔ درجهٔ دوم را به‌حاصل‌ضرب دوعامل تجزیه نماییم، هرعامل را برابر صفر قرار دهیم و اندازهٔ x را از هریک از آنها بدست آوریم. **ب**: C را به طرف راست معادله ببریم، دو طرف معادله رابه ضریب $x^۲$ تقسیم کنیم، به دو طرف معادله مجذور نیمهٔ ضریب x را بیفزاییم و از دو طرف معادلهٔ اخیر جذر بگیریم. **پ**: ریشه های معادله را با استفاده از دستور زیرمستقیماً بدست آوریم:

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^۲-۴AC}}{۲A}$$

جنس ریشه‌ها. دردستوراخیر، عبارت $B^۲-۴AC$ راکه درزیررادیکال قراردارد مبین معادله می‌نامند. اگرمبین مثبت باشد، دوریشهٔ معادله حقیقی ومتمایزازیکدیگرند. اگر مبین صفر باشد، دو ریشهٔ معادله حقیقی و برابرند و اگر مبین منفی باشد، دو ریشهٔ معادله موهومی است.

(۲) لگاریتم

$$\log ab=\log a+\log b\ ,\qquad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$

$$\log a^n=n\log a\qquad ,\qquad \log\sqrt[n]{a}=\frac{۱}{n}\log a$$

$$\log ۱=۰\qquad ,\qquad \log_a a=۱$$

(۳) دستور دو جمله‌ای نیوتن (n عددی صحیح و مثبت است)

$$(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-۱}\,b+\frac{n(n-۱)}{۲!}a^{n-۲}\,b^۲$$

$$+\frac{n(n-۱)\,(n-۲)}{۳!}a^{n-۳}\,b^۳+\cdots$$

$$+\frac{n(n-۱)\,(n-۲)\ldots(n-r+۱)}{r!}a^{n-r}\,b^r+\cdots$$

(٤) فاکتوریل n $n! = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times \cdots (n-١)n$

در دستورهای زیر r یا R شعاع ، a ارتفاع ، B سطح قاعده و s یال جسم است.

(٥) محیط دایره$=٢\pi r$ ، مساحت دایره$=\pi r^٢$

(٦) مساحت قطاع دایره$=\frac{١}{٢} r^٢ \alpha$

دردستور اخیر α زاویهٔ مرکزی قطاع است وبرحسب رادیان اندازه گرفته شده است .

(٧) حجم منشور$=Ba$

(٨) حجم هرم$=\frac{١}{٣} Ba$

(٩) حجم استوانهٔ دوار$=\pi r^٢ a$

مساحت سطح جانبی استوانهٔ دوار$=٢\pi ra$

مساحت سطح کل استوانهٔ دوار$=٢\pi r(r+a)$

(١٠) حجم مخروط دوار$=\frac{١}{٣}\pi r^٢ a$

مساحت سطح جانبی مخروط دوار$=\pi rs$

مساحت سطح کل مخروط دوار$=\pi r(r+s)$

(١١) مساحت کره$=٤\pi r^٢$ ، حجم کره$=\frac{٤}{٣}\pi r^٣$

(١٢) حجم مخروط ناقص دوار$=\frac{١}{٣}\pi a(R^٢+r^٢+Rr)$

مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوار$=\pi s(R+r)$

٢- دستورهایی از مثلثات مسطحه.

(١) اندازه گیری زاویه‌ها معمولاً با دویکهٔ زیر انجام می‌شود :

درجه که $\frac{١}{٣٦٠}$ یک دوران کامل است ،

رادیان که طول قوس درونیش برابرشعاع آن قوس است .

معادله‌ای که رابطهٔ بین این دو یکه را می‌دهد عبارتست از :

رادیان π = ۱۸۰ درجه $\qquad$ (π = ۳ر۱۴۱۵۹ ...)

واز آنجا $\qquad$ رادیان ... ۰ر۰۱۷۴ = $\frac{\pi}{180}$ = یک درجه

و $\qquad$ درجه ... ۵۷ر۲۹ = $\frac{180}{\pi}$ = یک‌رادیان

بنابرتعریف بالا می‌توان نوشت :

اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان = $\frac{\text{طول قوس درون زاویه}}{\text{طول شعاع قوس}}$

این معادلات اندازهٔ زاویه‌ای‌راکه‌برحسب‌یکی ازاین دویکه معلوم است ، برحسب یکهٔ دیگر بدست می‌دهند.

(۲) روابط اساسی

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{tg\,x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad cosec\,x = \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + tg^2 x = \sec^2 x \quad , \quad 1 + cotg^2 x = cosec^2 x$$

(۳) چند دستور برای ساده‌کردن توابع مثلثاتی

زاویه	سینوس	کسینوس	تانژانت	کتانژانت	سکانت	کسکانت
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-tg\,x$	$-cotg\,x$	$\sec x$	$-cosec\,x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$cotg\,x$	$tg\,x$	$cosec\,x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-cotg\,x$	$-tg\,x$	$-cosec\,x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-tg\,x$	$-cotg\,x$	$-\sec x$	$cosec\,x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$tg\,x$	$cotg\,x$	$-\sec x$	$-cosec\,x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$cotg\,x$	$tg\,x$	$-cosec\,x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-cotg\,x$	$-tg\,x$	$cosec\,x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-tg\,x$	$-cotg\,x$	$\sec x$	$-cosec\,x$

(٤) توابع مثلثاتی $(x+y)$ و $(x-y)$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y}$$

$$tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x\,tg\,y}$$

(٥) توابع مثلثاتی $2x$ و $\frac{x}{2}$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \quad , \quad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad , \quad tg\,2x=\frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad , \quad tg\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x \quad , \quad \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

(٦) دستورهای جمع

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

(۷) درهر مثلث روابط زیر برقرار است :

قانون سینوسها
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

قانون کسینوسها
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

مساحت مثلث
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \left[p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right]$$

۳ ـ دستورهایی از هندسهٔ تحلیلی مسطحه. ـ دستورهای مهم هندسهٔ تحلیلی مسطحه عبارتنداز :

(۱) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

شیب خط P_1P_2
$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

مختصات نقطهٔ وسط پاره خط P_1P_2

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

(۲) زاویهٔ بین دوخط
$$tg\,\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

(اگر دو خط باهم موازی باشند ، $m_1=m_2$ و اگر دو خط بیکدیگر عمود باشند ، $m_1m_2=-1$ است.)

(۳) معادلهٔ خط راست

اگر ضریب زاویه و مختصات یک نقطه از خط دردست باشد :

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

اگر ضریب زاویه و عرض از مبدأ خط دردست باشد : $y=mx+b$

اگر مختصات دونقطه از خط در دست باشد :
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

اگر خط راست محور Ox را در نقطه‌ای به طول a و محور Oy را در نقطه‌ای به عرض b قطع کند :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(٤) **فاصلهٔ نقطهٔ** $P_1(x_1\,,\,y_1)$ از خط $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

(٥) رابطه‌های بین مختصات قائم و قطبی

$$x=\rho\cos\theta \qquad , \quad y=\rho\sin\theta$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta=arc\,tg\,\frac{y}{x}$$

(٦) **معادلهٔ دایره‌ای** که مختصات مرکز آن $(h\,,\,k)$ و شعاع آن r است :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

(٧) **معادلهٔ سهمی** که رأس آن مبدأ مختصات ، محور آن محور x ها و مختصات کانون آن $\left(\frac{p}{2}\,,\,0\right)$ است :

$$y^2=2\,px$$

معادلهٔ سهمی که رأس آن مبدأ مختصات ، محور آن محور y ها و مختصات کانون آن $\left(0\,,\,\frac{p}{2}\right)$ است :

$$x^2=2\,py$$

معادلهٔ سهمی که مختصات رأس آن $(h\,,\,k)$ و معادلهٔ محور آن $y=k$ است :

$$(y-k)^2=2\,p(x-h)$$

معادلهٔ سهمی که مختصات رأس آن $(h\,,\,k)$ و معادلهٔ محور آن $x=h$ است :

$$(x-h)^2=2\,p(y-k)$$

معادلهٔ سهمی که محور y ها محور آن است : $\qquad y=Ax^2+C$

(٨) معادلهٔ چند خم دیگر

معادلهٔ بیضی که مرکز آن مبدأ مختصات و دو کانون آن واقع برمحور Ox است :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

معادلهٔ هذلولی که مرکزآن مُبدأ مختصات و دو کانون آن واقع برمحور Ox است:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلهٔ هذلولی متساوی‌الساقین که مرکزآن مبدأ مختصات ودو مجانب‌آن محورهای مختصات است :
$$xy = C$$
به فصل بیست‌وششم نیز مراجعه کنید.

۴-چند دستور از هندسهٔ تحلیلی فضایی .- دستورهای مهم هندسهٔ تحلیلی فضایی عبارتند از :

(۱) **فاصلهٔ بین دو نقطهٔ** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$:
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

(۲) **خط راست**

کسینوسهای هادی : $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

پارامترهای هادی : a, b, c

رابطه‌های بین آنها :
$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

در خطی که ازدو نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) می‌گذرد ، داریم :
$$\frac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos\gamma}{z_2 - z_1}$$

(۳) **دو خط راست** - اگر کسینوسهای هادی دو خط بترتیب
$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \quad \text{و} \quad \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$$
و پارامترهای هادی آنها بترتیب
$$a, b, c \quad \text{و} \quad a', b', c'$$
و زاویهٔ بین آنها θ باشد :

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

و یا

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

اگر دو خط باهم موازی باشند : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

اگردوخط بهم عمود باشند : $aa' + bb' + cc' = 0$

(٤) **معادلات خط** راستی که برنقطهٔ (x_1, y_1, z_1) میگذرد وپارامترهای هادی آن a و b و c است ، عبارتند از :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

(٥) **صفحه** - درصفحهٔ $Ax + By + Cz + D = 0$ ضریبهای A و B و C پارامترهای هادی امتداد عمود براین صفحه‌اند .

معادلهٔ صفحهٔ ماربر نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) وعمود بر امتدادی که پارامترهای هادی آن A و B و C است ، عبارتست از :

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

(٦) **دو صفحه** - پارامترهای هادی فصل مشترك دوصفحه به معادلات

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

عبارتند از : $BC' - CB' \ ,\ CA' - AC' \ ,\ AB' - BA'$

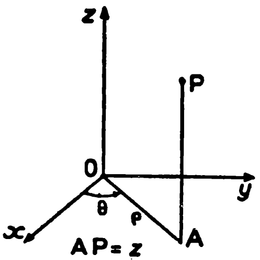
اگر زاویهٔ بین این دوصفحه را θ بنامیم :

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

(٧) **مختصات استوانه‌ای*** . - مختصات استوانه‌ای نقطهٔ $P(x, y, z)$ عبارتنداز

* برای کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ مختصات استوانه‌ای و کروی به کتابهای هندسهٔ تحلیلی مراجعه کنید .

z ، فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ xy ، و (ρ , θ) ، مختصات قطبی تصویر نقطهٔ P در صفحهٔ xy . این مختصات را بەصورت (ρ , θ , z) مینویسند .



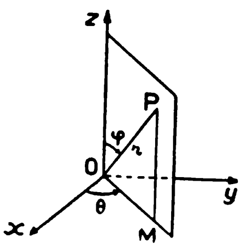
شکل ۱

اگرمختصاتقائم نقطهٔ P را (x , y , z) بنامیم ، با توجه به تعریف مختصات استوانه‌ای و ملاحظهٔ شکل ۱ داریم :

$$x=\rho \cos \theta \quad , \quad y=\rho \sin \theta \quad , \quad z=z$$

$$\rho^2=x^2+y^2 \quad , \quad \theta=\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

(۸) **مختصات کروی** * . ـ مختصات کروی نقطهٔ P عبارتند از شعاع حامل $r=OP$ ، زاویهٔ φ واقع بین OP و محور Oz ، و زاویهٔ θ واقع بین تصویرOP برصفحهٔ xy و محور Ox . φ را کلاتیتود ** و θ را لنژیتود*** مینامند . مختصات کروی نقطهٔ P را بەصورت (r , φ , θ) مینویسند .



شکل ۲

اگرمختصات قائم نقطهٔ P ، (x , y , z) باشد ، باتوجه به‌تعریف مختصات کروی وملاحظهٔ شکل ۲ داریم :

$$x=r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y=r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z=r \cos \varphi$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \quad , \quad \theta=\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad , \quad \varphi=\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

* به زیرنویس صفحهٔ قبل مراجعه کنید . ** Colatitude

*** Longitude

۵- الفبای یونانی

حرف		نام	حرف		نام	حرف		نام
Α	α	Alpha	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Rho
Β	β	Beta	Κ	κ	Kappa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
Ε	ϵ	Epsilon	Ν	ν	Nu	Φ	ϕ	Phi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	Χ	χ	Chi
Η	η	Eta	Ο	o	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

فصل دوم

متغیر ـ تابع ـ حد

۶- متغیر و ثابت. - **متغیر** کمیتی است که میتوان به آن مقادیر بیشماری نسبت داد. متغیرها را معمولاً با حروف آخر الفبا نشان میدهند.

کمیتی را که اندازهٔ آن تغییر نکند **ثابت** مینامند.

اندازهٔ **ثابت مطلق** در تمام مسائل ثابت میماند، مانند ۲ ، ۵ ، $\sqrt{7}$ ، π وغیره.

ثابت اختیاری یا **پارامتر** ثابتی است که میتوان به آن عدد دلخواهی نسبت داد، اما عدد اختیار شده در تمام دوران محاسبهٔ یک مسئله ثابت میماند. پارامترها را معمولاً با حروف اول الفبا نشان میدهند.

مثلاً در معادلهٔ خط راست

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

متغیرهای x و y مختصات نقطه‌ای است که روی خط حرکت میکند، درصورتیکه ثابتهای اختیاری a و b طول وعرض نقاط تقاطع خط بامحورهای مختصاتند و میتوان به‌آنها اندازه‌های معینی نسبت داد.

اندازهٔ مطلق یا **قدر مطلق** ثابت a را به صورت $|a|$ مینویسند، چنانکه $|2|=2=|-2|$ است. علامت $|a|$ را «قدر مطلق a» میخوانند.

۷- فاصلهٔ تغییرات یك متغیر. - دربسیاری‌ازمسائل دامنهٔ تغییرات متغیرمحدود است و تنها میتوان قسمتی از اعداد را به متغیر نسبت داد. مثلاً ممکن است متغیر تنها اعداد بین a و b را بگیرد. دوعدد a و b نیز ممکن است در حالتی جزء اعداد اخیر باشند ویا تنها یکی‌ازآنها جزء این‌اعداد باشد. ما علامت [a , b] را، که در آن $a<b$ است، برای نشان‌دادن دو عدد a و b و اعداد بین آنها بکار میبریم وآن‌را «**فاصلهٔ بستهٔ** ab» میخوانیم.

۸- تغییر متصل. - هرگاه x تمام اعداد بین a و b را بگیرد وبرای‌رفتن‌از a به b منظماً صعود کند و یا برای آمدن از $x=b$ به $x=a$ منظماً نزول نماید، میگویند متغیر x در فاصلهٔ [a , b] بطورمتصل تغییر میکند. این تعریف را میتوان از نظر هندسی نیز به طریق زیر بیان کرد (شکل ۳):

نقطه‌ای مانند O را مبدأ اختیار میکنیم و برآن خطی میگذرانیم. نقاط A و B را نظیر به اعداد a و b و نقطهٔ P را نظیر به مقدار خاصی از متغیر x میگیریم. بدین ترتیب فاصلهٔ [a , b] بروشنی با پاره خط AB مجسم میشود. وقتی x در فاصلهٔ [a , b] بطور متصل تغییر میکند، اگر x صعود نماید، نقطهٔ P پاره خط AB را میپیماید و اگر x نزول کند، نقطهٔ P پاره خط BA را میپیماید.

شکل ۳

۹- تابع. - هرگاه دومتغیربا رابطه‌ای بیکدیگر مربوط باشند و وقتی اندازهٔ دومی تغییر میکند، اندازهٔ اولی نیزبه تبعیت ازآن تغییر نماید، میگویند متغیراول تابعی ازمتغیر دوم است.

میتوان گفت که تقریباً تمام مسائل علمی شامل این گونه روابط است. در زندگی روزانه نیز مکرر به مثالهایی برمیخوریم که تبعیت دو مقدار از یکدیگر را نشان میدهند. مثلاً سنگینی **وزنه**ای که مردی قادربه بلندکردن آن است، درصورت یکسان بودن سایر عوامل، تابعی از **نیروی** اوست. **طول فاصله**ای که متحرکی میپیماید، تابعی از **زمان** حرکت است. **مساحت** هرمربع تابعی از **درازای** ضلع آن و **حجم** هرکره تابعی از **قطر** آن است.

۱۰- متغیر مستقل، متغیر غیر مستقل. - در مثالهای مذکور میتوان به متغیر دوم هرمقدار از فاصلهٔ تغییرات آن را نسبت داد. این متغیر را **متغیر مستقل** مینامند. اما وقتی برای متغیر دوم مقدارمعینی اختیارکنیم، مقدار متغیر اول کاملاً معلوم میشود. متغیر اخیر را **متغیر غیر مستقل** یا **تابع** مینامند.

هرگاه دو متغیر برطبق رابطه‌ای از یکدیگر تبعیت کنند، میتوان یکی از آن دو را آزادانه متغیرمستقل انتخاب کرد. ولی پس‌ازانتخاب متغیر مستقل، تغییرآن، جزبااحتیاط و تبدیلات لازم، مجاز نیست.

مثلاً در هر مربع مساحت تابعی از درازای ضلع و بعکس درازای ضلع تابعی از مساحت است.

۱۱- طرز نشان‌دادن توابع. - برای نشان دادن تابعی‌از x علامت f(x) را بکار میبرند. این علامت اف x خوانده میشود. برای نشان دادن چند تابع متمایز از یکدیگر حرفی راکه جلو پرانتز قرار دارد عوض میکنند، مانند F(x)، φ(x)، f'(x) و غیره.

هرگاه درمحاسبات‌یک مسئله علامتی مانند (...)φ تکرار شود، نشانهٔ قانون‌واحدی از تبعیت تابع‌ازمتغیر است. درحالات ساده، این قانون به صورت یک دسته عملیات‌تحلیلی

است که با متغیر انجام میشود. بدین ترتیب هرحرفی که جلو (x) قرار گیرد ، نشانهٔ یک دسته عملیات معین با متغیر است گرچه در جای x مقادیرمختلفی قرار گیرند.

مثلاً اگر $f(x)=x^{۲}-۹x+۱٤$ باشد ،

$$f(y)=y^{۲}-۹y+۱٤$$

$$f(b+۱)=(b+۱)^{۲}-۹(b+۱)+۱٤=b^{۲}-۷b+٦$$

$$f(۰)=۰^{۲}-۹\times۰+۱٤=۱٤$$

$$f(-۱)=(-۱)^{۲}-۹(-۱)+۱٤=۲٤$$

$$f(۳)=۳^{۲}-۹\times۳+۱٤=-٤$$

است.

۱۲- تقسیم به‌صفر ممتنع است. - وقتی x خارج قسمت a به b است ، $a=bx$ است. بنابراین تعریف تقسیم به صفرممتنع است زیرا اگر $b=۰$ باشد ، با توجه به اینکه حاصلضرب هرعدد درصفر ، صفر است ، نمیتوان برای x عددی درنظرگرفت مگر آنکه a نیز صفر باشد. درصورت اخیرمیتوان به x هر عدد دلخواهی را نسبت داد. بنابراین صورت $\frac{a}{۰}$ بی معنی و صورت $\frac{۰}{۰}$ مبهم است.

باید از تقسیم به صفر خودداری کرد زیرا ممکن است نتیجهٔ غلطی بارآرد. مثال زیر نمونه‌ای از آن است :

فرض کنیم $b=a$

روشن است که $ab=a^{۲}$

به دوطرف تساوی $-b^{۲}$ میفزاییم $ab-b^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$

پس‌از تجزیه $b(a-b)=(a+b)(a-b)$

دوطرف تساوی را به $a-b$ تقسیم میکنیم : $b=a+b$

اما $a=b$ است پس $b=۲b$

یا $۱=۲$

این نتیجهٔ نا معقول براثر تقسیم دو طرف تساوی به $a-b=۰$ پیدا شده است.

تمرین

۱) تابع $f(x)=x^۳-۵x^۲-۴x+۲۰$ مفروض است، نشان دهید که $f(۱)=۱۲$، $f(۵)=۰$، $f(۰)=-۲f(۳)$ و $f(۷)=۵f(-۱)$ است.

۲) $f(x)=۴-۲x^۲+x^۴$ است. مقادیر $f(۰)$، $f(۱)$، $f(-۱)$، $f(۲)$ و $f(-۲)$ را حساب کنید.

۳) $F(\theta)=\sin ۲\theta+\cos\theta$ است. مقادیر $F(۰)$، $F\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ و $F(\pi)$ را حساب کنید.

۴) تابع $f(x)=x^۳-۵x^۲-۴x+۲۰$ مفروض است. نشان دهید که:

$$f(t+۱)=t^۳-۲t^۲-۱۱t+۱۲$$

۵) تابع $f(y)=y^۲-۲y+۶$ مفروض است. نشان دهید که:

$$f(y+h)=y^۲-۲y+۶+۲(y-۱)h+h^۲$$

۶) تابع $f(x)=x^۳+۳x$ مفروض است. نشان دهید که:

$$f(x+h)-f(x)=۳(x^۲+۱)h+۳xh^۲+h^۳$$

۷) تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض است. نشان دهید که:

$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^۲+xh}$$

۸) تابع $\varphi(z)=۴^z$ مفروض است. نشان دهید که:

$$\varphi(z+۱)-\varphi(z)=۳\varphi(z)$$

۹) $\varphi(x)=a^x$ است. نشان دهید که:

$$\varphi(y)\cdot\varphi(z)=\varphi(y+z)$$

۱۰) تابع $\varphi(x)=\log\frac{۱-x}{۱+x}$ مفروض است. نشان دهید که:

$$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{۱+yz}\right)$$

۱۱) تابع $f(x)=\sin x$ مفروض است. نشان دهید که :

$$f(x+2h)-f(x)=2\cos(x+h)\sin h$$

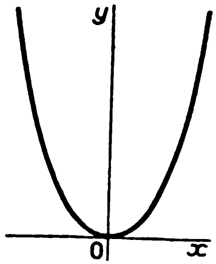
راهنمایی : ازرابطه‌های (۶) صفحهٔ ۶ استفاده کنید.

۱۳ـ خم نمایش یك تابع ، پیوستگی. ـ تابع x^2 را درنظر میگیریم ومینویسیم :

$$y=x^2 \qquad (1)$$

این رابطه به ازای هرمقدار از x یک مقدار برای y بدست میدهد. میگویند مقدار y بوسیلهٔ رابطهٔ (۱) برای تمام مقادیر متغیر مستقل x **معین** شده است.

مکان (۱) یک سهمی است (شکل ٤) و آن را خم نمایش تابع x^2 مینامند. اگر متغیر x از $x=a$ تا $x=b$ ، مطابق تعریف شمارهٔ ۸ ، بطور متصل تغییر کند ، متغیر y نیز از $y=a^2$ تا $y=b^2$ بطور متصل تغییر مینماید و نقطهٔ $P(x, y)$ درطول خم نمایش تابع x^2 بطور متصل از نقطهٔ $A(a, a^2)$ تا نقطهٔ $B(b, b^2)$ تغییرمکان میدهد. چون‌میتوان‌به a و b هرمقدار دلخواهی‌رانسبت داد ، «میگویند «تابع x^2 به‌ازای تمام مقادیر x متصل (پیوسته) است» .

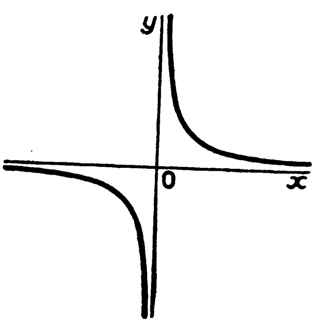


شکل ٤

اکنون تابع $\frac{1}{x}$ را درنظر میگیریم و مینویسیم :

$$y=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

این‌رابطه به‌ازای هرمقدار از x یک مقدار برای y بدست میدهد جز به‌ازای $x=0$ (شمارهٔ ۱۲). تابع به ازای $x=0$ **معین نیست**. خم نمایش (۲) یک هذلولی متساوی‌الساقین است (شکل ٥). اگر x درفاصلهٔ $[a, b]$ که شامل $x=0$ نیست ، بطور پیوسته ، مطابق تعریف شمارهٔ ۸ ، زیاد گردد ، y بطور پیوسته از $\frac{1}{a}$ تا $\frac{1}{b}$ کم میشود و نقطهٔ $P(x, y)$ آن پاره از خم



شکل ٥

(۲) راکه بین دو نقطهٔ $A\left(a\ ,\ \frac{۱}{a}\right)$ و $B\left(b\ ,\ \frac{۱}{b}\right)$ است میپیماید. میگوییم تابع $\frac{۱}{x}$ برای جمیع مقادیر x ، جز $x=۰$ ، پیوسته است. هیچ نقطه‌ای ازخم نظیربه $x=۰$ نیست.

این‌دومثال به منظورنشان‌دادن مفهوم پیوستگی بیان گردید ، تعریف آن را درشمارهٔ ۱۷ خواهیم دید.

۱۴- حد متغیر. - هنگام محاسبهٔ مساحت دایره در هندسهٔ مقدماتی به مفهوم گرایش متغیر بسمت مقدار ثابتی که حد متغیر نامیده میشود ، برخورده‌ایم. مساحت یک کثیرالاضلاع n ضلعی محاطی را درنظر میگیریم و فرض میکنیم که عدد صحیح n منظماً بزرگ میشود. مساحت متغیراین کثیرالاضلاع بسمت‌حد معینی میل میکندکه بنابر تعریف مساحت دایره است. دراین‌صورت متغیر v (مساحت کثیرالاضلاع) دائماًزیاد میشود وتفاضل $S-v$ ، که در آن S مساحت دایره است ، کاهش می‌یابد و از هر عدد کوچک اختیاری کوچکتر میشود.

مفهومی که دراین مثال توضیح دادیم ، به‌طریق زیر بیان میشود :

تعریف - میگویند متغیر v بسمت حد l میگراید اگر مقادیر متوالی v چنان باشند که $|v-l|$ از جای معینی ببعد از هرعدد کوچک اختیاری کوچکتر شود و از آن کوچکتر بماند.

مطلب مذکور را به صورت $lim\ v=l$ مینویسند. گاهی نیز علامت $v\to l$ را بکار میبرند و میگویند «حد v ، l است» و یا «v بسمت l میل میکند».

مثال- وقتی مقادیر متوالی v

$$۲+۱\ ,\ ۲+\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲+\frac{۱}{٤}\ ,\ \dots\ ,\ ۲+\frac{۱}{۲^n}\ ,\ ..$$

است ، بروشنی $lim\ v=۲$ است یا $v\to ۲$.

اگر روی خط راستی مانند شکل ۳ نقطهٔ L را نظیربه حد l فرض کنیم و در دوطرف L دو نقطه به فاصلهٔ ε ، **که میتوان‌آن را بطور دلخواه کوچک انتخاب کرد** ، تعیین نماییم ، نقاط نظیر به مقادیر متوالی v از رتبهٔ معینی ببعد روی پاره خط نظیر به فاصلهٔ $[l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon]$ واقع خواهند بود.

۱۵- حد تابع. - مسئله‌یی که معمولاً پیش میاید بدین قراراست : متغیرv وتابعی از آن مانند z دردست است و باید تحقیق کرد که وقتی متغیر مستقل v بسمت l میل میکند ، آیا متغیر غیر مستقل یعنی تابع z نیز بسمت حد معینی میل مینماید؟ اگر مقدار ثابتی مانند a وجود داشته باشد بطوریکه $lim\ z=a$ باشد ، مینویسند :

$$\lim_{v \to l} z = a$$

و میگویند «**حد z ، وقتی v بسمت l میل میکند ، a است**» .

۱۶- قضایای اصلی حدود. - برای بدست‌آوردن حد یک تابع میتوان ازقضایای زیر استفاده کرد. اثبات آنها را در شمارهٔ ۲۰ خواهیم دید.

اگر u و v و w توابعی از متغیر x و

$$\lim_{x \to a} u = A \quad , \quad \lim_{x \to a} v = B \quad , \quad \lim_{x \to a} w = C$$

باشد ، داریم :

$$(۱) \qquad \lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C$$

$$(۲) \qquad \lim_{x \to a} (uvw) = ABC$$

$$(۳) \qquad \lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq ۰)$$

این قضایا را میتوان بطور خلاصه چنین بیان کرد : **حد مجموع جبری ، حد حاصل‌ضرب یا حد خارج قسمت دوتابع بترتیب برابراست با مجموع جبری، حاصل‌ضرب یا خارج قسمت حدود آن دو تابع بشرط آنکه در خارج قسمت دو تابع حد مخرج صفر نباشد.**

اگر c ثابت (یعنی مستقل از x) و B مخالف صفر باشد ، بنابرآنچه ذکرگردید ، داریم :

$$(٤) \qquad \lim_{x \to a} (u + c) = A + c \quad , \quad \lim_{x \to a} cu = cA \quad , \quad \lim_{x \to a} \frac{c}{v} = \frac{c}{B}$$

مثال ۱- نشان دهید که $\lim_{x \to ۲} (x^۲ + ٤x) = ۱۲$ است.

حل- این تابع مجموع دو تابع $x^۲$ و $٤x$ است. نخست حد هریک ازاین دوتابع را پیدا میکنیم.

بنابر (۲) چون $x^۲ = x \cdot x$ است ، $\lim_{x \to ۲} x^۲ = ٤$ است.

بنابر(٤) ، $\lim_{x \to ۲} ٤x = ٤ \lim_{x \to ۲} x = ۸$ وبنابر(۱) حد خواسته شده $۱۲ = ۸ + ٤$ است.

مثال ۲- نشان دهید که $\frac{-5}{4} = \lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 9}{z + 2}$ است.

حل - بنابر (۲) و (٤) حد صورت $\lim_{z \to 2} (z^2 - 9) = -5$ وحد مخرج

$\lim_{z \to 2} (z + 2) = 4$ و بنابر (۳) حد کسر $\frac{-5}{4}$ است.

۱۷- تابع متصل ، تابع منفصل. - در مثال ۱ دیدیم که

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 4x) = 12$$

است. **مقدار** تابع نیز به ازای $x = 2$ ، ۱۲ است. بدین ترتیب حد تابع به ازای $x \to 2$ برابر مقدار تابع به ازای $x = 2$ است. دراین صورت میگویند تابع به ازای $x = 2$ متصل است. تعریف تابع متصل بطورکلی عبارتست از :

تعریف - تابع $f(x)$ را **به‌ازای** $x = a$ **متصل یا پیوسته** گویند هرگاه حد تابع به ازای $x \to a$ برابر مقدار تابع به ازای $x = a$ باشد. به عبارت دیگر وقتی

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

باشد ، $f(x)$ به‌ازای $x = a$ **متصل** است.

هرگاه شرط مذکور برقرار نباشد ، تابع را به ازای $x = a$ منفصل گویند.

اکنون توجه خواننده را به دوحالت زیر جلب میکنیم :

حالت اول - تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad (x \neq 2)$$

را که تابعی پیوسته از متغیر x است ، درنظر میگیریم.

به ازای $x = 1$ ، $f(x) = f(1) = 3$ است. ازطرف دیگر وقتی x بسمت ۱ میل میکند ، تابع $f(x)$ بسمت ۳ میل مینماید. بنابراین تابع به ازای $x = 1$ پیوسته است.

حالت دوم - در تعریف تابع متصل فرض میکنند که تابع به ازای $x = a$ معین است. اگرچنین نباشد، گاهی میتوان به‌ازای $x = a$ به‌تابع عددی نسبت داد و بدین ترتیب شرایط پیوستگی را برقرار ساخت. قضیهٔ زیر شامل هردوحالت مذکور است.

قضیه - اگر $f(x)$ **به ازای** $x = a$ **نا معین و**

$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

باشد، $f(x)$ به ازای $x=a$ متصل است بشرط آنکه مقدار تابع به ازای $x=a$ برابر B فرض شود.

منجمله تابع $\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ به ازای $x=۲$ نا معین است (زیرا به ازای $x=۲$ به صورت $\frac{۰}{۰}$ در میاید).

اما به ازای جمیع مقادیر x

$$\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=x+۲$$

و

$$\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

و از آنجا

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=۴$$

است. این تابع به ازای $x=۲$ نامعین است. ولی اگر $f(۲)=۴$ فرض شود، تابع به‌ازای $x=۲$ پیوسته است.

اگر تابع $f(x)$ به ازای جمیع مقادیر فاصله‌ای پیوسته باشد، میگویند $f(x)$ در آن فاصله پیوسته است *.

اگر تابع $g(v)$ در فاصلهٔ (c, d) پیوسته و a نقطه‌ای از فاصلهٔ (c, d) باشد و بخواهیم مقدار $g(a)$ را بدست‌آوریم، کافی است‌حد تابع را به ازای $x \to a$ حساب کنیم.

۱۸ - بینهایت (∞) - اگر قدر مطلق متغیر v از هرعدد مثبت و بزرگی که ازپیش تعیین شده است، بزرگترشود وازآن‌بزرگتر بماند، میگویند v بینهایت میشود. اگرv تنها مقادیر مثبت را اختیار کند، میگویند عدد v بینهایت مثبت میشود و اگر v تنها مقادیر منفی را اختیارکند، میگویند بینهایت منفی میشود و بترتیب مینویسند:

$$\lim |v|=\infty \quad , \quad \lim v=+\infty \quad , \quad \lim v=-\infty$$

دراین صورت نمیتوان گفت v بسمت حد معینی میل میکند. برای بیان عبارت $\lim v=\infty$

* ما دراین‌کتاب تنها با توابعی سروکار داریم که بطورکلی پیوسته‌اند یعنی به ازای جمیع مقادیر x، غیراز چند مقدار استثنایی، متصلند. نیز جوابهایی از x برایمان قابل قبولند که توابع مورد نظر به ازای آنها پیوسته‌اند.

یا $v \to \infty$ میگویند «v بینهایت میشود» یا «v بسمت بینهایت میل میکند * ».
مثلاً وقتی مینویسیم

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty$$

یعنی وقتی x بسمت صفر میل میکند، $\left| \frac{1}{x} \right|$ بینهایت میشود.
با توجه به شمارهٔ ۱۷ می‌بینیم اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

باشد، یعنی اگر به‌ازای $x \to a$ ، $f(x)$ بینهایت شود، $f(x)$ به ازای $x=a$ منفصل است.

وقتی متغیر مستقل بینهایت میشود، ممکن است تابع حد معینی داشته باشد، مثلاً $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ است.

بطورکلی اگر تابع $f(x)$ به ازای $x \to \infty$ بسمت A میل کند، مانند شمارهٔ ۱۷ مینویسیم:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

درصورت زیر بعضی از حالات خاص حدودکه دربسیاری ازمسائل پیش میایند، داده شده است (c ثابت و مخالف صفر است):

به شکل مختصر		به صورت حد	
$\frac{c}{0} = \infty$	,	$\lim_{v \to 0} \frac{c}{v} = \infty$	(۱)

---

* برای بیان عبارت $v \to +\infty$ گاهی میگویند: v بسمت باضافهٔ بینهایت میل میکند، برای $v \to -\infty$ میگویند: v بسمت منهای‌بینهایت میل میکند، و برای $|v| \to \infty$ میگویند: قدر مطلق v بسمت بینهایت میل میکند. گرچه عبارتهای مذکور برای نشان دادن حالات مورد نظر خوب است ولی خواننده باید بخاطر داشته باشد که بینهایت حد نیست زیرا بینهایت عدد نیست و لذا این جملات از نظر ریاضی صحیح نیستند.

$$\lim_{v\to\infty} cv=\infty \quad , \quad c\cdot\infty=\infty \qquad (۲)$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v}{c}=\infty \quad , \quad \frac{\infty}{c}=\infty \qquad (۳)$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{c}{v}=0 \quad , \quad \frac{c}{\infty}=0 \qquad (٤)$$

این حالات خاص بخصوص هنگامی پیش میایند که متغیر بینهایت شود وما بخواهیم حد خارج قسمت دو کثیرالجمله را بدست آوریم.

مثال ـ نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۳-۳x^۲+٤}{٥x-x^۲-۷x^۳}=-\frac{۲}{۷}$ است.

حل ـ صورت و مخرج کسر را بر $x^۳$ که بزرگترین درجهٔ x درصورت و مخرج است تقسیم میکنیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۳-۳x^۲+٤}{٥x-x^۲-۷x^۳}=\lim_{x\to\infty} \frac{۲-\frac{۳}{x}+\frac{٤}{x^۳}}{\frac{٥}{x^۲}-\frac{۱}{x}-۷}$$

حد مشترك تمام جمله هایی که مخرج آنها قوهای از x است، بنابر (٤) صفر است و جواب مسئله بوسیلهٔ روابط (۱) و (۳) ی شمارهٔ ۱٦ بدست میاید. در تمام این گونه مسائل **باید نخست صورت ومخرج را بر بزرگترین قوهای از متغیر که در کسر دیده میشود، تقسیم کرد.**

اگر u و v توابعی از x باشند و

$$\lim_{x\to a} u=A \quad و \quad \lim_{x\to a} v=0$$

و نیز A مخالف صفر باشد، $\lim_{x\to a} \frac{u}{v}=\infty$ است.

این دستور رابطهٔ (۳)ی شمارهٔ ۱٦ را درحالت استثنایی $B=0$ ، $A\neq 0$ تکمیل میکند. شمارهٔ ۲۰ را نیز ببینید.

تمرین

درستی نتایج زیر را بیازمایید :

۱) $$\lim_{x\to\infty}\frac{٥-۲x^{۲}}{۳x+٥x^{۲}}=-\frac{۲}{٥}$$

حل - $$\lim_{x\to\infty}\frac{٥-۲x^{۲}}{۳x+٥x^{۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{٥}{x^{۲}}-۲}{\frac{۳}{x}+٥}$$

[صورت و مخرج را بر $x^{۲}$ تقسیم کرده‌ایم.]

حد هرجمله‌ای از صورت یا مخرج که شامل x است ، بنابر تساوی (٤) شمارهٔ ۱۸ ، صفر است و جواب مسئله بوسیلهٔ روابط (۱) و (۳) ی شمارهٔ ۱٦ بدست میاید :

۲) $$\lim_{x\to\infty}\frac{٤x+٥}{۲x+۳}=۲$$

۳) $$\lim_{t\to ۰}\frac{٤t^{۲}+۳t+۲}{t^{۳}+۲t-٦}=-\frac{۱}{۳}$$

٤) $$\lim_{h\to ۰}\frac{x^{۲}h+۳xh^{۲}+h^{۳}}{۲xh+٥h^{۲}}=\frac{x}{۲}$$

٥) $$\lim_{h\to\infty}\frac{۳h+۲xh^{۲}+x^{۲}h^{۳}}{٤-۳xh-۲x^{۳}h^{۳}}=-\frac{۱}{۲x}$$

٦) $$\lim_{k\to ۰}\frac{(۲z+۳k)^{۳}-٤k^{۲}z}{۲z(۲z-k)^{۲}}=۱$$

۷) $$\lim_{y\to\infty}\frac{٤y^{۲}-۳}{۲y^{۳}+۳y^{۲}}=۰$$

۸) $$\lim_{x\to\infty}\frac{٦x^{۳}-٥x^{۲}+۳}{۲x^{۳}+٤x-۷}=۳$$

۹) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\frac{a_0}{b_0}$$

۱۰) $$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\frac{a_n}{b_n}$$

۱۱) $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^5+ex^3+fx}=0$$

۱۲) $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^3+ex^2+fx+g}=\infty$$

۱۳) $$\lim_{s\to a}\frac{s^4-a^4}{s^2-a^2}=2a^2$$

۱۴) $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$ (n عددی صحیح و مثبت است.)

۱۵) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{5}{4}$$

۱۶) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

در مسئلهٔ ۱۶ نمیتوان مستقیماً بجای h صفر گذاشت زیرا صورت مبهم $\frac{0}{0}$ پیدا میشود (شمارهٔ ۱۲). دراینجا باید صورت کسر را به ترتیب زیر گویا کرد:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

و از آنجا

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۱۷) تابع $f(x)=x^2$ مفروض است، نشان دهید که:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ۲x$$

۱۸) تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ مفروض است ، نشان دهید که :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ۲ax+b$$

۱۹) تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض است ، نشان دهید که :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{۱}{x^۲}$$

۲۰) تابع $f(x)=x^۳$ مفروض است. حد زیر را حساب کنید :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

۱۹ - بینهایت کوچك‌ها. - متغیر v را که حد آن صفر است **بینهایت کوچك** مینامند و مینویسند (شمارهٔ ۱٤) :

$$\lim v = ۰ \quad \text{یا} \quad v \to ۰$$

یعنی قدر مطلق مقادیر متوالی v سرانجام از هرعدد مثبتی ، هرچه هم کوچک باشد ، کوچکتر میشود و از آن کوچکتر میماند.

اگر $\lim v = l$ باشد ، $\lim(v-l)=۰$ است ، یعنی **تفاضل متغیر وحد آن یك بینهایت کوچك است.**

بعکس **اگر تفاضل یك متغیر و یك عدد ثابت بینهایت کوچك باشد ، آن عدد ثابت حد آن متغیر است.**

۲۰- چند قضیه دربارهٔ بینهایت کوچك‌ها وحدود. - درقضایای زیر فرض میکنیم که کمیتهای متغیر همه توابعی از یک متغیر مستقلند و وقتی این متغیر مستقل بسمت مقدار معینی مانند a میل میکند ، هریک از توابع مذکور بسمت حد خاصی میل مینماید. نیز فرض میکنیم که مقدار ثابت ε عدد مثبت و مخالف صفری است که میتوان آن‌را بطور دلخواه کوچک انتخاب کرد.

نخست به اثبات چهار قضیه دربارهٔ بینهایت کوچک‌ها میپردازیم.

I - **مجموع جبری n بینهایت کوچك یك بینهایت کوچك است.** n عددی صحیح و معین است.

زیرا اگر قدر مطلق هریک از بینهایت کوچک‌ها از $\frac{\varepsilon}{n}$ کوچکترشود و ازآن کوچکتر بماند، قدر مطلق مجموع جبری آنها نیز از ε کوچکتر میشود و از آن کوچکتر میماند.

II - حاصل‌ضرب یك بینهایت کوچك درعدد ثابت c یك بینهایت کوچك است.

زیرا اگر قدرمطلق بینهایت کوچك از $\frac{\varepsilon}{|c|}$ کوچکتر باشد، قدرمطلق حاصل‌ضرب نیز از ε کوچکتر است.

III - حاصل‌ضرب n بینهایت کوچك یك بینهایت کوچك است. n عددی صحیح و معین است.

زیرا اگر قدر مطلق هریک‌از بینهایت کوچك‌هااز $\sqrt[n]{\varepsilon}$ کوچکتر شود وازآن کوچکتر بماند، قدر مطلق حاصل‌ضرب آنها نیز از ε کوچکتر میشود و از آن کوچکتر میماند.

IV - اگر $\lim v = l$ و $l \neq 0$ باشد، خارج قسمت یك بینهایت کوچك، مانند i، بر v نیز یك بینهایت کوچك است.

زیرا میتوان عدد مثبتی کوچکتراز $|l|$، مانند c، چنان انتخاب کرد که اولاً $|v|$ از c بزرگتر شود و از آن بزرگتر بماند وثانیاً $|i|$ از $c\varepsilon$ کوچکتر شود و از آن کوچکتر بماند. دراین صورت قدرمطلق خارج قسمت آنها نیز از ε کوچکتر میشود و از آن کوچکتر میماند.

اثبات قضایای شمارهٔ ۱۶ - مینویسیم :

$$u-A=i \quad \text{و} \quad v-B=j \quad \text{و} \quad w-C=k \tag{۱}$$

i و j و k توابعی از x میباشند و هرگاه x بسمت a میل کند، این توابع بسمت صفر میل میکنند. بدین‌ترتیب i و j و k سه بینهایت کوچکند (شمارهٔ ۱۹).

با توجه به معادلات (۱) داریم :

$$u+v-w-(A+B-C)=i+j-k \tag{۲}$$

طرف راست تساوی (۲) بنابرقضیهٔ I یک بینهایت کوچك است، پس با توجه به شمارهٔ ۱۹ :

$$\lim_{x\to a}(u+v-w)=A+B-C \tag{۳}$$

از روابط (۱) داریم $u=A+i$ و $v=B+j$. دو طرف این‌تساویها را دریکدیگرضرب میکنیم و سپس AB را به طرف چپ میبریم، داریم :

$$uv-AB=Aj+Bi+ij \tag{۴}$$

بنابر قضایای I و III طرف راست این تساوی یک بینهایت کوچک است و از آنجا :

$$\lim_{x \to a} uv = AB \qquad (۵)$$

برای حاصل‌ضرب uvw نیز میتوان به همین طریق استدلال کرد.

سرانجام مینویسیم :

$$\frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+i}{B+j} - \frac{A}{B} = \frac{Bi - Aj}{B(B+j)} \qquad (۶)$$

بنابر قضایای I و II صورت کسر اخیر یک بینهایت کوچک است. بنابر (۳) و (۴) ، $\lim B(B+j) = B^2$ است ، پس بنابر قضیهٔ IV طرف راست تساوی (۶) یک بینهایت کوچک است و از آنجا :

$$\lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B} \qquad (۷)$$

بدین ترتیب قضایای مذکور در شمارهٔ ۱۶ محققند.

تمرین

با استفاده از معادلات (۱) و روش مذکور ، درستی تساویهای زیر را بیازمایید :

۱) $\lim_{x \to a} u^2 = A^2$

۲) $\lim_{x \to a} uvw = ABC$

۳) $\lim_{x \to a} \sqrt{u} = \sqrt{A}$

فصل سوم

مشتق

۲۱ - مقدمه. - هرگاه در رابطهٔ بین متغیروتابع ، متغیرمستقل تغییر کند،تابع نیزبه دنبال آن تغییرمینماید. ماا کنون به مطالعهٔ همین تغییر که مسئلهٔ اساسی حساب دیفرانسیل است میپردازیم. نیوتن* هنگام مطالعهٔ مسائلی ازاین نوع ،که درآنها کمیتها بطور پیوسته تغییر میکنند ، به کشف اصول اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال که مؤثرترین ابزار علمی ریاضیدانان کنونی است ، هدایت گردید.

نمو - نمو متغیری که از مقدار عددی معین به مقدار عددی دیگری میرود ، برابر فزونی مقدار دومی برمقدار اولی است. نمو x را با Δx نشان میدهند و میخوانند « دلتا x ». دراینجا منظور حاصلضرب Δ در x نیست. روشن است که این نمو ، یعنی Δx ، برحسب آنکه متغیر صعود یا نزول کند ، مثبت یا منفی است.

به همین ترتیب : Δy نمو y را نشان میدهد ،

$\Delta \varphi$ نمو φ را نشان میدهد ،

و $\Delta f(x)$ نمو $f(x)$را نشان میدهد و غیره.

اگر در $y=f(x)$ به متغیر مستقل x نموی مانند Δx بدهیم ، تابع $f(x)$ (یعنی متغیر غیرمستقل y) نیز نموی میکند که آن‌را Δy مینامند.

نمو Δy را همیشه از روی مقدار اولیهٔ y که نظیر به مقدار معین و دلخواهی از x است ، و Δx ، یعنی نموی که به x داده شده است ، حساب میکنند. تابع زیر را به‌عنوان مثال در نظر میگیریم :

$$y=x^2$$

---

* ایساك‌نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) Sir Isaac Newton ، ریاضیدان انگلیسی ، دارای نبوغی فوق‌العاده بود. اوعلم حساب دیفرانسیل و انتگرال را زیرعنوان «Fluxions» بسط و توسعه داد .گرچه نیوتن این علم جدید را ازسال ۱۶۷۰ کشف کرده بود و بکار میبست ، اما اولین اثرچاپ شده‌اش که شامل‌این مطلب‌است‌به‌سال ۱۶۸۷ به نام«Philosophia Naturalis Principia Mathematica» منتشرشد. این کتاب مهمترین اثر نیوتن است. لاپلاس دربارهٔ آن گفته است : « این اثر برای همیشه برتراز تمام فرآورده‌های فکر بشر باقی خواهد ماند . »

اگر x را ابتدا برابر ۱۰ بگیریم ، برای y عدد ۱۰۰ بدست میاید.
فرض میکنیم x بزرگ‌شود وبه ۱۲ برسد. دراین صورت $\Delta x=۲$ است ، y بزرگ میشود و به ۱۴۴ میرسد ، و از آنجا $\Delta y=٤٤$ است.
اکنون فرض میکنیم x از مقدار اولیه‌اش ، یعنی ۱۰ ، نزول کند و به ۹ برسد. در این صورت $\Delta x=-۱$ است ، y نزول میکند و به ۸۱ میرسد ، و از آنجا $\Delta x=-۱۹$ است.

دراین مثال وقتی x بزرگ میشود ، y نیز بزرگ میشود و وقتی x نزول میکند ، y نیز نزول میکند و نموهای نظیر ، یعنی Δx و Δy ، دارای یک علامتند.
اگر هنگام بزرگ شدن x از مقدار y کاسته گردد و یا هنگام کم شدن x به مقدار y افزوده شود ، علامتهای Δx و Δy مخالف یکدیگرند.

۲۳ - مقایسهٔ نموها. - تابع

$$y=x^۲ \tag{۱}$$

را درنظر میگیریم. به x ، که به آن مقدار معینی نسبت داده شده است ، نموی مانند Δx میدهیم ، y نیز نموی مانند Δy پیدا میکند و داریم :

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^۲ \tag{A}$$

یا

$$y+\Delta y=x^۲+۲x\cdot\Delta x+(\Delta x)^۲ \tag{B}$$

دو طرف (۱) را از دو طرف (B) کم میکنیم ، داریم :

$$\Delta y=۲x\cdot\Delta x+(\Delta x)^۲ \tag{۲}$$

این تساوی نمو Δy را به صورت تابعی از x و Δx میدهد.
برای یافتن نسبت دو نمو ، دو طرف (۲) را به Δx تقسیم میکنیم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=۲x+\Delta x$$

اگر مقدار اولیهٔ x ،مثلاً ٤ باشد ، روشن است که

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=۸$$

است. اکنون به طرز تغییر نسبت نموهای x و y ، وقتی نمو x کم میشود ، توجه میکنیم.
می‌بینیم‌وقتی Δx نزول میکند ، Δy نیز نزول میکند ، اما نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مقادیرمتوالی

مقدار اولیهٔ x	مقدار جدید x	نمو Δx	مقدار اولیهٔ y	مقدار جدید y	نمو Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
٤	٥ر٠	١ر٠	١٦	٢٥	٩	٩
٤	٤ر٨	٠ر٨	١٦	٢٣ر٠٤	٧ر٠٤	٨ر٨
٤	٤ر٦	٠ر٦	١٦	٢١ر١٦	٥ر١٦	٨ر٦
٤	٤ر٤	٠ر٤	١٦	١٩ر٣٦	٣ر٣٦	٨ر٤
٤	٤ر٢	٠ر٢	١٦	١٧ر٦٤	١ر٦٤	٨ر٢
٤	٤ر١	٠ز١	١٦	١٦ر٨١	٠ر٨١	٨ر١
٤	٤ر٠١	٠ر٠١	١٦	١٦ر٠٨٠١	٠ر٠٨٠١	٨ر٠١

۹ ، ۸ر۸ ، ۸ر٦ ، ۸ر٤ ، ۸ر۲ ، ۸ر۱ و ۸ر۰۱ را میگیرد. این اعداد نشان‌میدهند که اگر Δx باندازهٔ کافی کوچک انتخاب شود ، مقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بقدر دلخواه به ۸ نزدیک میگردد. از آنجا

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

٢٤ - مشتق تابع یك متغیر. - تعریف‌اساسی حساب دیفرانسیل به‌قرار زیر است :

مشتق هر تابع برابراست با حد خارج قسمت نمو تابع به نمومتغیر وقتی نمو متغیر بسمت صفر میل میکند.

این تعریف را میتوان به صورت دیگری نیز درآورد. تابع

$$y = f(x) \qquad (۱)$$

را درنظر میگیریم و x را مقدار ثابتی فرض میکنیم. به x نموی مانند Δx میدهیم ، تابع y نیز نموی مانند Δy پیدا میکند. مقدار جدید تابع عبارت میشود از

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad (۲)$$

برای تعیین نمو تابع دو طرف (۱) را از دو طرف (۲) کم میکنیم :

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad (۳)$$

اکنون دو طرف (۳) را بر Δx تقسیم مینماییم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (٤)$$

بنابر تعریف حد این نسبت ، وقتی Δx بسمت صفر میل میکند ، مشتق تابع y است و آن‌را **به صورت** $\frac{dy}{dx}$ **مینویسند**. پس رابطهٔ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (A)$$

بیان نشانه یی «مشتق y [یعنی مشتق $f(x)$] نسبت به x» است.

نیز میتوان نوشت :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

به همین ترتیب اگر u تابعی از t باشد :

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{مشتق } u \text{ نسبت به } t$$

مجموعهٔ عملیاتی را که برای بدست آوردن مشتق یک تابع انجام میشود ، **محاسبهٔ مشتق** یا **مشتق گیری** مینامند.

۲۵ - نشانه‌های مشتق. - چون Δy و Δx همیشه محدودند و مقادیر معینی دارند ، عبارت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

یک کسر عادی است. اما $\frac{dy}{dx}$ **یک کسر عادی نیست بلکه حد یک کسر است.**

بعداً خواهیم دید که دربسیاری ازموارد نشانهٔ اخیر خاصیتهای یک کسر را داراست و نیز نشان خواهیم داد که چگونه میتوان معانی گوناگونی به dx و dy نسبت داد. اما اکنون نشانهٔ $\frac{dy}{dx}$ را به عنوان یک «عامل دربست» درنظر میگیریم.

چون مشتق تابعی از x معمولاً خود نیز تابعی از x است ، برای نشان دادن مشتق f(x) نشانهٔ f'(x) را نیز بکار میبرند. لذا اگر

$$y=f(x)$$

باشد ، مشتق آن را به صورت

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

مینویسیم و میگوییم : «مشتق y نسبت به x مساویست با اف پریم x».

نشانهٔ $\frac{d}{dx}$ نیز وقتی تنها درنظر گرفته شود ، عامل مشتق گیری است ومعنی آن این است که باید مشتق تابعی که بعداز آن قرار دارد ، نسبت به x حساب شود. مثلاً

$\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{d}{dx}y$ مشتق y را نسبت به x نشان میدهد ،

$\frac{d}{dx}f(x)$ مشتق $f(x)$ را نسبت به x نشان میدهد ،

$\frac{d}{dx}(۲x^۲+۵)$ مشتق $۲x^۲+۵$ را نسبت به x نشان میدهد.

y' نیز صورت سادهای برای $\frac{dy}{dx}$ است. نشانهٔ D_x را نیز بعضی از مؤلفان بجای $\frac{d}{dx}$ بکار میبرند. پس اگر

$$y=f(x)$$

باشد ، میتوان نوشت :

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}f(x)=D_xf(x)=f'(x)$$

یادآور میشویم که وقتی Δx را بسمت صفر میل میدهیم ، آنچه تغییر میکند Δx است نه x . مقدار x از اول ثابت فرض میشود . به منظور تصریح و تبیین این مطلب میتوان مقدار اولیهٔ x را x_0 نامید و نوشت :

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

۲۶-توابع دارای مشتق .- بنابر نظریهٔ حدود روشن است که اگر تابعی از یک متغیر به‌ازای مقدار معینی از متغیر مستقل مشتق داشته باشد ، به‌ازای آن مقدار از متغیر مستقل پیوسته است.

عکس این مطلب گاهی نادرست است. زیرا توابع پیوسته‌ای وجود دارند که دارای مشتق نیستند. اما در ریاضیات عملی و دراین کتاب به‌این قبیل توابع برنمیخوریم و تنها توابعی مورد نظر ماست که به‌ازای جمیع مقادیر متغیر مستقل ، غیرازچند مقدار استثنایی ، دارای مشتقند.

۲۷-قاعدهٔ کلی برای محاسبهٔ مشتق .- بنابر تعریف مشتق ، محاسبهٔ مشتق تابعی مانند $y=f(x)$ شامل اعمال زیر است :

عمل اول - درتابع بجای x ، $x+\Delta x$ میگذاریم ومقدارجدید تابع یعنی $y+\Delta y$ را حساب میکنیم.

عمل دوم - مقدار داده شدهٔ تابع را از مقدار جدید تابع کم میکنیم و Δy یعنی نمو تابع را بدست میاوریم.

عمل سوم - نموتابع یعنی Δy را بر نمومتغیرمستقل یعنی Δx تقسیم میکنیم.

عمل چهارم - حد خارج قسمت را ، وقتی نمو متغیر مستقل یعنی Δx تغییر میکند و بسمت صفر میل مینماید ، تعیین میکنیم . این حد ، مشتق مطلوب است.

برای آشنا شدن بااین قاعده ، خواننده باید آن‌را در مثالهای بسیاری بکار بندد. نیز باید بخاطر داشته باشد که درعمل چهارم ، برای بکار بردن قضایای شمارهٔ ۱۶ ی صفحهٔ ۱۹ ، x ثابت فرض میشود.

مثال ۱- مشتق $3x^2+5$ را حساب کنید.

حل - مینویسیم : $y=3x^2+5$

و چهار عمل قاعدهٔ کلی را متوالیاً انجام میدهیم.

عمل اول -

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5$$
$$=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5$$

عمل دوم -

$$\begin{array}{l} y+\Delta y=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ y \qquad\;\; =3x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +5 \\ \hline \Delta y= \qquad\quad 6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{array}$$

عمل سوم -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x$$

عمل چهارم - در طرف راست ، Δx بسمت صفرمیل میکند وبنابر (A) داریم :

جواب : $$\frac{dy}{dx}=6x$$

یا $$y'=\frac{d}{dx}(3x^2+0)=6x$$

مثال ۲- مشتق x^3-2x+7 را حساب کنید.

حل - مینویسیم : $$y=x^3-2x+7$$

عمل اول - $$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7$$
$$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+7$$

عمل دوم -
$$\begin{array}{rl} y+\Delta y= & x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+7 \\ y\qquad= & x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2x \qquad\quad +7 \\ \hline \Delta y= & 3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 \qquad -2\Delta x \end{array}$$

عمل سوم - $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2$$

عمل چهارم - در طرف راست ، Δx بسمت صفر میل میکند و بنابر (A) داریم :

جواب : $$\frac{dy}{dx}=3x^2-2$$

یا $$y'=\frac{d}{dx}(x^3-2x+7)=3x^2-2$$

مثال ۳- مشتق $\frac{c}{x^2}$ را حساب کنید.

حل - مینویسیم : $$y=\frac{c}{x^2}$$

عمل اول - $y+\Delta y=\dfrac{c}{(x+\Delta x)^۲}$

عمل دوم -

$$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^۲}$$

$$y \quad =\frac{c}{x^۲}$$

$$\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^۲}-\frac{c}{x^۲}=\frac{-c\cdot\Delta x(۲x+\Delta x)}{x^۲(x+\Delta x)^۲}$$

عمل سوم - $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-c\cdot\dfrac{۲x+\Delta x}{x^۲(x+\Delta x)^۲}$

عمل چهارم - در طرف راست ، Δx بسمت صفر میل میکند و بنابر (A) داریم :

جواب : $\dfrac{dy}{dx}=-c\cdot\dfrac{۲x}{x^۲(x)^۲}=-\dfrac{۲c}{x^۳}$

یا $y'=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x^۲}\right)=-\dfrac{۲c}{x^۳}$

تمرین

مشتق توابع زیر را با بکار بستن قاعدهٔ کلی بالا حساب کنید :

۱) $y=۲-۳x$ $\qquad y'=-۳$

۲) $y=mx+b$ $\qquad y'=m$

۳) $y=ax^۲$ $\qquad y'=۲ax$

٤) $s=۲t-t^۲$ $\qquad s'=۲-۲t$

٥) $y=cx^۳$ $\qquad y'=۳cx^۲$

٦) $y=۳x-x^۳$ $\qquad y'=۳-۳x^۲$

۷) $u=٤v^۲+۲v^۳$ $\qquad u'=۸v+٦v^۲$

۸) $y=x^٤$ $\qquad y'=٤x^۳$

۹) $\rho=\frac{۲}{\theta+۱}$ $\qquad$ $\frac{d\rho}{d\theta}=-\frac{۲}{(\theta+۱)^{۲}}$

۱۰) $y=\frac{۳}{x^{۲}+۲}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{٦x}{(x^{۲}+۲)^{۲}}$

۱۱) $s=\frac{t+۴}{t}$ $\qquad$ $\frac{ds}{dt}=-\frac{۴}{t^{۲}}$

۱۲) $y=\frac{۱}{۱-۲x}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=\frac{۲}{(۱-۲x)^{۲}}$

۱۳) $\rho=\frac{\theta}{\theta+۲}$ $\qquad$ $\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{۲}{(\theta+۲)^{۲}}$

۱۴) $s=\frac{At+B}{Ct+D}$ $\qquad$ $\frac{ds}{dt}=\frac{AD-BC}{(Ct+D)^{۲}}$

۱۵) $y=\frac{x^{۳}+۱}{x}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=۲x-\frac{۱}{x^{۲}}$

۱٦) $y=\frac{۱}{x^{۲}+a^{۲}}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x}{(x^{۲}+a^{۲})^{۲}}$

۱۷) $y=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=\frac{۱-x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$

۱۸) $y=\frac{x^{۲}}{۴-x^{۲}}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=\frac{۸x}{(۴-x^{۲})^{۲}}$

۱۹) $y=۳x^{۲}-۴x-۵$ $\qquad$ ۲۰) $s=at^{۲}+bt+c$

۲۱) $u=۲v^{۳}-۳v^{۲}$ $\qquad$ ۲۲) $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$

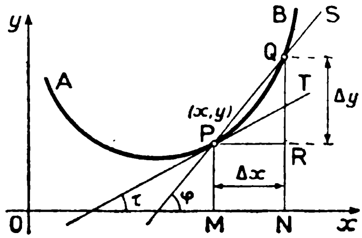
۲۳) $\rho=(a-b\theta)^{۲}$ $\qquad$ ۲۴) $y=(۲-x)(۱-۲x)$

۲۵) $y=(Ax+B)(Cx+D)$ $\qquad$ ۲٦) $s=(a+bt)^{۳}$

۲۷) $y=\dfrac{x}{a+bx^2}$ ۲۸) $y=\dfrac{a+bx^2}{x^2}$

۲۹) $y=\dfrac{x^2}{a+bx^2}$

۲۸- تعبیر هندسی مشتق. - اکنون به بیان قضیه‌ای میپردازیم که پایهٔ تمام تعبیرات حساب دیفرانسیل در هندسه است. قبلاً تعریف مماس به خم در یک نقطه ازخم را یادآورمیشویم. قاطع مار بر P و یک نقطهٔ نزدیک به آن، مانند Q، را درنظر میگیریم (شکل ٦). فرض میکنیم نقطهٔ Q روی خم AB تغییرمکان میدهد و بسمت P میل میکند. دراین‌صورت خط قاطع PQ حول نقطهٔ P میچرخد وحد آن، یعنی PT، بنابرتعریف، خط مماس به منحنی در نقطهٔ P است. اگر



شکل ٦

$$y=f(x) \tag{1}$$

معادلهٔ خم AB باشد، این خم منحنی نمایش تابع $f(x)$ است.

مشتق (۱) را با استفاده ازقاعدهٔ کلی مذکورحساب میکنیم و با درنظرگرفتن شکل ٦ به مفهوم هندسی هرعمل توجه مینماییم. روی خم AB نقطه‌ای مانند $P(x, y)$ و نقطهٔ دیگری مانند $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ نزدیک به P درنظر میگیریم.

عمل اول - $y+\Delta y=f(x+\Delta x) \quad =NQ$

عمل دوم - $y+\Delta y=f(x+\Delta x) \quad =NQ$

$$y \quad =f(x) \quad =MP=NR$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=RQ$$

عمل سوم - $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{RQ}{MN}=\dfrac{RQ}{PR}$

$=tg\ \widehat{RPQ}=tg\ \varphi=$ [شیب یاضریب زاویهٔ قاطع PQ]

می‌بینیم نسبت نمو $\triangle y$ به $\triangle x$ برابر شیب قاطع PQ است که مختصات دوسرش بترتیب (x , y) و $(x+\triangle x , y+\triangle y)$ است.

اکنون به تعبیر هندسی عمل چهارم میپردازیم. چون x مقدار ثابتی است، P نقطهٔ ثابتی است وچون $\triangle x$ تغییرمیکند وبسمت صفرمیگراید، نقطهٔ Q روی خم AB تغییرمکان میدهد و بسمت P میل میکند. پس خط قاطع PQ که همواره بردونقطهٔ P و Q میگذرد، حول نقطهٔ P میچرخد و حد آن خط مماس به منحنی AB در نقطهٔ P است. در شکل ٦

$$\varphi = [\text{زاویهٔ خط قاطع PQ با محور Ox}]$$

$$\tau = [\text{زاویهٔ خط مماس PT با محور Ox}]$$

پس $\tau = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \varphi$ است. فرض میکنیم $tg\,\varphi$ تابعی پیوسته است (شمارهٔ ۷۰ را ببینید)، بنابراین:

عمل چهارم - $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} tg\,\varphi = tg\,\tau$$

$$= [\text{شیب خط مماس به خم در نقطهٔ P}]$$

بدین ترتیب نتیجهٔ مهم زیر بدست میاید:

قضیه - مقدار مشتق درهر نقطه از خم برابر است با شیب خط مماس به خم در آن نقطه.

همین مسئلهٔ خط مماس است که لیبنیتس* رابه کشف حساب دیفرانسیل هدایت کرد.

---

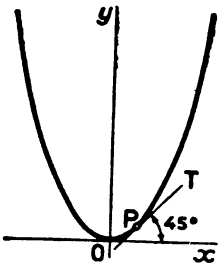
* گتفرید ویلهلم لیبنیتس (۱۷۱٦ - ۱٦٤٦) Gottfried Wilhelm Leibnitz در شهر لیپزیگ بدنیا آمد. استعداد فوق‌العاده‌اش در تحقیقات بدیعی که در رشته‌های گوناگون دانش بشری کرده است، تجلی نمود. او اولین کسی است که کشفیاتش دربارهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال در مقالهٔ کوتاهی در Acta Eruditorum به سال ۱٦۸٤ در لیپزیگ منتشر شد. نسخهٔ دست نویس نیوتن دربارهٔ Fluxions قبل‌از این تاریخ وجود داشته است و بعضیها معتقدند که لیبنیتس اندیشه‌های نوی‌ازآن‌اخذ کرده است. نظر ریاضیدانان کنونی براین‌است که نیوتن‌ولیبنیتس حساب دیفرانسیل‌وانتگرال را مستقل از یکدیگر اختراع کرده‌اند. نشانه‌ها و علاماتی که امروز بکار میروند همانهایی است که لیبنیتس بکار برده است.

مثال - ضریب زاویهٔ خط مماس به سهمی $y=x^۲$ را در رأس و در نقطهٔ به طول $x=\frac{۱}{۲}$ حساب کنید.

حل - مشتق تابع $x^۲$ را باستفاده از قاعدهٔ کلی (شمارهٔ ۲۷) حساب میکنیم، داریم:

$$\frac{dy}{dx}=۲x=\left[\begin{array}{c}\text{شیب خط مماس به خم در هرنقطهٔ}\\ \text{اختیاری ازخم به مختصات } (x\,,\,y)\end{array}\right] \qquad (۲)$$

به منظورپیدا کردن شیب خط مماس در رأس در رابطهٔ (۲) بجای x صفرمیگذاریم، $\frac{dy}{dx}=۰$ میشود. بنابراین خط مماس در رأس دارای شیبی برابر صفر است، یعنی خط مماس در رأس موازی محور Ox است، و چون مختصات رأس (۰ , ۰) است، مماس مذکوربر Ox منطبق است.



شکل ۷

برای یافتن شیب خط مماس در نقطهٔ P به طول $\frac{۱}{۲}$، در رابطهٔ (۲) بجای x، $\frac{۱}{۲}$ میگذاریم، $\frac{dy}{dx}=۱$ میشود. بنابراین خط مماس به خم درنقطهٔ P با محور Ox زاویهٔ ۴۵ درجه میسازد (شکل ۷).

تمرین

شیب خط مماس به هریک ازخمهای زیر را درنقطهٔ داده شده حساب کنید و زاویه‌ای را که این مماسها با محور Ox میسازند، تعیین نمایید. سپس خم نمایش معادلات و خطوط مماس مذکور را رسم کنید و از روی آن درستی جوابها را بیازمایید:

۱) $y=x^۲-۲$ در نقطهٔ به طول $x=۱$

جواب: شیب خط مماس ۲ و زاویهٔ آن با محور x ها $۶۳^\circ\ ۲۶'$ است.

۲) $y=۲x-\frac{x^۲}{۲}$ در نقطهٔ به طول $x=۳$

۳) $y=\frac{4}{x-1}$ در نقطهٔ به طول $x=2$

۴) $y=3+3x-x^3$ در نقطهٔ به طول $x=-1$

۵) $y=\frac{x}{x+1}$ در نقطهٔ به طول $x=1$

۶) مماس به کدام نقطه از خم نمایش تابع $y=7x-3x^2$ با محور Ox زاویهٔ ۴۵ درجه میسازد ؟ جواب : $(1, 4)$

۷) مماس به کدام نقطه از خم نمایش تابع $3y=x^3-3x$ با خط $y=3x$ موازی است ؟

جواب : نقاط $(\frac{2}{3}, 2)$ و $(-\frac{2}{3}, -2)$

در مسائل زیرنخست نقاط تقاطع دو خم را پیدا کنید ، سپس شیب خطوط مماس به هریک از دو خم را در نقاط تقاطع حساب نمایید وسرانجام زاویهٔ بین دو خم را بدست‌آورید [دستور (۲) ی صفحهٔ ۷ را ببینید] .

۸) $y=1-x^2$ ، $y=x^2-1$

جواب : زاویهٔ تقاطع $= 53^\circ\ 8' = arc\ tg\ \frac{4}{3}$

۹) $y=x^2$ ، $x+y-2=0$

۱۰) $y=x^3$ ، $y=1+x-x^2$

۱۱) زاویهٔ تقاطع دوخم $9y=x^3$ و $y=6+8x-x^3$ رادرنقطهٔ $(3, 3)$ پیدا کنید. جواب : $21^\circ\ 27'$

فصل چهارم

مشتق توابع جبری

۲۹ - اهمیت قاعدهٔ کلی . - قاعدهٔ کلی مشتق گیری که درفصل پیش (شمارهٔ ۲۷) ذکرگردید اساس کاراست زیرا این قاعده مستقیماً ازتعریف مشتق اخذ شده است وخواننده باید باآن آشنایی کامل داشته باشد. اما بکاربستن سیستماتیک این قاعده بطورکلی دشوار و پر زحمت است. بنابراین برای آسانی محاسبهٔ مشتق بعضی‌از صورتهای نمونه که اغلب پیش میایند ، ازقاعدهٔ کلی قاعده‌های خاصی استنتاج کرده‌اند وآنها را به شکل دستورهایی درآورده‌اند. در زیر صورتی از آنها داده شده است. خواننده باید آنها را درست بفهمد ، دقیق بخاطر بسپارد و صحیح بکار بندد.

دراین دستورها u و v و w توابعی از x میباشند و نسبت به x دارای مشتقند.

دستورهای مشتق گیری

I $$\frac{dc}{dx}=۰$$

II $$\frac{dx}{dx}=۱$$

III $$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

IV $$\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$$

V $$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-۱}\frac{dv}{dx}$$

VIa $$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

VIIa $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

VIII $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$ y تابعی از v است

IX $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$ y تابعی از x است

۳۰- مشتق مقدار ثابت. - تابعی که به‌ازای جمیع مقادیر متغیر مستقل ثابت بماند، مقدار ثابتی است و میتوان آن را به صورت

$$y=c$$

نوشت. اگر به x نموی مانند Δx بدهیم، مقدار تابع عوض نمیشود یعنی $\Delta y=0$ است و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

اما $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=0$$

پس I $$\frac{dc}{dx}=0$$

یعنی مشتق مقدار ثابت صفر است.

این نتیجه باتوجه به یک مطلب بآسانی بدست میاید و آن اینکه خم نمایش $y=c$ خطی موازی محور Ox وشیب آن صفر است. اما میدانیم که اندازهٔ شیب برابرمقدارمشتق است (شمارهٔ ۲۸).

۳۱- مشتق یك متغیر نسبت به خودش. - اگر

$$y=x$$

باشد ، با بکار بستن قاعدهٔ کلی (شمارهٔ ۲۷) داریم :

عمل اول - $y+\Delta y=x+\Delta x$

عمل دوم - $\Delta y=\Delta x$

عمل سوم - $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$

عمل چهارم - $\frac{dy}{dx}=1$

پس $$\frac{dx}{dx}=1 \qquad \text{II}$$

یعنی **مشتق یك متغیر نسبت به خودش برابر یك است.**

این نتیجه با توجه به اینکه شیب خط $y=x$ برابر یک است ، نیزبدست میاید.

۳۲- مشتق مجموع جبری چند تابع. - اگر

$$y=u+v-w$$

باشد ، بنابر قاعدهٔ کلی داریم :

عمل اول - $y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-w-\Delta w$

عمل دوم - $\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w$

عمل سوم - $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}$

اما سه تابع u و v و w دارای مشتق‌اند یعنی

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx} \quad , \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx} \quad , \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{dw}{dx}$$

پس بنابر رابطهٔ (۱) شمارهٔ ۱۶ :

عمل چهارم -
$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

بنابراین
$$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx} \qquad \text{III}$$

برای مجموع جبری چندین تابع نیز میتوان استدلال مشابهی کرد و میتوان گفت که **مشتق مجموع جبری عدهٔ محدودی از توابع برابر است با مجموع جبری مشتقهای آنها.**

۳۳- مشتق حاصل‌ضرب یك تابع در یك مقدار ثابت. - اگر

$$y=cv$$

باشد ، بنابر قاعدهٔ کلی داریم :

عمل اول -
$$y+\triangle y=c(v+\triangle v)=cv+c\triangle v$$

عمل دوم -
$$\triangle y=c\triangle v$$

عمل سوم -
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=c\,\frac{\triangle v}{\triangle x}$$

پس بنابر رابطهٔ (٤) شمارهٔ ١٦ :

عمل چهارم -
$$\frac{dy}{dx}=c\,\frac{dv}{dx}$$

یا
$$\frac{d}{dx}(cv)=c\,\frac{dv}{dx} \qquad \text{IV}$$

یعنی **مشتق حاصل‌ضرب یك مقدار ثابت در یك تابع برابر است با حاصل‌ضرب آن مقدار ثابت درمشتق آن تابع.**

۳٤- مشتق حاصل‌ضرب دو تابع. - اگر

$$y=uv$$

باشد ، بنابر قاعدهٔ کلی داریم :

عمل اول -
$$y+\triangle y=(u+\triangle u)(v+\triangle v)$$

دو عامل طرف راست را درهم ضرب میکنیم :

$$y+\Delta y=uv+u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$$

عمل دوم - $$\Delta y=u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$$

عمل سوم - $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

با استفاده از روابط (۲) و (٤) شمارهٔ ۱٦ و با توجه به اینکه $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$ است ، حد حاصل‌ضرب $\Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ صفر است و داریم :

عمل چهارم - $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

یا $$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\qquad V$$

یعنی مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است باحاصل‌ضرب تابع اول در مشتق تابع دوم باضافهٔ حاصل‌ضرب تابع دوم درمشتق تابع اول.

۳۵- مشتق حاصل‌ضرب n تابع (n عددی صحیح ومعین است). - اگردوطرف دستور V را به uv تقسیم کنیم ، به صورت

$$\frac{\frac{d}{dx}(uv)}{uv}=\frac{\frac{du}{dx}}{u}+\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

در میاید. پس اگر حاصل‌ضرب n تابع داشته باشیم :

$$y=v_1v_2\ldots v_n$$

میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{\frac{d}{dx}(v_1v_2\ldots v_n)}{v_1v_2\ldots v_n}=\frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1}+\frac{\frac{d}{dx}(v_2v_3\ldots v_n)}{v_2v_3\ldots v_n}$$

$$=\frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1}+\frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2}+\frac{\frac{d}{dx}(v_3v_4\ldots v_n)}{v_3v_4\ldots v_n}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(v_1v_2\ldots v_n)}{v_1v_2\ldots v_n}=\frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1}+\frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2}+\frac{\frac{dv_3}{dx}}{v_3}+\cdots+\frac{\frac{dv_n}{dx}}{v_n}$$

دو طرف را در $v_1v_2 \ldots v_n$ ضرب میکنیم ، رابطهٔ زیر بدست میاید :

$$\frac{d}{dx}(v_1v_2\ldots v_n)=(v_2v_3\ldots v_n)\frac{dv_1}{dx}+(v_1v_3\ldots v_n)\frac{dv_2}{dx}+\cdots$$

$$+(v_1v_2\ldots v_{n-1})\frac{dv_n}{dx}$$

یعنی مشتق حاصلضرب n تابع (n صحیح و معین) برابر مجموع تمام حاصل ضربهایی است که با ضرب کردن مشتق هر تابع در بقیهٔ توابع بدست میایند.

۳۶- مشتق قوهٔ معین و ثابتی از یك تابع. ـ اگردر دستور اخیر تمام عوامل ضرب برابر v باشند ، داریم :

$$\frac{\frac{d}{dx}(v^n)}{v^n}=n\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

یا

$$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx} \qquad \text{VI}$$

اگر $v=x$ باشد :

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1} \qquad \text{VIa}$$

ما دراینجا دستور VI را تنها در حالتی ثابت کردیم که n عددی صحیح و مثبت است. در شمارهٔ ۶۰ نشان خواهیم داد که این دستوربرای جمیع مقادیر n درست استواز هم اکنون این نتیجهٔ کلی را بکار میبریم و میگوییم :

مشتق قوهٔ n ام هرتابع برابراستبا n برابرحاصلضرب قوهٔ(۱ ــ n)ام آن تابع در مشتق آن تابع.

۳۷- مشتق خارج قسمت دو تابع. ـ اگر

$$y=\frac{u}{v} \qquad (v\neq 0)$$

باشد ، بنابر قاعدهٔ کلی داریم :

عمل اول -
$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

عمل دوم -
$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

عمل سوم -
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

و باستفاده از روابط (۱) تا (۴) شمارهٔ ۱۶ داریم :

عمل چهارم -
$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

یا
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{VII}$$

یعنی مشتق خارج قسمت دو تابع برابر است با «حاصل‌ضرب مخرج در مشتق صورت منهای حاصل‌ضرب صورت درمشتق مخرج» تقسیم بر مجذور مخرج.

اگر مخرج مقدار ثابتی باشد ، در دستور VII بجای v ، c میگذاریم ، داریم :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c} \qquad \text{VIIa}$$

[زیرا $\frac{dv}{dx}=\frac{dc}{dx}=0$ است.]

دستور اخیر را از دستور IV نیز میتوان بدست آورد. برای این کار مینویسیم :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

یعنی مشتق خارج قسمت هر تابع بر یك مقدار ثابت برابر است با خارج قسمت مشتق آن تابع بر آن مقدار ثابت.

تمرین*

مشتق توابع زیر را حساب کنید :

۱) $y=x^3$

حل - بنابر VIa ، $[n=3]$

جواب : $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2$

۲) $y=ax^4-bx^2$

حل - بنابر III

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax^4-bx^2)=\frac{d}{dx}(ax^4)-\frac{d}{dx}(bx^2)$$

بنابر IV $=a\frac{d}{dx}(x^4)-b\frac{d}{dx}(x^2)$

بنابر VIa جواب : $=4ax^3-2bx$

۳) $y=x^{\frac{4}{3}}+5$

حل - بنابر III $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}})+\frac{d}{dx}(5)$

بنابر VIa و I جواب : $=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

---

* پس از آموختن مشتق‌گیری ، خواننده باید مشتق توابع ساده را در ذهن حساب کند .

۴) $y=\dfrac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\dfrac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}+8\sqrt[7]{x^3}$

حل - بنابر III

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3x^{\frac{13}{5}})-\frac{d}{dx}(7x^{-\frac{1}{3}})+\frac{d}{dx}(8x^{\frac{3}{7}})$$

بنابر IV و VIa

جواب : $$=\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}}+\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}$$

۵) $y=(x^2-3)^5$

حل - بنابر VI
$$\frac{dy}{dx}=5(x^2-3)^4\frac{d}{dx}(x^2-3)$$

[زیرا $v=x^2-3$ و $n=5$ است.]

جواب : $$=5(x^2-3)^4\cdot 2x=10x(x^2-3)^4$$

میتوان نخست تابع را بنابر دستور دو جمله‌ای نیوتن [صفحهٔ ۳ ، (۳)] بسط داد و سپس دستور III را بکاربست. اما راه مذکور بهتر است.

۶) $y=\sqrt{a^2-x^2}$

حل - بنابر VI

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)$$

[زیرا $v=a^2-x^2$ و $n=\frac{1}{2}$ است.]

جواب : $$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

۷) $y=(3x^2+2)\sqrt{1+5x^2}$

حل - بنابر V

$$\frac{dy}{dx}=(۳x^۲+۲)\ \frac{d}{dx}(۱+۵x^۲)^{\frac{۱}{۲}}+(۱+۵x^۲)^{\frac{۱}{۲}}\frac{d}{dx}(۳x^۲+۲)$$

[زیرا $v=(۱+۵x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ و $u=۳x^۲+۲$ است.]

بنابر VI و غیره

$$=(۳x^۲+۲)\ \frac{۱}{۲}\ (۱+۵x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}\frac{d}{dx}(۱+۵x^۲)+(۱+۵x^۲)^{\frac{۱}{۲}}۶x$$

$$=(۳x^۲+۲)(۱+۵x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}۵x+۶x(۱+۵x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

جواب : $$=\frac{۵x(۳x^۲+۲)}{\sqrt{۱+۵x^۲}}+۶x\sqrt{۱+۵x^۲}=\frac{۴۵x^۳+۱۶x}{\sqrt{۱+۵x^۲}}$$

۸) $y=\dfrac{a^۲+x^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$

حل - بنابر VII

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a^۲-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}\frac{d}{dx}(a^۲+x^۲)-(a^۲+x^۲)\frac{d}{dx}(a^۲-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{a^۲-x^۲}$$

$$=\frac{۲x(a^۲-x^۲)+x(a^۲+x^۲)}{(a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

[صورت و مخرج را در $(a^۲-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ ضرب کرده‌ایم.]

جواب : $$=\frac{۳a^۲x-x^۳}{(a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

درستی تساویهای زیر را نشان دهید :

۹) $\frac{d}{dx}(۳x^۴-۲x^۲+۸)=۱۲x^۳-۴x$

۱۰) $\frac{d}{dx}(۴+۳x-۲x^۳)=۳-۶x^۲$

۱۱) $\frac{d}{dt}(at^۵-۵bt^۳)=۵at^۴-۱۵bt^۲$

۱۲) $\frac{d}{dz}\left(\frac{z^۲}{۲}-\frac{z^۷}{۷}\right)=z-z^۶$

۱۳) $\frac{d}{dx}\sqrt{v}=\frac{۱}{۲\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}$

۱۴) $\frac{d}{dx}\left(\frac{۲}{x}-\frac{۳}{x^۲}\right)=-\frac{۲}{x^۲}+\frac{۶}{x^۳}$

۱۵) $\frac{d}{dt}\left(۲t^{\frac{۴}{۳}}-۳t^{\frac{۲}{۳}}\right)=\frac{۸}{۳}t^{\frac{۱}{۳}}-۲t^{-\frac{۱}{۳}}$

۱۶) $\frac{d}{dx}\left(۲x^{\frac{۳}{۴}}+۴x^{-\frac{۱}{۴}}\right)=\frac{۳}{۲}t^{-\frac{۱}{۴}}-x^{-\frac{۵}{۴}}$

۱۷) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{۲}{۳}}-a^{\frac{۲}{۳}}\right)=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$

۱۸) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a+bx+cx^۲}{x}\right)=c-\frac{a}{x^۲}$

۱۹) $y=\frac{\sqrt{x}}{۲}-\frac{۲}{\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۴\sqrt{x}}+\frac{۱}{x\sqrt{x}}$

۲۰) $s=\frac{a+bt+ct^{۲}}{\sqrt{t}}$ $\qquad \frac{ds}{dt}=-\frac{a}{۲t\sqrt{t}}+\frac{b}{۲\sqrt{t}}+\frac{۳c\sqrt{t}}{۲}$

۲۱) $y=\sqrt{ax}+\frac{a}{\sqrt{ax}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{۲\sqrt{ax}}-\frac{a}{۲x\sqrt{ax}}$

۲۲) $r=\sqrt{۱-۲\theta}$ $\qquad \frac{dr}{d\theta}=-\frac{۱}{\sqrt{۱-۲\theta}}$

۲۳) $f(t)=(۲-۳t^{۲})^{۳}$ $\qquad f'(t)=-۱۸t(۲-۳t^{۲})^{۲}$

۲٤) $F(x)=\sqrt[۳]{٤-۹x}$ $\qquad F'(x)=-\frac{۳}{(٤-۹x)^{\frac{۲}{۳}}}$

۲۵) $y=\frac{۱}{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{(a^{۲}-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۲٦) $f(\theta)=(۲-۵\theta)^{\frac{۳}{۵}}$ $\qquad f'(\theta)=-\frac{۳}{(۲-۵\theta)^{\frac{۲}{۵}}}$

۲۷) $y=\left(a-\frac{b}{x}\right)^{۲}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲b}{x^{۲}}\left(a-\frac{b}{x}\right)$

۲۸) $y=\left(a+\frac{b}{x^{۲}}\right)^{۳}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{٦b}{x^{۳}}\left(a+\frac{b}{x^{۲}}\right)^{۲}$

۲۹) $y=x\sqrt{a+bx}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲a+۳bx}{۲\sqrt{a+bx}}$

۳۰) $s=t\sqrt{a^{۲}+t^{۲}}$ $\qquad \frac{ds}{dt}=\frac{a^{۲}+۲t^{۲}}{\sqrt{a^{۲}+t^{۲}}}$

۳۱) $y=\frac{a-x}{a+x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{۲a}{(a+x)^{۲}}$

٣٢) $y=\frac{a^٢+x^٢}{a^٢-x^٢}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{٤a^٢x}{(a^٢-x^٢)^٢}$

٣٣) $y=\frac{\sqrt{a^٢+x^٢}}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{a^٢}{x^٢\sqrt{a^٢+x^٢}}$

٣٤) $y=\frac{x}{\sqrt{a^٢-x^٢}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a^٢}{(a^٢-x^٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

٣٥) $r=\theta^٢\sqrt{٣-٤\theta}$ $\qquad \frac{dr}{d\theta}=\frac{٦\theta-١٠\theta^٢}{\sqrt{٣-٤\theta}}$

٣٦) $y=\sqrt{\frac{١-cx}{١+cx}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{c}{(١+cx)\sqrt{١-c^٢x^٢}}$

٣٧) $y=\sqrt{\frac{a^٢+x^٢}{a^٢-x^٢}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{٢a^٢x}{(a^٢-x^٢)\sqrt{a^٤-x^٤}}$

٣٨) $s=\sqrt[٣]{\frac{٢+٣t}{٢-٣t}}$ $\qquad \frac{ds}{dt}=\frac{٤}{(٢+٣t)^{\frac{٢}{٣}}(٢-٣t)^{\frac{٤}{٣}}}$

٣٩) $y=\sqrt{٢px}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$

٤٠) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^٢-x^٢}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^٢x}{a^٢y}$

٤١) $y=\left(a^{\frac{٢}{٣}}-x^{\frac{٢}{٣}}\right)^{\frac{٣}{٢}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\sqrt[٣]{\frac{y}{x}}$

مشتق توابع زیر را حساب کنید :

٤٢) $f(x)=\sqrt{٢x}+\sqrt[٣]{٣x}$ $\qquad$ ٤٣) $y=\frac{٢-x}{١+٢x^٢}$

۴۴) $y=\frac{x}{\sqrt{a-bx}}$

۴۵) $s=\frac{\sqrt{a+bt}}{t}$

۴۶) $r=\frac{\sqrt[۳]{a+b\theta}}{\theta}$

۴۷) $y=x^{۲}\sqrt{۵-۲x}$

۴۸) $y=x\sqrt[۳]{۲+۳x}$

۴۹) $s=\sqrt{۲t-\frac{۱}{t^{۲}}}$

۵۰) $y=(x+۲)^{۲}\sqrt{x^{۲}+۲}$

۵۱) $y=\frac{\sqrt{۱+۲x}}{\sqrt[۳]{۱+۳x}}$

در هریک از مسائل زیر مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به‌ازای مقدار داده شدهٔ x حساب کنید :

۵۲) $y=(x^{۲}-x)^{۳}\ ;\ x=۳$ — جواب : ۵۴۰

۵۳) $y=\sqrt[۳]{x}+\sqrt{x}\ ;\ x=۶۴$ — $\frac{۱}{۱۲}$

۵۴) $y=(۲x)^{\frac{۱}{۳}}+(۲x)^{\frac{۲}{۳}}\ ;\ x=۴$ — $\frac{۵}{۶}$

۵۵) $y=\sqrt{۹+۴x^{۲}}\ ;\ x=۲$ — $\frac{۸}{۵}$

۵۶) $y=\frac{۱}{\sqrt{۲۵-x^{۲}}}\ ;\ x=۳$ — $\frac{۳}{۶۴}$

۵۷) $y=\frac{\sqrt{۱۶+۳x}}{x}\ ;\ x=۳$ — $-\frac{۴۱}{۹۰}$

۵۸) $y=x\sqrt{۸-x^{۲}}\ ;\ x=۲$ — ۰

۵۹) $y=x^{۲}\sqrt{۱+x^{۳}}\ ;\ x=۲$ — ۲۰

٦٠) $y=(٤-x^٢)^٣ \,;\, x=٣$ ٦١) $y=\frac{x^٢+٢}{٢-x^٢} \,;\, x=٢$

٦٢) $y=\frac{\sqrt{٥-٢x}}{٢x+١} \,;\, x=\frac{١}{٢}$ ٦٣) $y=x\sqrt{٣+٢x} \,;\, x=٣$

٦٤) $y=\sqrt{\frac{٤x+١}{٥x-١}} \,;\, x=٢$ ٦٥) $y=\sqrt{\frac{x^٢-٥}{١٠-x^٢}} \,;\, x=٣$

٣٨- مشتق تابع تابع. - گاهی بجای آنکه y به صورت تابعی از x باشد ، به صورت تابعی از متغیر v است و v تابعی از x است. در این صورت y ، با واسطهٔ v ، تابعی از x است و آن را **تابع تابع** مینامند.

مثلاً اگر
$$y=\frac{٢v}{١-v^٢}$$
و
$$v=١-x^٢$$
باشد ، y تابع تابع است. y را میتوان با حذف v به صورت تابعی از x درآورد. اما این کار ، اگر منظور محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$ باشد ، بطورکلی بهترین راه نیست.

اگر $y=f(v)$ و $v=\varphi(x)$ باشد ، y ، با واسطهٔ v ، تابعی از x است. بنابراین اگر به x نموی مانند Δx بدهیم ، v نیزنموی مانند Δv میکند و به دنبال‌آن y نیز نموی مانند Δy مینماید. قاعدهٔ کلی را ، همزمان ، برای این دو تابع بکار میبریم :

$$v=\varphi(x) \qquad\qquad y=f(v)$$

عمل اول -
$$v+\Delta v=\varphi(x+\Delta x) \qquad\qquad y+\Delta y=f(v+\Delta v)$$

عمل دوم -
$$v+\Delta v=\varphi(x+\Delta x) \qquad\qquad y+\Delta y=f(v+\Delta v)$$
$$v \quad =\varphi(x) \qquad\qquad y \quad =f(v)$$
$$\Delta v=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x) \qquad\qquad \Delta y=f(v+\Delta v)-f(v)$$

عمل سوم -
$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \qquad\qquad \frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v}$$

طرفهای چپ دو تساوی اخیر صورتی از نسبت نمو تابع به نمو متغیر نظیر را نشان میدهد و طرفهای راست این دوتساوی همان نسبت را به صورت دیگری بیان میکند. قبل‌از گرایش بسمت حد، حاصل‌ضرب این دو نسبت را تشکیل میدهیم و بدین منظور دو طرف چپ را درهم‌ضرب میکنیم، داریم: $\frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$

حاصل‌ضرب این دو عامل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ است و آن را به صورت زیر مینویسیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

عمل چهارم - اگر Δx را بسمت‌صفرمیل دهیم، Δv نیزبسمت صفرمیل میکند وداریم:

بنابر رابطهٔ (۲)ی شمارهٔ ۱۶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \text{(A)}$$

این رابطه را به صورت زیر نیز میتوان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = f'(v) \cdot \varphi'(x) \qquad \text{(B)}$$

پس **اگر** $y=f(v)$ و $v=\varphi(x)$ **باشد، مشتق** y **نسبت به** x **برابر است با مشتق** y **نسبت به** v **ضرب در مشتق** v **نسبت به** x.

۳۹- مشتق تابع معکوس. - اگر y تابعی از x مانند

$$y=f(x)$$

باشد وبتوانیم این معادله را نسبت به x حل کنیم‌و x را به صورت تابع صریحی از y مانند

$$x=\varphi(y)$$

بدست آوریم، دو تابع

$$f(x) \text{ و } \varphi(y)$$

که دریکی x ودردیگری y متغیرمستقل است، بنابرتعریف‌دو **تابع معکوس** یکدیگرند. به منظور مشخص کردن آنها معمولاً اولی را **تابع مستقیم** و دومی را **تابع معکوس** مینامیم. بنابراین اگردرشالهای زیر طرف راست ستون سمت چپ‌را به عنوان توابع مستقیم درنظر بگیریم، طرف راست نظیر از ستون سمت راست، توابع معکوس آنها خواهند بود.

$$y = x^{۲} + ۱ \quad , \quad x = \pm\sqrt{y - ۱}$$

$$y = a^x \quad , \quad x = \log_a y$$

$$y = \sin x \quad , \quad x = \arc\sin y$$

اکنون مشتق دوتابع معکوس

$$y = f(x) \quad , \quad x = \varphi(y)$$

را از روی **قاعدهٔ کلی** ، همزمان ، حساب میکنیم :

عمل اول- $x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$ $\qquad$ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

عمل دوم- $x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$ $\qquad$ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$$\begin{array}{ll} x = \varphi(y) & \qquad y = f(x) \\ \hline \Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) & \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

عمل سوم-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}$$

طرف چپ این دو رابطه را در هم ضرب میکنیم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = ۱$$

یا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

عمل چهارم- وقتی Δx را بسمت‌صفرمیل دهیم ، Δy نیز معمولاً بسمت صفرمیل میکند و تساوی اخیر به صورت زیر در میاید :

بنابر رابطهٔ (۲)ی شمارهٔ ۱۶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{dx}{dy}} \qquad (C)$$

یا
$$f'(x)=\frac{۱}{\varphi'(y)} \qquad (D)$$

یعنی مشتق تابع معکوس برابر است باعکس مشتق تابع مستقیم .

۴۰- تابع ضمنی . - اگررابطهٔ بین x و y به صورت معادلهٔ حل نشده‌ای نسبت به y باشد ، میگویند y تابعی ضمنی از x است. مثلاً معادلهٔ

$$x^{۲}-۴y=۰ \qquad (۱)$$

y را به صورت تابعی ضمنی از x بیان میکند. روشن است که این معادله x را نیزبه‌صورت تابعی ضمنی از y نشان میدهد.

گاهی میتوان معادله‌ای را که مبین یک تابع ضمنی است نسبت به یکی از متغیرها حل کرد و تابع صریحی بدست آورد . مثلاً معادلهٔ (۱) را میتوان نسبت به y حل نمود و رابطهٔ

$$y=\frac{۱}{۴}x^{۲}$$

را که تابع صریحی از x است ، پیدا کرد. اما دربسیاری ازحالات حل معادلهٔ ضمنی نسبت به هیچیک ازمتغیرها ممکن نیست و یا توابع صریحی که بدست میایند بسیار پیچیده و بغرنج میباشند.

۴۱- مشتق تابع ضمنی . - اگر y بوسیلهٔ تابعی‌ضمنی‌ازx در دست باشد ، همان طورکه درشمارهٔ قبل ذکرگردید ، ممکن‌است حل آن نسبت به یکی ازمتغیرها (یعنی‌پیدا کردن y به صورت تابع صریحی از x یا پیداکردن x به صورت تابع صریحی از y) مفید نباشد.

دراین‌گونه موارد قاعدهٔ زیر را بکار میبریم :

y را تابعی از x درنظرمیگیریم ، مشتق یك یك جملات معادله را ، به همان صورت که داده شده است ، حساب میکنیم و سپس معادلهٔ حاصل را نسبت به $\frac{dy}{dx}$ حل مینماییم.

درستی این قاعده را درشمارهٔ ۲۳۱ نشان خواهیم داد ، ولی اکنون یادآورمیشویم که تنها مقادیری از x و y را میتوان درمشتق حاصل جایگزین کرد که درمعادلهٔ داده شده صدق میکنند.

اکنون تابع ضمنی $ax^{6}+2x^{3}y-y^{7}x=10$

را درنظر میگیریم و با استفاده از قاعدهٔ مذکور $\frac{dy}{dx}$ را پیدا میکنیم :

$$\frac{d}{dx}(ax^{6})+\frac{d}{dx}(2x^{3}y)-\frac{d}{dx}(y^{7}x)=\frac{d}{dx}(10)$$

$$6ax^{5}+2x^{3}\frac{dy}{dx}+6x^{2}y-y^{7}-7xy^{6}\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x^{3}-7xy^{6})\frac{dy}{dx}=y^{7}-6ax^{5}-6x^{2}y$$

جواب : $$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{7}-6ax^{5}-6x^{2}y}{2x^{3}-7xy^{6}}$$

چنانکه دیده میشود مشتق حاصل شامل هردو متغیر x و y است.

تمرین

مشتق توابع زیر را پیدا کنید :

۱) $y=u^{6},\ u=1+2\sqrt{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{6u^{5}}{\sqrt{x}}$

۲) $y=\sqrt{2u}-u^{2},\ u=x^{3}-x$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{\sqrt{2u}}-2u\right)(3x^{2}-1)$

۳) $y=\frac{a-u}{a+u},\ u=\frac{b-x}{b+x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{4ab}{(a+u)^{2}(b+x)^{2}}$

۴) $y=u\sqrt{a^{2}-u^{2}},\ u=\sqrt{1-x^{2}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x(2u^{2}-a^{2})}{\sqrt{(a^{2}-u^{2})(1-x^{2})}}$

۵) $15x=15y+5y^{3}+3y^{5}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+y^{2}+y^{4}}$

۶) $x=\sqrt{y}+\sqrt[۳]{y}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۶y^{\frac{۲}{۳}}}{۳y^{\frac{۱}{۶}}+۲}$

۷) $y^{۲}=۲px$ $\qquad\qquad$ ۸) $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$

۹) $b^{۲}x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۲}b^{۲}$ $\qquad\qquad$ ۱۰) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

۱۱) $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ $\qquad\qquad$ ۱۲) $x^{۳}-۳axy+y^{۳}=۰$

۱۳) $x^{۳}-۳xy^{۲}+y^{۳}=۱۰$ $\qquad\qquad$ ۱۴) $x+۲\sqrt{xy}+y=a$

۱۵) $x^{۲}+a\sqrt{xy}+y^{۲}=b^{۲}$ $\qquad\qquad$ ۱۶) $x^{٤}+٤x^{۲}y^{۲}+y^{٤}=۲۰$

۱۷) $ax^{۳}-۳b^{۲}xy+cy^{۳}=۱$ $\qquad\qquad$ ۱۸) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=۶$

شیب خمهای زیر را در نقاط مذکور پیدا کنید :

۱۹) $x^{۲}+۲xy-۳y^{۲}+۱۱=۰\ ;\ (۲\,,\,۳)$ $\qquad$ جواب : $\dfrac{۵}{۷}$

۲۰) $x^{۳}+۳x^{۲}y+y^{۳}=۳\ ;\ (-۱\,,\,۱)$ $\qquad$ $\dfrac{۱}{۲}$

۲۱) $\sqrt{۲x}+\sqrt{۳y}=۵\ ;\ (۲\,,\,۳)$

۲۲) $x^{۲}+٤\sqrt{xy}+y^{۲}=۲۵\ ;\ (۱\,,\,٤)$

۲۳) $x^{۳}-axy+۳ay^{۲}=۳a^{۳}\ ;\ (a\,,\,a)$

۲٤) $۲x^{۲}+y\sqrt{xy}-y^{۲}=۱۳۲\ ;\ (۸\,,\,۲)$

۲۵) نشان دهید که دو سهمی $y^{۲}=۲px+p^{۲}$ و $y^{۲}=p^{۲}-۲px$ یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع میکنند.

۲۶) نشان دهید که دایرهٔ $x^2+y^2-12x-6y+25=0$ در نقطهٔ $(2, 1)$ به دایرهٔ $x^2+y^2+2x+y=10$ مماس است.

۲۷) زاویهٔ تقاطع خط $y=2x$ و خم $x^2-xy+2y^2=28$ را پیدا کنید.

۲۸) نشان دهید که وقتی دوتابع $f(x)$ و $\varphi(y)$ معکوس یکدیگرند، اگر خم نمایش $-f(x)$ را در عکس‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، خم نمایش $\varphi(x)$ بدست میاید.

تمرین اضافی

۱) معادلهٔ بیضی‌یی را بنویسید که مرکزش رأس سهمی $y^2=2px$ و انتهای یکی از محورهایش کانون این سهمی است، و نیز بیضی مطلوب سهمی مذکور را به‌زاویهٔ قائمه قطع میکند. جواب: $4x^2+2y^2=p^2$

۲) مختصات مرکزدایره‌ای که بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را به زاویهٔ قائمه قطع میکند، $(0, 2a)$ است. شعاع آن را پیدا کنید.

جواب: $r^2=\frac{3}{4}(3a^2+b^2)$

۳) نقطهٔ‌دلخواه P از محیط یک بیضی را به F و F'، دوکانون آن بیضی، وصل میکنیم. نشان دهید که قائم به بیضی در نقطهٔ P نیمساز زاویهٔ FPF' است.

۴) نشان‌دهید که‌خط $Bx+Ay=AB$ تنهاوقتی‌به‌بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ مماس است که $B^2a^2+A^2b^2=A^2B^2$ باشد.

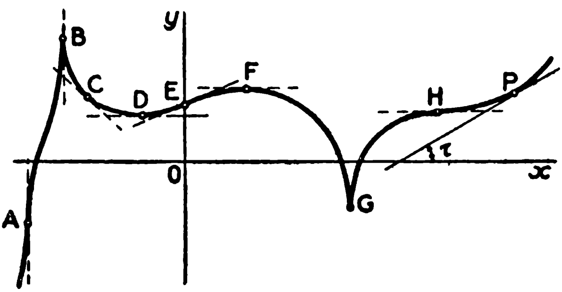
۵) معادلهٔ خط مماس به خم $x^my^n=a^{m+n}$ را در یکی از نقاط آن پیدا کنید و نشان دهید که آن قطعه از خط مماس که بین محورهای مختصات قرار دارد با نقطهٔ تماس به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شده است. جواب: $my_1(x-x_1)+nx_1(y-y_1)=0$

۶) اگر شیب خط مماس به هذلولی $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ برابر k باشد، ثابت کنید که معادلهٔ آن $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$ است و نشان دهید که مکان نقاط تقاطع مماسهای عمود بهم دایرهٔ $x^2+y^2=a^2-b^2$ است.

فصل پنجم

موارد استعمال گوناگون مشتق

۴۲- امتداد خم. - در شمارهٔ ۲۸ نشان دادیم که اگر $y=f(x)$ معادلهٔ خمی مانند شکل ۸ باشد، $\frac{dy}{dx}$ **شیب خط مماس به آن خم در نقطهٔ** $P(x, y)$ است.



شکل ۸

بنابر تعریف، **امتداد خم** در هرنقطه همان امتداد خط مماس به خم در آن نقطه است. اگر τ زاویهٔ خط مماس به خم با محور Ox باشد، شیب خط مماس برابر $tg\,\tau$ است واز آنجا

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau = [P(x\ ,\ y)\ \text{شیب خم در نقطه‌ای مانند}]$$

در نقاطی مانند D و F و H که امتداد خم درآنها موازی محور Ox **وخط مماس افقی‌است، $\tau=0$ واز آنجا $\frac{dy}{dx}=0$ است.**

درنقاطی مانند A و B و G که امتداد خم‌درآنها عمود به محور Ox **و خط مماس عمودی است، $\tau=90^\circ$ و از آنجا $\frac{dy}{dx}$ بینهایت است.**

مثال ۱ - خم نمایش تابع $y=\frac{x^{۳}}{۳}-x^{۲}+۲$ را درنظر میگیریم (شکل ۹) :

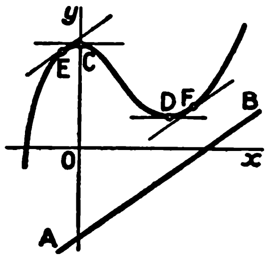
الف - مقدار τ را برای $x=۱$ پیدا کنید.

ب - مقدار τ را برای $x=۳$ پیدا کنید.

پ - درکدام نقطهٔ خم خط مماس موازی محور Ox است ؟

ت - درکدام نقطهٔ خم $\tau=۴۵^{\circ}$ است ؟

ث - درکدام نقطهٔ خم مماس موازی خط $۲x-۳y=٦$ (خط AB) است؟



شکل ۹

حل - ازتابع داده شده مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=x^{۲}-۲x=tg\ \tau$$

الف - وقتی $x=۱$ است ، $tg\ \tau=۱-۲=-۱$ و ازآنجا $\tau=۱۳۵^{\circ}$ است.

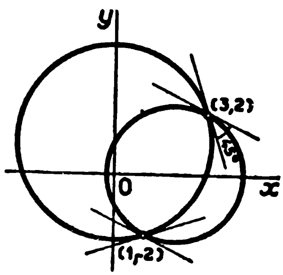
ب - وقتی $x=۳$ است ، $tg\ \tau=۹-٦=۳$ و ازآنجا $\tau=۷۱^{\circ}\ ۳۴'$ است.

پ - وقتی $\tau=۰$ است ، $tg\ \tau$ نیز صفر است وباید $x^{۲}-۲x=۰$ باشد. ریشه‌های این معادله ۰ و ۲ است. اگر این مقادیر را درمعادلهٔ خم قرار دهیم ، به‌ازای $x=۰$ ، $y=۲$ و به‌ازای $x=۲$ ، $y=\frac{۲}{۳}$ میشود. پس خط مماس به خم‌درنقاط $C(۰\ ,\ ۲)$ و $D\left(۲\ ,\ \frac{۲}{۳}\right)$ افقی است.

ت - وقتی $\tau=۴۵^{\circ}$ است ، $tg\ \tau=۱$ است وباید $x^{۲}-۲x=۱$ باشد. ریشه‌های این معادله $x=۱\pm\sqrt{۲}$ یعنی تقریباً ۲٫۴۱ و ۰٫۴۱- است. این دو ریشه نقاطی را میدهند که شیب خم (یا شیب خط مماس به خم) در آنها برابر یک است.

ث - شیب خط داده شده $\frac{۲}{۳}$ است و باید $x^{۲}-۲x=\frac{۲}{۳}$ باشد . ریشه‌های این معادله $x=۱\pm\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ یعنی‌تقریباً $x'=۲٫۲۹$ و $x''=-۰٫۲۹$ است. x' و x'' طول نقاط F و E است. در این نقاط امتداد خم (یا خط مماس به خم) موازی خط AB است.

چون امتداد خم درهرنقطه همان امتداد خط مماس به خم درآن نقطه است ، **زاویهٔ دوخم** در هرنقطهٔ مشترك ، زاویهٔ بین مماسهای به دو خم درآن نقطه است.



شکل ۱۰

مثال ۲- زاویهٔ تقاطع دودایرهٔ زیر را پیدا کنید :

(A) $x^2+y^2-4x=1$

(B) $x^2+y^2-2y=9$

حل - دستگاهی راکه از این دو معادله تشکیل میشود حل میکنیم وبدین ترتیب مختصات نقاط تقاطع یعنی (۲ , ۳) و (۲− , ۱) را بدست میاوریم .

اگر m_1 شیب خط مماس به دایرهٔ (A) درنقطهٔ (x , y) و m_2 شیب خط مماس به دایرهٔ (B) در همان نقطه باشد ، بنابر شمارهٔ ۱ ،٤ از رابطهٔ (A)

$$m_1=\frac{dy}{dx}=\frac{2-x}{y}$$

و از رابطهٔ (B)

$$m_2=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-y}$$

بدست میاید . اگر بجای x ، ۳ و بجای y ، ۲ بگذاریم :

[شیب خط مماس به دایرهٔ (A) درنقطهٔ (۲ , ۳)] $= -\frac{1}{2} = m_1$

[شیب خط مماس به دایرهٔ (B) در نقطهٔ (۲ , ۳)] $= -3 = m_2$

تانژانت زاویهٔ بین دوخطی که شیب آنها m_1 و m_2 است ، با دستور

[دستور (۲) ی شمارهٔ ۳]
$$tg\,\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

تعیین میشود . دراین دستور بجای m_1 ، $-\frac{1}{2}$ و بجای m_2 ، ۳− میگذاریم :

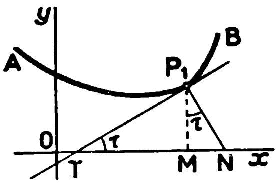
$$tg\,\theta=\frac{-\frac{1}{2}+3}{1+\frac{3}{2}}=1$$

بنابراین ۵ یعنی زاویهٔ تقاطع دو خم در نقطهٔ (۲ ، ۳) ، ۴۵ درجه است.

۴۳- معادلات خطوط مماس و قائم، طولهای تحت مماس و تحت قائم. - معادلهٔ خطی که از نقطهٔ (x_1, y_1) میگذرد و شیب آن m است ،

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \text{[دستور(۳)ی شمارهٔ ۳]}$$

است. اگر این خط در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ به خم AB مماس باشد (شکل ۱۱) ، شیب خم در نقطهٔ (x_1, y_1) برابر m است. این مقدار خاص m را m_1 مینامیم. بنابراین معادلهٔ خط TP_1 ، مماس به خم AB در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ ،



شکل ۱۱

$$y-y_1=m_1(x-x_1) \qquad (۱)$$

است. چون قائم به خم در هر نقطه به خط مماس به خم در آن نقطه عمود است ، لذا شیب قائم به خم قرینهٔ معکوس شیب خط مماس است [دستور (۲)ی شمارهٔ ۳] ، و چون قائم P_1N از نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ نیز میگذرد ، معادلهٔ آن

$$y-y_1=-\frac{1}{m_1}(x-x_1) \qquad (۲)$$

است.

آن قطعه از خط مماس (یعنی TP_1) را که بین نقطهٔ تماس و محور Ox قرار دارد ، **قطعهٔ مماس** ، و تصویر آن برمحور Ox (یعنی TM) را **تحت مماس** مینامند. به همین ترتیب P_1N **قطعهٔ قائم** و MN **تحت قائم** است.

در مثلث TP_1M ، $tg\,\tau=m_1=\frac{MP_1}{TM}$ است و از آنجا

$$\text{طول تحت مماس} = TM^*=\frac{MP_1}{m_1}=\frac{y_1}{m_1} \qquad (۳)$$

* بنابر قرارداد ، اگر تحت مماس در طرف راست T باشد ، مثبت و اگر در طرف چپ T باشد ، منفی است . اگر تحت قائم در طرف راست M باشد ، مثبت و اگر در طرف چپ M باشد ، منفی است .

در مثلث MP_1N ، $\dfrac{MN}{MP_1} = m_1 = tg\,\tau$ است و از آنجا

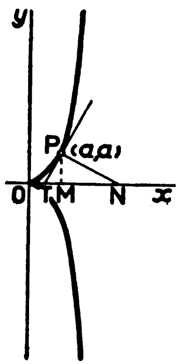
$$\text{طول تحت قائم} = m_1 y_1 = m_1 MP_1 = MN^* \qquad (4)$$

طول قطعهٔ مماس (TP_1) و طول قطعهٔ قائم (P_1N) را میتوان مستقیماً از شکل بدست آورد ، زیرا هریک از آنها وترمثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دو ضلع دیگر آن معلومند .

هرگاه طولهای تحت مماس و تحت قائم در نقطه‌ای از خم معلوم باشند ، بآسانی میتوان مماس و قائم به خم را رسم کرد.

تمرین

۱) سیسوئید** $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ مفروض است(شکل ۱۲) . معادلات خطوط مماس و قائم ، طولهای تحت مماس و تحت‌قائم ، طول قطعهٔ مماس و طول قطعهٔ قائم مربوط به نقطهٔ $(a\,,\,a)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۲

حل - $$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a-x)^2}$$

اگر بجای x و y ، a بگذاریم :

$$\text{شیب خط مماس} = 2 = \frac{3a^3 - a^3}{a(2a-a)^2} = m_1$$

این مقدار را در (۱) میگذاریم :

$$\text{معادلهٔ مماس} \qquad y = 2x - a$$

آن را در (۲) میگذاریم :

* زیر نویس صفحهٔ قبل را بخوانید .

** Cissoid

معادلهٔ قائم $۲y+x=۳a$

آن را در (۳) میگذاریم :

$$TM=\frac{a}{۲}=$$ طول تحت مماس

آن را در (٤) میگذاریم :

$$MN=۲a=$$ طول تحت قائم

نیز داریم :

$$PT=\sqrt{(TM)^۲+(MP)^۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{٤}+a^۲}=\frac{a}{۲}\sqrt{۵}=$$ طول قطعهٔ مماس

$$PN=\sqrt{(MN)^۲+(MP)^۲}=\sqrt{٤a^۲+a^۲}=a\sqrt{۵}=$$ طول قطعهٔ قائم

معادلات مماس و قائم به هریک از خمهای زیر را در نقاط مذکور پیدا کنید :

۲) $y=x^۳-۳x$ ، $(۲\,,\,۲)$

جواب : $۹x-y-۱۶=۰$ و $x+۹y-۲۰=۰$

۳) $y=\dfrac{۲x+۱}{۳-x}$ ، $(۲\,,\,۵)$

جواب : $۷x-y-۹=۰$ و $x+۷y-۳۷=۰$

٤) $۲x^۲-xy+y^۲=۱۶$ ، $(۳\,,\,۲)$

۵) $y^۲+۲y-٤x+٤=۰$ ، $(۱\,,\,-۲)$

۶) معادلات مماس وقائم‌به‌بیضی $b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲$ را درنقطهٔ $(x_۱\,,\,y_۱)$ پیدا کنید.

جواب : $b^۲x_۱x+a^۲y_۱y=a^۲b^۲$

$a^۲y_۱x-b^۲x_۱y=x_۱y_۱(a^۲-b^۲)$

۷) معادلات مماس وقائم‌وطولهای‌تحت‌مماس‌وتحت‌قائم به دایرهٔ $x^۲+y^۲=r^۲$ رادرنقطهٔ $(x_۱\,,\,y_۱)$ پیدا کنید.

جواب : $-x_1$ ، $-\frac{y_1^2}{x_1}$ ، $x_1y-y_1x=0$ ، $x_1x+y_1y=r^2$

٨) نشان دهید که رأس سهمی $y^2=2px$ وسط تحت مماس آن است و طول تحت قائم آن برابر مقدار ثابت p است.

معادلات مماس و قائم و طولهای تحت مماس و تحت قائم به خمهای زیر را درنقاط مذکور پیدا کنید :

٩) $ay=x^2$ ، (a, a)

جواب : $2a$ ، $\frac{a}{2}$ ، $x+2y=3a$ ، $2x-y=a$

١٠) $x^2-4y^2=9$ ، $(5, 2)$

جواب : $\frac{5}{4}$ ، $\frac{16}{5}$ ، $8x+5y=50$ ، $5x-8y=9$

١١) $9x^2+4y^2=72$ ، $(2, 3)$

١٢) $xy+y^2+2=0$ ، $(3, -2)$

١٣) مساحت مثلثی را حساب کنید که اضلاع آن محور Ox وخطوط مماس وقائم به خم $y=6x-x^2$ در نقطهٔ $(5, 5)$ میباشند. جواب : $\frac{425}{8}$

١٤) مساحت مثلثی را حساب کنید که اضلاع آن محور Oy و خطوط مماس وقائم به خم $9-x=y^2$ در نقطهٔ $(5, 2)$ میباشند.

زاویهٔ تقاطع خمهای زیر را پیدا کنید :

١٥) $x^2+y^2=13$ و $y^2=x+1$ جواب : $109^\circ 39'$

١٦) $7x^2+y^2=32$ و $y=6-x^2$

جواب : در نقطه‌های $(\pm 2, 2)$ ، $5^\circ 54'$ و در نقطه‌های $(\pm 1, 5)$ ، $8^\circ 58'$

١٧) $y^2-3y=2x$ و $y=x^2$

١٨) $2x^2-y^2=41$ و $x^2+4y^2=61$

درکدام نقطه از خمهای زیر خط مماس افقی یا عمودی است؟

۱۹) $y=5x-2x^2$

جواب : مماس به خم در نقطهٔ $\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right)$ افقی است.

۲۰) $3y^2-6y-x=0$

جواب : مماس به خم در نقطهٔ $(-3, 1)$ عمودی است.

۲۱) $x^2+6xy+25y^2=16$

جواب : مماس به خم در نقاط $(-3, 1)$ و $(3, -1)$ افقی

و درنقاط $\left(-5, \frac{3}{5}\right)$ و $\left(5, -\frac{3}{5}\right)$ عمودی است.

۲۲) $x^2-8xy+25y^2=81$

۲۳) $x^2-24xy+169y^2=25$

۲۴) $169x^2+10xy+y^2=144$

۲۵) نشان دهیدکه هذلولی $x^2-y^2=5$ وبیضی $4x^2+9y^2=72$ بیکدیگر عمودند.

۲۶) نشان دهیدکه دایرهٔ $x^2+y^2=8ax$ و سیسوئید $(2a-x)y^2=x^3$ در مبدأ مختصات بیکدیگر عمودند و در دو نقطهٔ دیگر با یکدیگر زاویهٔ ۴۵ درجه میسازند (شکل سیسوئید را در فصل ۲۶ ببینید).

۲۷) نقاط تقاطع فلیوم دکارت * $x^3+y^3=3axy$ و سهمی $y^2=ax$ را پیدا کنید ونشان دهیدکه مماسهای به فلیوم در این نقاط موازی محور Oy است (شکل فلیوم دکارت را در فصل ۲۶ ببینید).

۲۸) معادلهٔآن قائم‌به سهمی $y=5x+x^2$ راکه با محور Ox زاویهٔ ۴۵ درجه میسازد، پیدا کنید.

۲۹) معادلهٔ آن مماسهای‌به‌دایرهٔ $x^2+y^2=58$ راکه با خط $3x-7y=19$ موازیند، پیدا کنید.

۳۰) معادلهٔآن قائمهای‌به هذلولی $4x^2-y^2=36$ راکه باخط $2x+5y=4$ موازیند، پیدا کنید.

* Folium of Descartes

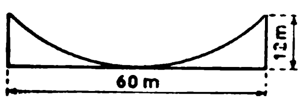
۳۱) معادلهٔ دوخطی را که ازنقطهٔ $(4\ ,\ 4)$ میگذرند وبه بیضی $4x^2+y^2=72$ مماسند ، پیدا کنید. جواب : $14x+y=60$ و $2x+y=12$

۳۲) نشان دهید که مجموع طولهای دوپاره خطی ازمحورها که محدود بین مبدأ مختصات ومحل برخورد مماس به پاره سهمی $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ با محورهاست ، برابر مقدار ثابت a است (شکل این پاره سهمی را در فصل ۲۶ ببینید) .

۳۳) نشان دهید که طول پاره خطی ازمماس به هیپوسیکلوئید * $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ که بین دو محور مختصات قرار دارد ، برابر مقدار ثابت a است (شکل هیپوسیکلوئید را در فصل ۲۶ ببینید) .

۳۴) معادلهٔ مسیر گلوله‌ای $y=x-\frac{x^2}{100}$ ، واحد طول یارد ، محور x هاافقی و مبدأ مختصات نقطهٔ پرتاب گلوله است. الف ـ اندازهٔ زاویهٔ پرتاب گلوله چقدراست؟ ب ـ در ۷۵ یاردی نقطهٔ پرتاب دیواری عمودی قراردارد. اندازهٔ زاویهٔ برخورد گلوله بااین دیوار چقدر است ؟ پ ـ اگر گلوله روی سقفی افقی به ارتفاع ۱۶ یارد بیفتد ، اندازهٔ زاویهٔ سقوط چقدراست ؟ ت ـ اگر گلوله ازبالای ساختمانی به ارتفاع ۲۴ یارد پرتاب شود ، اندازهٔ زاویهٔ سقوط چقدر است ؟ ث ـ اگر نقطهٔ پرتاب در دامنهٔ تپه‌ای باشیب ۴۵ درجه باشد ، گلوله هنگام سقوط با چه زاویه‌ای به دامنهٔ تپه برخورد میکند ؟

۳۵) کابل پل معلقی به شکل سهمی است . ارتفاع پایه‌ها که به فاصلهٔ ۶۰ متر ازیکدیگر قرار دارند ، ۱۲ متر است (شکل ۱۳) . اندازهٔ زاویهٔ بین کابل و پایه را پیدا کنید.



شکل ۱۳

۴۴- ماکزیمم ومینیمم یک تابع - مقدمه . ـ دربسیاری ازمسائل عملی به توابعی برمیخوریم که دارای یک بزرگترین مقدار (ماکزیمم) ویا یک کوچکترین مقدارند** (مینیمم) .

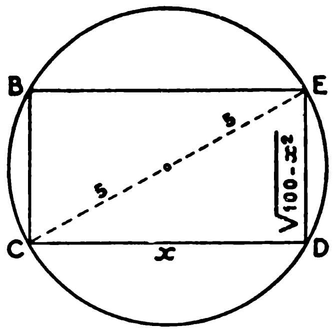
---

* Hypocycloid

** ممکن است تابع دارای بیش از یک ماکزیمم یا مینیمم باشد (شکل ۲۲ را ببینید) .

دراین موارد دانستن این‌که به‌ازای کدام مقادیر خاص از متغیر ، تابع برابر بزرگترین یا کوچکترین مقدار میشود ، بسیار مهم است.

مثلاً فرض میکنیم که بخواهیم ابعاد مستطیلی را پیدا کنیم که محاط در دایره‌ای به شعاع ۵ اینچ است و بیشترین مساحت را دارد. دایره‌ای درنظرمیگیریم و مستطیلی درآن محاط میکنیم (شکل ۱۴).



شکل ۱٤

اگر CD را x بگیریم ، $DE=\sqrt{۱۰۰-x^۲}$ و A ، مساحت مستطیل برابر

$$A=x\sqrt{۱۰۰-x^۲} \qquad (۱)$$

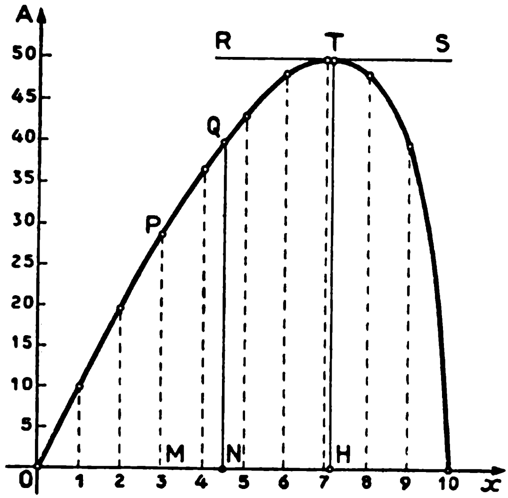
میشود . برای آنکه بدانیم مستطیلی با بیشترین مساحت وجود دارد یانه ، به آزمایش زیر توجه میکنیم.

پایهٔ مستطیل یعنی$CD(=x)$ را آنقدر زیاد میکنیم تا طول آن به ۱۰ اینچ (طول قطر دایره) برسد ، ارتفاع $DE=\sqrt{۱۰۰-x^۲}$ کم میشود و به صفر میرسد و مساحت مستطیل‌صفرمیگردد. اکنون پایه‌راتاصفرنزول میدهیم ، ارتفاع تا ۱۰ اینچ صعود میکند و مجدداً مساحت صفر میشود . بنابراین روشن است‌که بین مستطیلهای محاطی مستطیلی وجود داردکه مساحت آن از همه بیشتر است. اگر شکل را با دقت مطالعه‌کنیم ، به‌این نتیجه میرسیم که وقتی مستطیل مربع میشود ، بیشترین مساحت را دارد. اما این تنها یک گمان ساده است. راه بهتر آن است‌که خم نمایش تابع (۱) را رسم‌کنیم وبه تغییرات آن توجه نماییم. برای رسم تابع (۱) به دو نکتهٔ زیر توجه میکنیم :

الف - بنابر طبیعت مسئله روشن است‌که x و A همیشه مثبتند.

ب ـ مقدار x از صفر شروع میشود ، زیاد میگردد و حداکثر به ۱۰ میرسد.

جدولی از مقادیر نظیر x و A تشکیل میدهیم و خم مطلوب را رسم میکنیم (شکل ۱۰).



x	A
0	0,0
1	9,9
2	19,6
3	28,6
4	36,6
5	43,0
6	48,0
7	49,7
8	48,0
9	39,6
10	0,0

شکل ۱۰

شکل خم به ما چه میاموزد ؟

الف ـ اگر خم دقیق رسم شده باشد ، میتوانیم مساحت مستطیل را بهازای هرمقدار از x دقیقاً پیدا کنیم و بدین منظور باید عرض نظیر x را اندازه بگیریم . مثلاً وقتی (اینچ ۳)= x=OM است :

A=MP # ۲۸٫۶ اینچ مربع

و وقتی اینچ ۴٫۵= x=ON است :

(نتیجهٔ اندازه‌گیری) A=NQ # ۳۹٫۸ اینچ مربع

ب ـ تنها یک مماس به خم (RS) افقی است و عرض نقطهٔ تماس آن (TH) از عرض هرنقطهٔ دیگرخم بزرگتراست ، پس : **بطوروضوح مساحت یکی از مستطیلهای محاطی ازمساحت هرمستطیل محاطی دیگر بیشتر است.** به عبارت دیگر میتوان

نتیجه گرفت که تابع (۱) دارای یک بزرگترین مقدار (ماکزیمم) است. این مقدار (HT) را بااندازه گیری عرض نقطهٔ T نمیتوان بطوردقیق پیدا کرد، اما یافتن آن با استفاده ازروشهای حساب دیفرانسیل بسیار آسان است. میدانیم که مماس درنقطهٔ T افقی است و شیب خم دراین نقطه صفر است (شمارهٔ ٤۲). پس برای یافتن طول نقطهٔ T مشتق A را نسبت به x پیدا میکنیم، آن را مساوی صفر قرار میدهیم و نسبت به x حل میکنیم. داریم :

$$A = x\sqrt{۱۰۰ - x^۲} \qquad (۱)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{۱۰۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۱۰۰ - x^۲}}$$

$$\frac{۱۰۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۱۰۰ - x^۲}} = ۰$$

پس از حل $x = ۵\sqrt{۲}$

و از آنجا $DE = \sqrt{۱۰۰ - x^۲} = ۵\sqrt{۲}$

پس مستطیلی که دردایرهٔ مذکور محاط است وبیشترین مساحت را دارد، مربعی به مساحت

$$A = CD \times DE = ۵\sqrt{۲} \times ۵\sqrt{۲} = ۵۰ \text{ اینچ مربع}$$

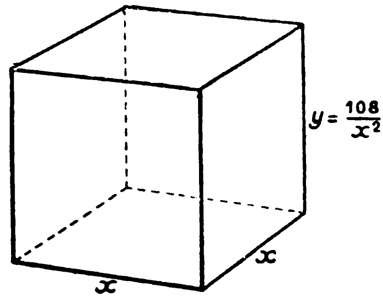
است و بدین ترتیب درازای HT، ۵۰ اینچ است..

مثال دیگر - میخواهیم یک جعبهٔ چوبی بسازیم که قسمت بالای آن باز، قاعدهٔآن مربع وحجمآن ۱۰۸ فوت مکعب باشد. ابعاد این جعبه چه باشند تاتختهٔ مورد نیازمینیمم باشد و خرج آن کمترین مقدار ممکن شود؟

اگردرازای ضلع قاعدهٔ جعبه برحسب فوت x وارتفاع آن y باشد (شکل ۱۶)، چون حجم جعبه معلوم است، میتوان y را برحسب x پیدا کرد :

$$\text{حجم جعبه} = x^۲y = ۱۰۸ \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{۱۰۸}{x^۲}$$

مساحت تختهٔ لازم را M مینامیم و اندازهٔ آن را برحسب فوت مربع به صورت تابعی از x حساب میکنیم :

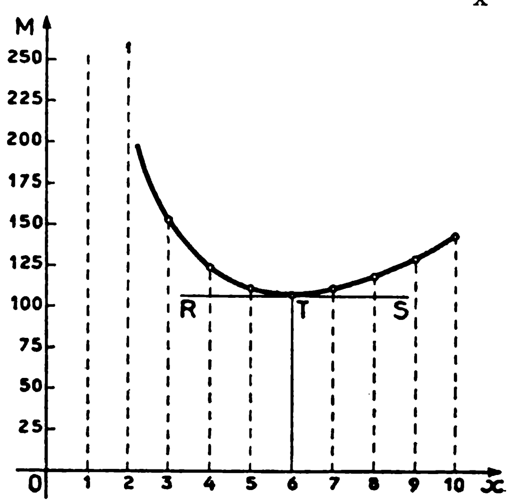


شکل ۱۶

فوت مربع $x^۲$ = مساحت قاعده

و فوت مربع $\frac{۴۳۲}{x}$ = $۴xy$ = مساحت چهار وجه جانبی

بنابراین ، دستور $$M = x^۲ + \frac{۴۳۲}{x} \quad (۲)$$



x	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	108
7	111
8	118
9	129
10	143

شکل ۱۷

مقدارتختهٔلازم برای ساختن جعبه‌ای به حجم۱۰۸فوت مکعب‌را برحسب‌فوت مربع میدهد.

خم نمایش تغییرات رابطهٔ (۲) را رسم میکنیم (شکل ۱۷).

این خم به ما چه میاموزد ؟

الف ـ اگر خم دقیق رسم شده باشد، میتوانیم عرض نظیر به هرطول x را، که درازای ضلع قاعده است، اندازه بگیریم وبدین‌ترتیب مقدارتختهٔ لازم را برحسب فوت مربع تعیین کنیم.

ب ـ تنها یک مماس به‌خم (RS) افقی است وعرض نقطهٔ تماس‌آن ازعرض‌هرنقطهٔ دیگر خم کوچکتر است، پس: **بطور وضوح یکی از جعبه‌ها کمتر از هر جعبهٔ دیگر احتیاج به تخته دارد.** به عبارت دیگر میتوان نتیجه گرفت که تابع (۲) دارای یک کمترین مقدار (مینیمم) است. اکنون با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل این نقطهٔ خم را پیدا میکنیم. برای بدست‌آوردن مقدارشیب خم از رابطهٔ(۲) مشتق میگیریم:

$$\frac{dM}{dx} = ۲x - \frac{٤۳۲}{x^۲}$$

در پایین‌ترین نقطه، یعنی در T، شیب صفر است و باید

$$۲x - \frac{٤۳۲}{x^۲} = ۰$$

باشد. جواب‌این معادله ٦ است. پس‌وقتی x = ٦ است، مقدار تختهٔ لازم کمترین مقدار ممکن است.

اگر در رابطهٔ (۲) بجای x، ٦ بگذاریم، داریم:

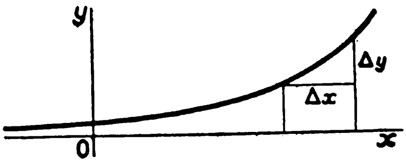
$$M = ۱۰۸ \text{ فوت مربع}$$

میتوان به طریق زیر نیز نشان داد که M دارای مینیمم است. فرض میکنیم قاعدهٔ جعبه از مربع بسیارکوچکی بسمت مربع بسیار بزرگی تغییرشکل دهد. در نخستین حالات ارتفاع جعبه زیاد و مقدار تختهٔ مورد نیاز هم زیاد است. درآخرین حالات ارتفاع جعبه کم است اما برای قاعدهٔ آن مقدار زیادی تخته لازم است. بنابراین مقدار M نخست از مقدار زیادی بسمت مقدارکمتری نزول میکند و سپس از نو زیاد میشود. بنابراین خم نمایش تغییرات M باید یک «پایین‌ترین نقطه» داشته باشد. این نقطه نظیر ابعادی

از جعبه است که کمترین مقدار تخته و از آنجا کمترین خرج را ایجاب مینماید.

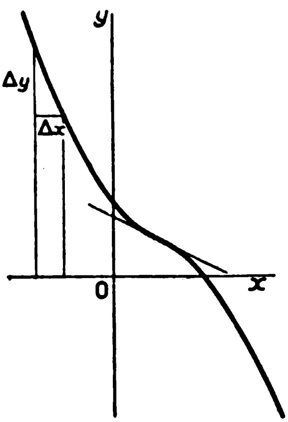
اکنون بتفصیل به مطالعهٔ ماکزیمم و مینیمم میپردازیم.

۴۵- توابع صعودی و توابع نزولی *. - تابع $y=f(x)$ را **تابع صعودی** نامند بشرط آنکه وقتی x زیاد میشود ، y نیز (ازنظرجبری) زیاد شود. تابع $y=f(x)$ را **تابع نزولی** نامند بشرطآنکه وقتی x زیاد میشود ، y (از نظر جبری) کم شود. خم نمایش یک تابع بروشنی صعودی یانزولی بودن تابع رانشان میدهد. شکل ۱۸ را درنظر میگیریم. اگر نقطهٔ متحرکی در امتداد خم از چپ به‌راست حرکت کند ، همزمان با زیاد شدن x ، y نیز زیاد میشود یعنی خم صعود میکند . پس وقتی x صعود میکند ، تابع y نیز صعود میکند. بدیهی است که دراین صورت Δy و Δx همعلامت میباشند.



شکل ۱۸

اما ، درشکل ۱۹ ، اگر نقطهٔ متحرکی در امتداد خم از چپ به راست حرکت کند ، با زیاد شدن x ازمقدار y کاسته میشود یعنی خم نزول میکند. پس وقتی x صعود میکند، تابع y نزول مینماید . روشن است که در این حالت علامتهای Δy و Δx مختلفند.



شکل ۱۹

ممکن‌است‌تابع گاهی صعودی‌وگاهی نزولی باشد ، مانند شکل ۲۰ که خم نمایش تابع زیر است :

$$y=2x^3-9x^2+12x-3 \qquad (1)$$

اگر نقطهٔ متحرکی درامتداد خم از چپ به راست حرکت کند ، تا وقتی‌که به‌نقطهٔ

---

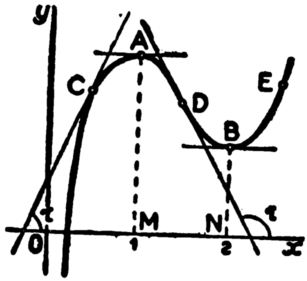
* استدلالهایی که در اینجا شده است ، بیشتر به تعبیرهای هندسی متکی است . بحث تحلیلی ماکزیمم و مینیمم در شمارهٔ ۱۲۵ خواهد آمد .

A برسد صعود میکند، ازنقطهٔ A تا نقطهٔ B نزول مینماید و سرانجام درطرف راست B از نو صعود میکند. بنابراین :

الف - از $x=-\infty$ تا $x=1$ تابع صعودی است،

ب - از $x=1$ تا $x=2$ تابع نزولی است،

پ - از $x=2$ تا $x=+\infty$ تابع صعودی است.



شکل ۲۰

در نقطه‌ای از خم مانند C، که تابع در آن صعودی است، مماس به خم با محور x ها زاویهٔ حاده میسازد و شیب خم در آن نقطه مثبت است. بعکس، در نقطه‌ای از خم مانند D، که تابع در آن نزولی است، مماس به خم با محور x ها زاویهٔ منفرجه میسازد و شیب خم در آن نقطه منفی است. پس میتوان گفت که :

هرگاه مشتق تابع مثبت باشد تابع صعودی و هرگاه مشتق تابع منفی باشد تابع نزولی است.

مثلاً اگر از تابع (۱) مشتق بگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2) \qquad (2)$$

وقتی $x<1$ است، $f'(x)$ مثبت و $f(x)$ صعودی است،

وقتی $1<x<2$ است، $f'(x)$ منفی و $f(x)$ نزولی است،

وقتی $x>2$ است، $f'(x)$ مثبت و $f(x)$ صعودی است.

این نتیجه درست همان نتیجه‌ای است که از خم نمایش تابع (۱) گرفتیم.

۴۶- ماکزیمم ومینیمم یك تابع - تعریف. - ماکزیمم یک تابع مقداری است که از جمیع مقادیرآن تابع که بلافاصله قبل از آن مقدارو بلافاصله بعدازآن مقدارقراردارند، بزرگتر است.

مینیمم یک تابع مقداری است که ازجمیع مقادیرآن تابع که بلافاصله قبل از آن مقدار

و بلافاصله بعداز آن مقدار قرار دارند ، کوچکتر است.

مثلاً ، در شکل ۲۰ ، روشن است که تابع به ازای $x=۱$ یک ماکزیمم $(MA=y=۲)$ وبه ازای $x=۲$ یک مینیمم $(NB=y=۱)$ دارد.

باید متوجه بود که ماکزیمم الزاماً بزرگترین مقدار ممکن تابع و یا مینیمم الزاماً کوچکترین مقدار ممکن تابع نیست. در شکل ۲۰ دیده میشود که تابع y در طرف راست B دارای مقادیری بزرگتر از مقدار ماکزیمم یعنی بزرگتر از MA ودرطرف چپ A دارای مقادیری کوچکتر از مقدار مینیمم یعنی کوچکتر از NB است.

اگر $f(x)$ به ازای $x=a$ ماکزیمم باشد ، روشن است که $f(x)$ به ازای مقادیری از x که کمی کوچکتر از a هستند تابعی صعودی وبه ازای مقادیری از x که کمی بزرگتر از a هستند تابعی‌نزولی‌است. بدین‌ترتیب وقتی x هنگام بزرگ شدن ازمقدار a میگذرد ، $f'(x)$ از $+$ به $-$ تغییر علامت میدهد. پس اگر $f'(x)$ پیوسته باشد ، باید به ازای مقدار $x=a$ صفر شود.

منجمله در مثال بالا (شکل ۲۰) ، در نقطهٔ C ، $f'(x) > ۰$ است ، در نقطهٔ A ، $f'(x)=۰$ است و در نقطهٔ D ، $f'(x) < ۰$ است.

به همین ترتیب اگر $f(x)$ به ازای $x=a$ مینیمم باشد ، $f(x)$ به ازای مقادیری از x که کمی کوچکتر از a هستند تابعی نزولی و به ازای مقادیری از x که کمی از بزرگتر از a هستند تابعی‌صعودی‌است. بدین‌ترتیب وقتی x هنگام بزرگ‌شدن از مقدار a میگذرد ، $f'(x)$ از $-$ به $+$ تغییر علامت میدهد. پس اگر $f'(x)$ پیوسته باشد ، باید به ازای $x=a$ صفر شود.

منجمله در شکل ۲۰ ، $f'(x)$ در D منفی ، در B صفر و در E مثبت است.

بنابراین میتوان شرایط کلی ماکزیمم یا مینیمم بودن تابع $f(x)$ را به صورت زیر بیان کرد :

$f(x)$ ماکزیمم است اگر $f'(x)=۰$ باشد و $f'(x)$ از $+$ به $-$ تغییر علامت دهد.

$f(x)$ مینیمم است اگر $f'(x)=۰$ باشد و $f'(x)$ از $-$ به $+$ تغییرعلامت دهد.

مقادیری از متغیر راکه در معادلهٔ $f'(x)=۰$ صدق میکنند ، **مقادیر بحرانی**

مینامند. منجمله $x=۱$ و $x=۲$ مقادیربحرانی متغیری‌است که‌شکل ۲۰ خم نمایش‌تابع آن است. بدین‌ترتیب مقادیربحرانی متغیرنقاطی را میدهند که درآنها مماس به خم موازی محور Ox است.

برای تعیین علامت مشتق‌اول تابع درنقاط نزدیک به نقاط بحرانی، نخست درمشتق اول بجای متغیر مقداری که کمی کوچکترازمقداربحرانی نظیر است و سپس مقداری که کمی بزرگتر از مقدار بحرانی نظیر است قرار میدهیم. اگر علامت اول $+$ و علامت دوم $-$ باشد، تابع به‌ازای آن مقدار بحرانی ماکزیمم است. اگر علامت اول $-$ و علامت دوم $+$ باشد، تابع به ازای آن مقدار بحرانی مینیمم است.

اگر درهردو حالت علامت یکی باشد، تابع به‌ازای‌آن مقداربحرانی نه ماکزیمم ونه مینیمم است. مثلاً مشتق تابع

$$y=f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x-۳ \tag{۱}$$

عبارتست از

$$f'(x)=۶(x-۱)(x-۲) \tag{۲}$$

اگر $f'(x)=۰$ قرار دهیم، مقادیر بحرانی متغیر یعنی $x=۱$ و $x=۲$ بدست میایند. نخست $x=۱$ رامیازماییم. مقادیری نزدیک به ۱ در طرف راست رابطهٔ (۲) میگذاریم و علامت مقادیر حاصل را مطالعه میکنیم (شمارهٔ ٤٥).

x	y
۱	۲
۲	۱

وقتی $x<۱$ است، $f'(x)=(-)(-)=+$ است،

وقتی $x>۱$ است، $f'(x)=(+)(-)=-$ است.

پس $f(x)$ به‌ازای $x=۱$ ماکزیمم است و مقدار آن $y=f(۱)=۲$ است (جدول را ببینید).

اکنون $x=۲$ را میازماییم، یعنی مقادیری نزدیک به ۲ درطرف راست رابطهٔ (۲) میگذاریم.

وقتی $x<۲$ است، $f'(x)=(+)(-)=-$ است،

وقتی $x>۲$ است، $f'(x)=(+)(+)=+$ است.

پس $f(x)$ به‌ازای $x=۲$ مینیمم است و مقدار آن $y=f(۲)=۱$ است.

اکنون نتایج مذکور را در **دستورالعمل** زیر خلاصه میکنیم.

۴۷-روش نخست برای تعیین ماکزیمم و مینیمم یك تابع - دستورالعمل :

عمل اول - مشتق اول تابع را حساب میکنیم.

عمل دوم - مشتق اول را مساوی صفرقرار میدهیم وریشه های حقیقی معادلهٔ حاصل را پیدا میکنیم. این ریشه ها مقادیر بحرانی متغیرند.

عمل سوم - مقادیر بحرانی را بترتیب در نظر میگیریم ، علامت مشتق اول را نخست به ازای مقداری کمی کمتر * از مقدار بحرانی و سپس به ازای مقداری کمی بیشتر از آن پیدا میکنیم . اگر علامت مشتق ، نخست + و سپس − باشد ، تابع به‌ازای این مقدار بحرانی ماکزیمم است. اگر این علامت نخست − و سپس + باشد ، تابع مینیمم است . اگر علامت تغییر نکند ، تابع به‌ازای این مقدار بحرانی نه ماکزیمم ونه مینیمم است.

برای عمل سوم اغلب بهتر است $f'(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب چند عامل درآوریم (مانند شمارهٔ ۴۶).

مثال ۱- در مسئلهٔ اول شمارهٔ ۴۴ با استفاده از خم نمایش تابع

$$A = x\sqrt{100 - x^2}$$

نشان دادیم که مساحت بزرگترین مستطیل محاط در دایره‌ای به شعاع ۵ اینچ ۵۰ اینچ مربع است . اکنون بابکار بردن دستورالعمل بالا نتیجهٔ مذکور را به طریق تحلیلی بدست میاوریم.

حل - $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

عمل اول - $$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

عمل دوم - $$\frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$$

$$x = 5\sqrt{2} \# 7{,}07$$

---

* دراینجا منظور از «کمی کمتر» مقداری از متغیر است که بین ریشهٔ مورد نظر وریشهٔ ماقبل آن است . نیز منظور از « کمی بیشتر » مقداری از متغیر است که بین ریشهٔ مورد نظر و ریشهٔ ما بعد آن است.

$5\sqrt{2}$ مقدار بحرانی متغیراست. دراینجا فقط ریشهٔ مثبت‌را درنظر میگیریم زیرا بنابرطبیعت مسئله علامت منفی مفهومی ندارد.

عمل سوم - وقتی $x < 5\sqrt{2}$ است، $2x^2 < 100$ و $f'(x) > 0$ است،
وقتی $x > 5\sqrt{2}$ است، $2x^2 > 100$ و $f'(x) < 0$ است.

پس علامت مشتق نخست $+$ وسپس $-$ است‌وتابع یک ماکزیمم‌دارد که مقدارآن $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50$ است.

مثال ۲- میخواهیم تابع $(x-1)^2(x+1)^3$ را از نظر ماکزیمم و مینیمم بودن مطالعه‌کنیم.

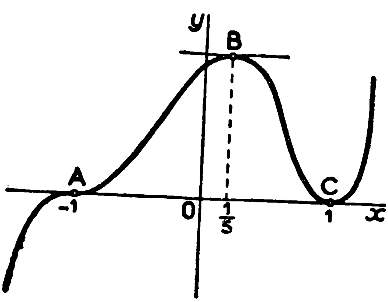
حل -
$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$
$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2$$
$$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

عمل دوم -
$$(x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0$$

مقادیر بحرانی متغیر عبارتند از: $x = 1$ ، $x = -1$ ، $x = \frac{1}{5}$

عمل سوم -
$$f'(x) = 5(x-1)(x+1)^2\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

نخست مقدار بحرانی $x = 1$ را میازماییم (نقطهٔ C در شکل ۲۱).



شکل ۲۱.

وقتی $x < ۱$ است، $f'(x) = ۵(-)(+)^۲(+) = -$ است،
وقتی $x > ۱$ است، $f'(x) = ۵(+)(+)^۲(+) = +$ است.
پس به‌ازای $x = ۱$ تابع یک مینیمم دارد و مقدار آن برابر است با

$$f(۱) = ۰ = [\text{عرض نقطهٔ } C]$$

اکنون مقدار بحرانی $x = \frac{۱}{۵}$ را میازماییم (نقطهٔ B).

وقتی $x < \frac{۱}{۵}$ است، $f'(x) = ۵(-)(+)^۲(-) = +$ است،

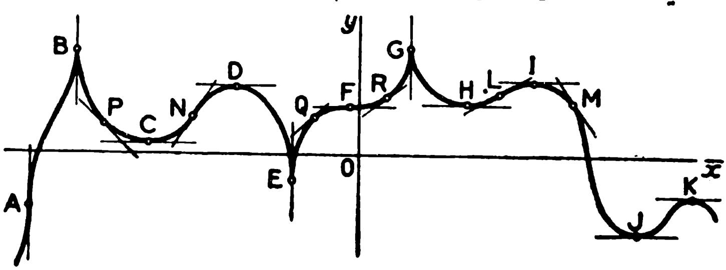
وقتی $x > \frac{۱}{۵}$ است، $f'(x) = ۵(-)(+)^۲(+) = -$ است.

پس تابع به‌ازای $x = \frac{۱}{۵}$ ماکزیمم است و مقدار آن برابر است با

$$f\left(\frac{۱}{۵}\right) \# ۱٫۱۱ = [\text{عرض نقطهٔ } B]$$

سرانجام مقدار بحرانی $x = -۱$ را میازماییم (نقطهٔ A).
وقتی $x < -۱$ است، $f'(x) = ۵(-)(-)^۲(-) = +$ است،
وقتی $x > -۱$ است، $f'(x) = ۵(-)(+)^۲(-) = +$ است.
پس تابع به‌ازای $x = -۱$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم.

۴۸- ماکزیمم و مینیمم تابع درجایی که $f'(x)$ بینهایت میشود اما $f(x)$ پیوسته میماند. - شکل ۲۲ را درنظر میگیریم:



شکل ۲۲

در B و G تابع $f(x)$ پیوسته است و ماکزیمم دارد، اما $f'(x)$ بینهایت است زیرا

مثلاً در B مماس به خم موازی محور Oy است . در E نیز تابع f(x) مینیمم است اما f'(x) بینهایت است. بنابراین باتوجه به حالات گوناگون ماکزیمم ومینیمم باید مقادیری از متغیر را نیز که f'(x) را بینهایت میکنند ، جزء مقادیربحرانی متغیربحساب آورد . این مقادیر بحرانی ریشه‌های معادلهٔ زیرند :

$$\frac{1}{f'(x)}=0 \qquad (1)$$

بدین‌ترتیب عمل دوم مذکور در شمارهٔ پیش بوسیلهٔ رابطهٔ (۱) اصلاح و تکمیل میشود بدون آنکه عملهای دیگر تغییر کنند.

متذکر میشویم که درشکل ۲۲ ، f'(x) در نقطهٔ A نیزبینهایت است ، درصورتیکه تابع دراین نقطه نه ماکزیمم و نه مینیمم است.

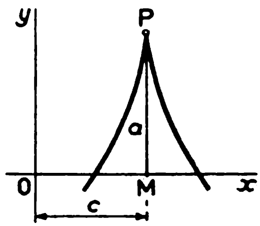
مثال - نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $a-b(x-c)^{\frac{2}{3}}$ را پیدا کنید (شکل ۲۳) .

حل -

$$f(x)=a-b(x-c)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=-\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{f'(x)}=-\frac{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}{2b}$$



شکل ۲۳

$x=c$ یک مقدار بحرانی متغیر و به‌ازای آن $\frac{1}{f'(x)}=0$ [و $f'(x)=\infty$] است ، اما f(x) بینهایت نیست. پس باید تابع f(x) را در نزدیکی $x=c$ ازنظر ماکزیمم و مینیمم بودن مطالعه کرد.

وقتی $x<c$ است ، $f'(x)=+$ است ،

وقتی $x>c$ است ، $f'(x)=-$ است.

پس به‌ازای $x=c=OM$ تابع ماکزیممی برابر $f(c)=a=MP$ دارد.

تمرین

ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را پیدا کنید :

۱) x^3-6x^2+9x

جواب : تابع به ازای $x=1$ دارای ماکزیممی برابر ۴ و به‌ازای $x=3$ دارای مینیممی برابر ۰ است.

۲) $10+12x-3x^2-2x^3$

جواب : تابع به‌ازای $x=1$ دارای ماکزیممی برابر ۱۷ و به‌ازای $x=-2$ دارای مینیممی برابر ۱۰ — است.

۳) $2x^3+3x^2+12x-4$ جواب : تابع نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم.

۴) $x^3+2x^2-15x-20$

۵) $2x^2-x^4$ جواب : تابع به‌ازای $x=0$ دارای مینیممی برابر ۰ و به‌ازای $x=\pm 1$ دارای ماکزیممهایی برابر ۱ است.

۶) x^4-4x جواب : تابع به ازای $x=1$ دارای مینیممی برابر ۳ — است.

۷) x^4-x^2+1

۸) $3x^4-4x^3-12x^2$ جواب : تابع به‌ازای $x=-1$ دارای مینیممی برابر ۵ — ، به‌ازای $x=0$ دارای ماکزیممی برابر ۰ و به‌ازای $x=2$ دارای مینیممی برابر ۳۲ — است.

۹) x^5-5x^4 جواب : تابع به‌ازای $x=0$ دارای ماکزیممی برابر ۰ وبه‌ازای $x=4$ دارای مینیممی برابر ۲۵۶ — است.

۱۰) $3x^5-20x^3$

۱۱) $x^2+\frac{2a^3}{x}$ جواب : تابع به‌ازای $x=a$ دارای مینیممی برابر $3a^2$ است.

۱۲) $۲x-\frac{a^۳}{x^۲}$

۱۳) $x^۲+\frac{a^٤}{x^۲}$ جواب : تابع به‌ازای $x=\pm a$ مینیممهایی برابر $۲a^۲$ دارد.

۱٤) $\frac{ax}{x^۲+a^۲}$ جواب : تابع به‌ازای $x=-a$ مینیممی برابر $-\frac{۱}{۲}$ و به‌ازای $x=a$ ماکزیممی برابر $\frac{۱}{۲}$ دارد.

۱۵) $\frac{x^۲}{x+a}$ ۱٦) $\frac{x^۲}{x^۲+a^۲}$

۱۷) $\frac{x^۲+۲a^۲}{x^۲+a^۲}$ ۱۸) $(۲+x)^۲(۱-x)^۲$

۱۹) $(۲+x)^۲(۱-x)^۳$

۲۰) $b+c(x-a)^{\frac{۲}{۳}}$ جواب : تابع به‌ازای $x=a$ مینیممی برابر b دارد.

۲۱) $a-b(x-c)^{\frac{۱}{۳}}$ جواب : تابع نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم.

۲۲) $(۲+x)^{\frac{۱}{۳}}(۱-x)^{\frac{۲}{۳}}$ جواب : تابع به‌ازای $x=۱$ دارای مینیممی برابر ۰ و به‌ازای $x=-۱$ دارای ماکزیممی برابر $\sqrt[۳]{٤}\#۱٫٦$ است.

۲۳) $x(a+x)^{۲}(a-x)^{۳}$ جواب : تابع به‌ازای $x=-a$ دارای ماکزیممی برابر ۰ و به‌ازای $x=-\frac{a}{۲}$ دارای مینیممی برابر $-\frac{۲۷}{٦٤}a^{٦}$ و به‌ازای $x=\frac{a}{۳}$ دارای ماکزیممی برابر $\frac{۱۲۸}{۷۲۹}a^{٦}$ است. تابع به‌ازای $x=a$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم.

۲٤) $(۲x-a)^{\frac{۱}{۳}}(x-a)^{\frac{۲}{۳}}$ جواب : تابع به‌ازای $x=\frac{۲a}{۳}$ دارای ماکزیممی برابر $\frac{a}{۳}$ و به‌ازای $x=a$ دارای مینیممی برابر ۰ است. تابع به‌ازای $x=\frac{a}{۲}$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم.

۲۵) $\frac{x+۲}{x^{۲}+۲x+٤}$ جواب : تابع به‌ازای $x=۰$ دارای ماکزیممی برابر $\frac{۱}{۲}$ و به‌ازای $x=-٤$ دارای مینیممی برابر $-\frac{۱}{٦}$ است.

۲٦) $\frac{x^{۲}+x+٤}{x+۱}$ جواب : تابع به‌ازای $x=-۳$ دارای ماکزیممی برابر -۵ و به ازای $x=۱$ دارای مینیممی برابر ۳ است.

۲۷) $\frac{x^{۲}+x+٤}{x^{۲}+۲x+٤}$ جواب : تابع به‌ازای $x=-۲$ دارای ماکزیممی برابر $\frac{۳}{۲}$ و به‌ازای $x=۲$ دارای مینیممی برابر $\frac{۵}{٦}$ است.

۲۸) $\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}$ جواب : تابع به ازای $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ دارای ماکزیممی برابر $\dfrac{(b-a)^2}{4ab}$ است.

۲۹) $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{a-x}$ جواب : تابع به ازای $x=\dfrac{a^2}{a+b}$ دارای مینیممی برابر $\dfrac{(a+b)^2}{a}$ و به‌ازای $x=\dfrac{a^2}{a-b}$ دارای ماکزیممی برابر $\dfrac{(a-b)^2}{a}$ است.

۳۰) $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$ جواب : تابع به‌ازای $x=\dfrac{a}{4}$ دارای مینیممی برابر $\dfrac{27}{32}a^2$ است.

۳۱) $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

۴۹- ماکزیمم و مینیمم : مسائل عملی. - در بسیاری از مسائل عملی ، مانند دو مثال شمارهٔ ۴۴ ، نخست باید با استفاده از شرایط داده شده تابعی را پیدا کرد که ماکزیمم و مینیمم آن خواسته شده است. این کار اغلب بسیار مشکل است و نمیتوان برای آن قاعدهٔ عمومی بیان کرد ، اما دستور کلی زیر در بسیاری از مسائل نتیجه بخش است.

دستور کلی

الف - با توجه به داده‌های مسئله صورت تابعی را که ماکزیمم و مینیمم آن خواسته شده است مینویسیم.

ب - اگر تابع حاصل شامل بیش از یك متغیر باشد ، با درنظر گرفتن شرایط اولیهٔ مسئله ، بین متغیرها به تعداد کافی رابطه برقرار میکنیم و باحل آنها تمام متغیرها را به‌صورت تابعی از یکی از آنها بدست میاوریم.

پ - برای پیدا کردن ماکریمم و مینیمم تابع حاصل که تنها شامل یك متغیر است ، دستورالعمل صفحهٔ ۸۱ را بکار میبندیم.

ت - درمسائل عملی تشخیص آن که به‌ازای کدام مقدار بحرانی ماکزیمم و به‌ازای کدام مقدار بحرانی مینیمم بدست میاید ، معمولاً آسان است ولذا انجام عمل سوم در بسیاری از موارد زاید است.

ث - سرانجام خم نمایش تغییرات تابع را رسم میکنیم و بوسیلهٔ آن درستی محاسباتمان را میازماییم.

توجه به نکات زیر که از بحث دربارهٔ اکسترممهای توابع نتیجه میشود ، پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم را آسان میسازد.

الف - در توابع متصل ماکزیممها و مینیممها متناوبند.

ب - اگر c مقداری ثابت و مثبت و تابع f(x) به‌ازای مقادیر معینی از متغیر x دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد ، تابع cf(x) نیز به‌ازای همان مقادیر x دارای ماکزیمم یا مینیمم است.

پس هنگام پیدا کردن مقادیر بحرانی x و تشخیص آن که به‌ازای کدام یک ازمقادیر بحرانی متغیر تابع ماکزیمم یا مینیمم است ، میتوان از ضریب ثابت صرف‌نظر کرد.

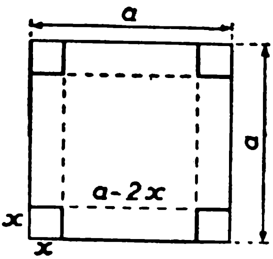
اگر c مقداری ثابت و منفی باشد ، وقتی f(x) ماکزیمم است ، cf(x) مینیمم است و بالعکس.

پ - اگر c مقداری ثابت و تابع f(x) به‌ازای مقادیر معینی از متغیر x دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد ، تابع c+f(x) نیز به ازای همان مقادیر x دارای ماکزیمم و مینیمم است.

پس هنگام پیدا کردن مقادیر بحرانی متغیروآزمایش تابع از نظر ماکزیمم و مینیمم بودن میتوان از جملهٔ ثابت صرف‌نظر کرد.

تمرین

۱) میخواهیم ازچهار گوشهٔ یک قطعه حلبی که به شکل مربع و به ضلع a است ، چهار مربع درآوریم و سپس اطراف آن را بالا ببریم و یک جعبهٔ سر بازبسازیم. طول ضلع مربعهای کوچک راچقدر بگیریم تا حجم جعبهٔ حاصل بیشترین مقدار ممکن شود (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

حل - اگر x درازای ضلع مربعهای کوچک یعنی عمق جعبه باشد ، درازای ضلع مربع کف جعبه $a - ۲x$ و حجم جعبه

$$V = (a - ۲x)^۲ x$$

است. این عبارت همان تابعی است که باید ماکزیمم آن را برحسب تغییرات x بدست آورد. اگر دستور صفحهٔ ۸۱ را بکار بندیم :

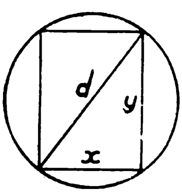
عمل اول - $\frac{dV}{dx} = (a - ۲x)^۲ - ٤x(a - ۲x) = a^۲ - ۸ax + ۱۲x^۲$

عمل دوم - حل معادلهٔ $a^۲ - ۸ax + ۱۲x^۲ = ۰$ مقادیر بحرانی $x = \frac{a}{۲}$ و $x = \frac{a}{٦}$ را میدهد.

روشن است که $x = \frac{a}{۲}$ مینیمم را میدهد ، زیرا دراین صورت تمام حلبی به عنوان چهار مربع گوشه برداشته میشود و چیزی برای ساختن جعبه نمیماند. بنابر قاعدهٔ مذکور در بالا تابع بهازای $x = \frac{a}{٦}$ ماکزیمم و حجم جعبه درآن صورت برابر $\frac{۲a^۳}{۲۷}$ است. بنابراین درازای ضلع مربعهای گوشه باید یک ششم درازای ضلع مربع داده شده باشد.

رسم خم نمایش تابع مسئلهٔ اخیر و مسائل بعد به عهدهٔ خواننده است.

۲) اگر مقاومت الواری که مقطعش مستطیل است، وقتی افقی قرار گیرد ، به نسبت مستقیم پهنا و مجذور ارتفاع مقطع تغییر کند ، ابعاد مقطع الواری را که از یک تیر استوانهای شکل به قطر d بدست میاید چه بگیریم تا مقاومت آن ماکزیمم باشد (شکل ۲۰) ؟



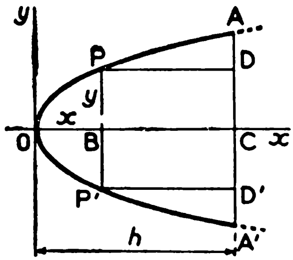
شکل ۲۰

حل - اگر x پهنا و y ارتفاع مقطع الوار باشد ، مقاومت آن وقتی ماکزیمم است که تابع $xy^۲$ ماکزیمم باشد. چنانکه از شکل ۲۰ پیداست ، $y^۲ = d^۲ - x^۲$ است. پس باید تابع $f(x) = x(d^۲ - x^۲)$ را آزمود.

عمل اول - $f'(x) = -۲x^۲ + d^۲ - x^۲ = d^۲ - ۳x^۲$

عمل دوم - $d^۲ - ۳x^۲ = ۰$

تابع به ازای $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ ماکزیمم است. پس اگر اطراف تیر به طریقی بریده شود که ارتفاع مقطع الوار $\sqrt{\frac{2}{3}}$ قطر تیر و پهنای مقطع الوار $\sqrt{\frac{1}{3}}$ قطرتیرباشد، مقاومت الوار ماکزیمم است.



شکل ۲۶

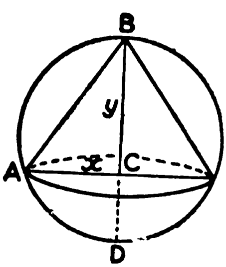
۳) عرض مستطیلی که درقطعه‌سهمی AOA' محاط است‌و بیشترین مساحت‌را دارد ، چقدراست (شکل ۲۶) ؟

حل - اگر $OC=h$ ، $BC=h-x$ و $PP'=2y$ گرفته شود ، مساحت مستطیل $PDD'P'$ برابر $2(h-x)y$ میشود. اما چون P روی سهمی $y^2=2px$ قرار دارد ، تابع مورد نظر به صورت

$$f(x)=2(h-x)\sqrt{2px}$$

درمیاید و عرض مطلوب برابر $\frac{2}{3}h$ میشود.

۴) ارتفاع مخروطی را پیدا کنید که درکره‌ای به شعاع r محاط است و بیشترین حجم ممکن را دارد (شکل ۲۷).



شکل ۲۷

حل - با توجه به شکل ۲۷ حجم مخروط مورد نظر $\frac{1}{3}\pi x^2y$ است ، اما

$$x^2=BC\times CD=y(2r-y)$$

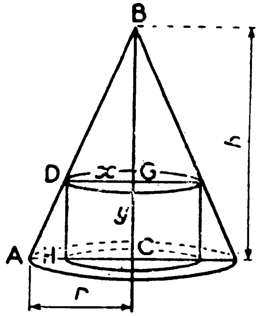
و بالنتیجه تابع مطلوب

$$f(y)=\frac{\pi}{3}y^2(2r-y)$$

و ارتفاع مخروط $\frac{4}{3}r$ است.

۵) ارتفاع استوانه‌ای‌را پیدا کنید که درمخروط دواری محاط است وبیشترین حجم ممکن را دارد (شکل ۲۸).

حل - AC را r ، BC را h ، شعاع قاعدهٔ استوانه را x و ارتفاع استوانه را y مینامیم . در این صورت حجم استوانه $\pi x^2 y$ میشود. اما ازآنجاکه دومثلث ABC و DBG متشابه‌اند :



شکل ۲۸

$$\frac{r}{x}=\frac{h}{h-y} \implies x=\frac{r(h-y)}{h}$$

و بالنتیجه تابع مورد نظر

$$f(y)=\frac{r^2}{h^2}y(h-y)^2$$

و ارتفاع استوانه $\frac{h}{3}$ است.

۶) درازای سه ضلع ذوزنقه‌ای هریک ۱۰ اینچ است. طول ضلع چهارم را چقدر بگیریم تا مساحت ذوزنقه ماکزیمم شود ؟ جواب : ۲۰ اینچ

۷) مساحت مزرعهٔ مستطیل شکلی که بوسیلهٔ دیواری محصوراست ، مقدارثابتی است. این مزرعه بوسیلهٔ دیوار دیگری که موازی یکی از اضلاع آن است به دو قسمت شده است. اگر طول کل دیوارها مینیمم باشد ، نسبت دو ضلع مزرعه بیکدیگر چیست ؟

جواب : $\frac{2}{3}$

۸) یکی از دیوارهای باغ مستطیل شکلی که مساحت‌آن ۴۳۲ یارد مربع است‌با دیوار باغ مجاور مشترك است و صاحب باغ مجاور نیمی از خرج بنای دیوار مشترك را میپردازد. اگر خرج دیوارکشی برای صاحب باغ اول کمترین مقدار ممکن شده باشد ، ابعاد آن باغ چقدر است ؟ جواب : ۱۸ یارد $\times$ ۲۴ یارد

۹) صاحب یک کارخانهٔ رادیوسازی به‌این نتیجه رسیده است که میتواند هفته‌ای x دستگاه رادیو به قیمت‌هردستگاه p دلار با شرط $5x=375-3p$ بفروشد. بهای تولید $\left(\frac{1}{5}x^2+15x+500\right)$ دلار است. نشان دهید که حداکثر سود وقتی عایدش میشود که تولید هفتگی درحدود ۳۰ دستگاه باشد.

۱۰) نشان دهید که اگر درمسئلهٔ ۹ رابطهٔ بین x و p به صورت $x=100-20\sqrt{\frac{p}{5}}$ باشد ، صاحب کارخانه باید برای بدست آوردن حداکثر سود

تنها هفته‌ای در حدود ۲۵ دستگاه رادیو بسازد.

۱۱) اگر در مسئلهٔ ۹ رابطهٔ بین x و p به صورت $x^۲=۲۵۰۰-۲۰p$ باشد، صاحب کارخانه هفته‌ای چند دستگاه رادیو بسازد تا حداکثر سود را بدست آورد؟

۱۲) بهای تولید x دستگاه در هفته $(ax^۲+bx+c)$ دلار و بهای فروش یک دستگاه p دلار و رابطهٔ موجود بین x و p به صورت $p=\beta-\alpha x^۲$ است. نشان دهید که حداکثر سود وقتی بدست میاید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$x=\frac{۱}{۳\alpha}\left[\sqrt{a^۲+۳\alpha(\beta-b)}-a\right]$$

۱۳) در مسئلهٔ ۹، دولت از هردستگاه t دلار مالیات میگیرد. سازنده این مبلغ را به بهای تولید میفزاید و بهای فروش و مقدار محصول هفتگی را از نو حساب میکند.

الف - نشان دهید که به‌بهای‌فروش‌تنها نزدیک به نیمی‌ازمبلغ‌مالیات افزوده میشود.

ب - درآمد حاصل از مالیات را برحسب تابعی از t بیان کنید و مالیات هردستگاه را طوری تعیین نمایید که درآمد اخیر ماکزیمم باشد.

پ - اگر به هردستگاه مالیاتی برابرآنچه در ب تعیین شده است بسته شود، نشان دهید که دراین صورت به بهای فروش درحدود ۲۳ درصد افزوده میگردد.

۱۴) بهای تولید x دستگاه در هفته $(ax^۲+bx+c)$ دلار است. به‌این مبلغ مالیات دولت که برای هردستگاه t دلار است افزوده میشود. بهای فروش هردستگاه (p دلار) بادستور $p=\beta-\alpha x$ تعیین میگردد. نشان دهید که: الف - درآمد حاصل ازمالیات وقتی ماکزیمم است که $t=\frac{\beta-b}{۲}$ باشد. ب - درهرصورت افزایش بهای فروش کمتر از مبلغ مالیات است.

یادآوری - درمسائل ومثالهای اقتصادی پارامترهای a، b، c، α و β همواره مثبتند.

۱۵) قدرت تولید روزانهٔ یک کارخانهٔ فولاد سازی x تن فولاد عادی و y تن فولاد عالی با رابطهٔ $y=\frac{۴۰-۵x}{۱۰-x}$ است. بهای تجارتی فولاد عادی نصف بهای تجارتی فولاد عالی است. نشان دهید که‌اگر کارخانه بخواهد حداکثردرآمد را داشته باشد، باید بطور متوسط روزی در حدود ۵٫۵ تن فولاد عادی تولید کند.

۱٦) شرکت تلفنی به این نتیجه رسیده است که اگر یک مرکز تلفن تا ۱۰۰۰ مشترك داشته باشد ، سود خالصی که از هردستگاه عاید شرکت میشود ۱۰ دلار است و اگر عدهٔ مشترکین از هزار تجاوز کند ، براثر اشتراك هرمشترك اضافی یک سنت از سود هردستگاه کاسته میشود. عدهٔ مشترکین چه باشد تا سود خالص شرکت ماکزیمم شود ؟

جواب : ۱۲۵۰

۱۷) بهای تولید یک‌واحد از کالای معینی p دلار است. تعداد کالایی که میتوان فروخت به نسبت عکس قوهٔ n ام بهای فروش تغییر میکند. بهای فروش را طوری تعیین کنید که حداکثر سود بدست آید. جواب : $\frac{np}{n-۱}$

۱۸) قطریک قوطی حلبی گرد با حجم ۵۸ اینچ مکعب چه باشد تا حلبی مورد نیاز مینیمم شود درصورتیکه (الف) قوطی سرباز باشد؟ (ب) قوطی در داشته باشد؟

جواب : (الف) اینچ ۵٫۲۹ # $\sqrt[۳]{\frac{٤٦٤}{\pi}}$ ، (ب) اینچ ٤٫۲۰ # $\sqrt[۳]{\frac{۲۳۲}{\pi}}$

۱۹) مساحت سطح جانبی استوانهٔ دواری ٤π فوت مربع است . از این استوانه نیمکره‌ای که قطر آن برابر قطر استوانه است ، در میاوریم. میدانیم که حجم مانده اکسترمم است . الف ـ ابعاد استوانه چقدر است ؟ ب ـ حجم مانده ماکزیمم است یا مینیمم ؟

جواب : شعاع استوانه یک فوت و ارتفاع آن ۲ فوت و حجم مانده ماکزیمم است.

۲۰) مساحت بزرگترین مستطیلی را پیدا کنید که دربین دوسهمی $۳y=۱۲-x^۲$ و $٦y=x^۲-۱۲$ محاط است و اضلاع آن موازی محورهای مختصاتند. جواب : ۱٦

۲۱) دورأس مستطیلی روی محور Ox و دورأس دیگر آن روی دوخط $y=۲x$ و $۳x+y=۳۰$ واقعند. به ازای چه مقدار از y مساحت این مستطیل ماکزیمم است ؟

جواب : $y=٦$

۲۲) قاعدهٔ بزرگ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی برابرقطر دایرهٔ محیطی آن یعنی ۲r است. طول قاعدهٔ کوچک‌ذوزنقه چه باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود ؟ جواب : r

۲۳) یک ضلع مستطیلی که در یک قطعه سهمی محاط است،برقاعدهٔ آن‌قطعه سهمی منطبق است. نشان دهید که نسبت مساحت بزرگترین مستطیل محاطی به مساحت قطعه سهمی $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است.

۲۴) مقاومت الواری که مقطع آن مستطیل است به نسبت حاصل‌ضرب پهنا در مربع ضخامت مقطع آن تغییر میکند. ابعاد مقاومترین الواری را پیدا کنید که پس‌از بریدن اطراف تیری که مقطع قائم آن بیضی به نیم قطرهای a و b است ، بدست میاید.

جواب : پهنا $= ۲b\sqrt{\frac{۱}{۳}}$ ، ضخامت $= ۲a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۲۵) سختی الواری که مقطع آن مستطیل است به نسبت حاصل‌ضرب پهنا درمکعب ضخامت مقطع آن تغییرمیکند. ابعاد سخت‌ترین الواری را پیدا کنید که پس‌از بریدن اطراف تیر گردی به شعاع a بدست میاید. جواب : $a \times a\sqrt{۳}$

۲۶) معادلهٔ مسیر گلوله‌ای $y = mx - \frac{(m^{۲}+۱)x^{۲}}{۸۰۰}$ است. نقطهٔ پرتاب مبدأ مختصات و تانژانت زاویهٔ پرتاب m است . الف ـ به ازای چه مقدار از m برد گلوله در صفحهٔ افقی مار برمبدأ مختصات ماکزیمم است ؟ ب ـ به ازای چه مقدار از m ارتفاع نقطهٔ برخورد گلوله با دیواری عمودی که در ۳۰۰ فوتی نقطهٔ پرتاب قرار دارد ماکزیمم است ؟ جواب : (الف) ۱ ، (ب) $\frac{۴}{۳}$

۲۷) شکل پنجره‌ای عبارتست از یک مستطیل که بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه قرار دارد. محیط پنجره p فوت است. نشان دهید که وقتی حداکثر نور وارد اطاق میشود که دوضلع چپ وراست پنجره برابر دوساق مثلث قائم‌الزاویه باشد.

۲۸) مجموع مساحتهای یک کره ویک مکعب مقداری معین و ثابت است. نشان دهید که مجموع احجام آنها وقتی مینیمم است که قطر کره برابر ضلع مکعب باشد . چه وقت مجموع اخیر ماکزیمم است ؟

۲۹) طول اضلاع بزرگترین مستطیل محاط در بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ را پیدا کنید. جواب : $a\sqrt{۲} \times b\sqrt{۲}$

۳۰) مساحت بزرگترین مستطیلی را پیدا کنید که یک قاعدهٔ آن بر محور Ox و

دو رأس دیگر آن روی خم نمایش تابع $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ است (شکل این خم را در فصل ۲۶ ببینید). جواب : $4a^2$

۳۱) نسبت مساحت کوچکترین بیضی محیط بریک مستطیل به مساحت آن مستطیل چیست ؟ میدانیم که مساحت بیضی با نیم قطرهای a و b برابر πab است.

جواب : $\frac{\pi}{2}$

۳۲) مختصات دورأس پایین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی $(-6, 0)$ و $(+6, 0)$ است‌ودو رأس دیگرآن روی خم $x^2+4y=36$ قرار دارند. مساحت بزرگترین ذوزنقه‌ای را که بدین طریق بدست میاید پیدا کنید. جواب : ۶۴

۳۳) فاصلهٔ بین مرکزهای دو کره به شعاعهای a و b برابر c است. نقطه‌ای از خط‌المرکزین AB ، مانند P ، را پیدا کنید که از آن بیشترین سطح کروی مرئی است. [اگرشعاع کره r باشد ، مساحت یک منطقه (شب کلاه) به‌ارتفاع h برابر $2\pi rh$ است.]

جواب : P به فاصلهٔ $\frac{ca^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$ واحد از A است.

۳۴) ابعاد بزرگترین مکعب مستطیل مربع‌القاعده‌ای را پیدا کنید که با بریدن اطراف کره‌ای به شعاع r بدست میاید. جواب : $h=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$

۳۵) کره‌ای به شعاع ۶ اینچ مفروض است. ارتفاع اجسام زیر را حساب کنید :

الف ـ استوانهٔ دوار محاطی که حجم آن ماکزیمم است.

ب ـ استوانهٔ دوار محاطی که سطح کل آن ماکزیمم است.

پ ـ مخروط دوار محیطی که حجم آن مینیمم است.

جواب : (الف) $4\sqrt{3}$ اینچ ، (ب) ۶٫۳۱ اینچ ، (پ) ۲۴ اینچ

۳۶) ثابت کنید که درساختن یک چادرمخروطی شکل باظرفیت معین وقتی کمترین مقدار پارچه بکار میرود که ارتفاع چادر $\sqrt{2}$ برابر شعاع قاعدهٔ آن باشد. نشان دهید که اگر این چادر در امتداد یک مولد بریده وگسترده شود ، زاویهٔ مرکزی قطاع حاصل

۱۵۲° ۹' است. اگرارتفاع چادر ۱۰ فوت باشد، برای ساختن آن چقدرپارچه لازم است؟
جواب : ۲۷۲ فوت مربع

۳۷) سهمی $y^2=2px$ وروی محور آن نقطهٔ P به فاصلهٔ a از رأس سهمی مفروض است. x، طول نزدیکترین نقطهٔ خم تا P را پیدا کنید. جواب : $x=a-p$

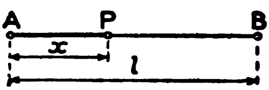
۳۸) مختصات نزدیکترین نقطهٔ خم $2y=x^2$ تا نقطهٔ (۱ , ٤) را پیدا کنید.
جواب : (۲ , ۲)

۳۹) اگر PQ کوتاهترین یاطویل‌ترین پاره خطی باشدکه نقطهٔ $P(a\ ,\ b)$ را به خم $y=f(x)$ وصل میکند، ثابت کنیدکه PQ به مماس به خم درنقطهٔ Q عمود است.

٤۰) دستوری که اندازهٔ کارآیی یک پیچ را میدهد عبارتست از

$$E=\frac{h(1-h\,tg\,\theta)}{h+tg\,\theta}$$

دراین دستور θ زاویهٔ مالش وh پای پیچ است. h را چنان بیابیدکه کارآیی پیچ ماکزیمم باشد. جواب : $h=sec\,\theta-tg\,\theta$


شکل ۲۹

٤۱) فاصلهٔ دو منبع حرارت به نامهای A و B برابر l و شدت گرمای آنها بترتیب a و b است. اگر نقطهٔ P بین A وB و به فاصلهٔ x از A باشد، شدت گرمایی که به نقطهٔ P میرسد،

با دستور
$$I=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(l-x)^2}$$

تعیین میشود. P کجا باشد تا حرارتی که به آن میرسد، حد اقل باشد.

جواب : $x=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\,l}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$

٤۲) قاعدهٔ تحتانی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی قطر اطول یک بیضی و دوانتهای قاعدهٔ فوقانیش برروی آن بیضی است. نشان دهیدکه مساحت این ذوزنقه وقتی ماکزیمم است که درازای قاعدهٔ فوقانی آن نصف درازای قاعدهٔ تحتانیش باشد.

٤۳) مثلث متساوی‌الساقینی‌است که دربیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ محاط است،

مختصات رأس آن $(b\ ,\ ۰)$ و مساحت‌آن ماکزیمم است. معادلهٔ قاعدهٔ آن را پیدا کنید.

جواب : $۲y+b=۰$

۴۴) مثلث متساوی‌الساقینی‌است که بربیضی $b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲$ محیط است، قاعدهٔ آن موازی محور Ox و مساحت آن مینیمم است. درازای قاعده و ارتفاع آن را پیدا کنید. جواب : ارتفاع آن $۳b$ و طول قاعده‌اش $۲a\sqrt{۳}$ است.

۴۵) اگر $P(a\ ,\ b)$ نقطه‌ای در ربع اول یک دستگاه مختصات قائم باشد، خط مار بر P نیم خط Ox را در نقطهٔ A و نیم خط Oy را در نقطهٔ B قطع میکند. طول A و عرض B را در هریک از حالات زیر حساب کنید :

الف ـ وقتی مساحت OAB مینیمم است،

ب ـ وقتی درازای AB مینیمم است،

پ ـ وقتی مجموع $OA+OB$ مینیمم است،

ت ـ وقتی فاصلهٔ نقطهٔ O از خط AB ماکزیمم است.

جواب : (الف) $۲a\ ,\ ۲b$

(ب) $a+a^{\frac{۱}{۳}}b^{\frac{۲}{۳}}\ ,\ b+a^{\frac{۲}{۳}}b^{\frac{۱}{۳}}$

(پ) $a+\sqrt{ab}\ ,\ b+\sqrt{ab}$

(ت) $\dfrac{a^۲+b^۲}{a}\ ,\ \dfrac{a^۲+b^۲}{b}$

۵۰- مشتق به منزلهٔ نرخ تغییر. - در شمارهٔ ۲۳ برای رابطهٔ

$$y=x^۲ \qquad (۱)$$

نسبت نموهای نظیر را بدست آوردیم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=۲x+\Delta x \qquad (۲)$$

وقتی $x=۴$ و $\Delta x=۰٫۵$ است، معادلهٔ (۲) مقدار

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=۸٫۵ \qquad (۳)$$

را میدهد. میگوییم وقتی x از ٤ به ٥ر٤ صعود میکند ، نرخ متوسط تغییر y نسبت به x برابر ٥ر٨ است.

بطورکلی **وقتی x تغییر میکند و از x به $x+\triangle x$ میرود ، نسبت**

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \qquad (A)$$

نرخ متوسط تغییر y نسبت به x است.

نرخ ثابت تغییر .ــ وقتی

$$y=ax+b \qquad (٤)$$

است ،

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=a$$

است. دراین‌صورت‌نرخ متوسط تغییرy نسبت به x برابر a است. اما a شیب‌خط مستقیم (٤) و لذا مقدار ثابتی است. تنها دراین حالت وقتی x از مقداری مانند x به $x+\triangle x$ صعود میکند ، نمو y یعنی $\triangle y$ برابرحاصل‌ضرب$\triangle x$ درنرخ تغییر است‌یعنی برابر حاصل‌ضرب $\triangle x$ در a است.

نرخ آنی تغییر . ـ اگر $\triangle x$ بسمت صفر میل کند و فاصلهٔ $(x\ ,\ x+\triangle x)$ کم شود ، نرخ متوسط تغییر y نسبت به x دراین فاصله بسمت نرخ آنی تغییر y نسبت x میل میکند. پس بنابر شمارهٔ ٢٤

$$\frac{dy}{dx} \qquad (B)$$

نرخ آنی تغییر y نسبت به x برای مقدار معینی از x است.

مثلاً برای رابطهٔ (١)

$$\frac{dy}{dx}=٢x \qquad (٥)$$

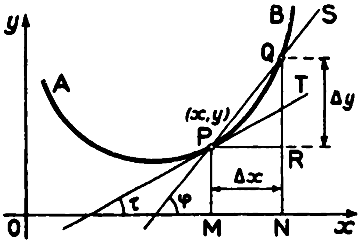
است و وقتی $x=٤$ است ، نرخ آنی تغییر y در مقابل هرواحد تغییر x ، ٨ واحد است.

در رابطهٔ (B) کلمهٔ «آنی» مستتر است.

تعبیر هندسی. ـ خم نمایش تابع

$$y=f(x) \qquad (٦)$$

را درنظر میگیریم (شکل ۳۰) . وقتی x از OM به ON صعود میکند ، y از MP به NQ صعود مینماید. نرخ متوسط تغییر y نسبت به x برابر شیب خط قاطع PQ است و نرخ آنی تغییر ، وقتی $x = OM$ است ، برابر شیب خط مماس PT است. پس



شکل ۳۰

نرخ آنی تغییر y درنقطهٔ $P(x, y)$ برابر است با نرخ ثابت تغییر y در امتداد خط مماس به خم در نقطهٔ P .

وقتی $x = x_0$ است ، نرخ آنی تغییر y یا $f(x)$ ، $f'(x_0)$ است. اکنون اگر x از x_0 به $x_0 + \triangle x$ صعود نماید ، مقدار دقیق تغییر y مساوی $f'(x_0)\triangle x$ نیست مگر آنکه‌مانند رابطهٔ (٤) ، $f'(x)$ مقدارثابتی باشد. ولی‌بعداً خواهیم‌دید‌که این حاصل‌ضرب، وقتی $\triangle x$ به اندازهٔ کافی کوچک است ، تقریباً برابر $\triangle y$ است.

۵۱- سرعت در حرکت مستقیم‌الخط . - وقتی در یک تابع ، متغیر مستقل زمان باشد ، موارد استعمال مهمی برای مطالب مذکور بدست میاید. یک مثال سادهٔ آن سرعت در حرکت مستقیم‌الخط است. حرکت نقطهٔ P را روی خط مستقیم AB درنظر میگیریم(شکل ۳۱) . اگر s فاصلهٔ نقطهٔ P از نقطهٔ ثابت O و t زمان لازم برای پیمودن

شکل ۳۱

آن فاصله باشد ، به هرمقدار t نقطهٔ معینی مانند P و بالنتیجه فاصلهٔ معینی مانند s نظیر میشود. بدین‌ترتیب s تابعی از t است و میتوان نوشت :

$$s = f(t)$$

اکنون اگر t نموی مانند $\triangle t$ بکند ، s نیز نموی مانند $\triangle s$ میکند و

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} \qquad (۱)$$

سرعت متوسط نقطهٔ متحرک P است‌که درمدت $\triangle t$ فاصلهٔ PP' را میپیماید. اگرحرکت

P یکنواخت (یعنی سرعت ثابت) باشد ، نسبت مذکور درهرفاصلهٔ زمانی مقدارثابتی است. این مقدار ثابت ، سرعت نقطهٔ متحرك در هرلحظه است.

در حالت کلی وقتی سرعت ثابت نیست ، بنابر تعریف **سرعت در یك لحظهٔ معین (یعنی نرخ تغییر s نسبت به t) حد سرعت متوسط به ازای $\Delta t \to 0$ است** ، بدین ترتیب

$$v=\frac{ds}{dt} \qquad (C)$$

است و میتوان گفت که **مقدارجبری سرعت درهر لحظه برابراست با مقدارمشتق فاصله نسبت به زمان یا نرخ تغییر فاصله نسبت به زمان.**

اگر v مثبت باشد ، فاصلهٔ s تابعی صعودی‌از t است ونقطهٔ P درجهت AB حرکت میکند. اگر v منفی باشد ، فاصلهٔ s تابعی نزولی از t است ونقطهٔ P درجهت BA حرکت میکند (شمارهٔ ٤٥).

برای نشان دادن‌آنکه این تعریف با استنباطی که ما ازسرعت داریم ، در هرصورت ، منطبق است ، سرعت یك جسم را درسقوط آزاد ، در پایان دومین ثانیهٔ پس‌از سقوط پیدا میکنیم.

تجربه نشان میدهد که حرکت جسم در سقوط آزاد ، درخلأ و در نزدیکی سطح زمین ، تقریباً ازقانون زیر تبعیت میکند :

$$s=\frac{۱}{۲}\,gt^{۲} \qquad (۲)$$

دراین دستور s اندازهٔ سقوط برحسب متر ، t مدت سقوط برحسب ثانیه و $g=۹٫۸۱$ است. قاعدهٔ کلی مذکور در شمارهٔ ۲۷ را برای محاسبهٔ مشتق رابطهٔ (۲) بکار میبندیم :

عمل اول- $s+\Delta s=\frac{۱}{۲}\,g(t+\Delta t)^{۲}=\frac{۱}{۲}\,g[t^{۲}+۲t\,\Delta t+(\Delta t)^{۲}]$

عمل دوم- $\Delta s=\frac{۱}{۲}\,g[۲t\,\Delta t+(\Delta t)^{۲}]$

عمل سوم- $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}\,g(۲t+\Delta t)=$ [سرعت متوسط در مدت Δt]

t را مساوی ۲ میگیریم :

$$\left[\begin{array}{r}\text{سرعت متوسط در پایان دومین ثانیهٔ}\\ \text{پس‌از سقوط در فاصلهٔ زمانی } \Delta t\end{array}\right] = \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}g(٤+\Delta t) \qquad (۳)$$

بنابر استنباطی که از سرعت داریم ، رابطهٔ (۳) سرعت در پایان دومین ثانیهٔ پس‌از سقوط را نمیدهد زیرا حتی اگر Δt را خیلی کوچک مثلاً $\frac{۱}{۱۰۰}$ یا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ثانیه بگیریم ، رابطهٔ (۳) تنها سرعت متوسط را دراین فاصلهٔ زمانی کوچک میدهد. اما منظور از سرعت در پایان دومین ثانیهٔ پس‌از سقوط **حد سرعت متوسط به ازای** $\Delta t \to ۰$ **است**. پس سرعت در پایان دومین ثانیهٔ پس‌از سقوط بنابر رابطهٔ (۳) ، $\frac{۱}{۲}g\times ٤$ یا ۱۹٫٦۲ متر در ثانیه است . بدین‌ترتیب تصور عادی ما از سرعت که براثر تجربه حاصل شده است ، متضمن تصور حد است ، یا به عبارت دیگر

$$v=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta s}{\Delta t}=۱۹٫٦۲ \text{ متر در ثانیه}$$

۵۲- نرخهای‌نظیر تغییر . - دربسیاری‌از مسائل متغیرهایی‌دیده میشوند که‌خود توابعی‌اززمان میباشند. با استفاده ازداده‌های این گونه مسائل میتوان روابطی بین متغیرها برقرارکرد و با مشتق گیری ازاین روابط روابطی بین نرخهای تغییر آنها برقرار نمود .

درحل این گونه مسائل از **دستورالعمل** زیر ، به عنوان راهنما ، استفاده میکنیم .

عمل اول - شکلی میکشیم که مبین ونشان دهندهٔ مسئله باشد. سپس کمیتهایی‌را که با زمان تغییر میکنند ، با حروف x ، y ، z و غیره نشان میدهیم .

عمل دوم - بین متغیرهای مورد نظر رابطه‌ای پیدا میکنیم که درجمیع‌لحظات صحیح باشد .

عمل سوم - از رابطهٔ اخیر نسبت به t مشتق میگیریم .

عمل چهارم - صورتی‌از کمیتهای داده شده و کمیتهای‌بدست‌آمده‌ترتیب میدهیم .

عمل پنجم - در رابطه‌ای که با مشتق گیری بدست آورده‌ایم (عمل سوم) کمیتهای معلوم را قرار میدهیم و با حل معادله‌ای که بدین گونه حاصل شده است مجهول را پیدا میکنیم .

تمرین

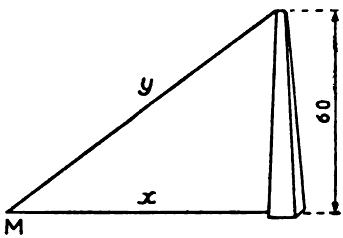
۱) شخصی با سرعت ٥ میل درساعت بسمت پای برجی به ارتفاع ٦٠ فوت پیش میرود . وقتی این شخص در فاصلهٔ ۸۰ فوتی از پای برج در حرکت است ، با چه سرعتی به رأس برج نزدیک میشود ؟

حل - دستورالعمل مذکور رابکارمیبندیم .

عمل اول - شکل ۳۲ را رسم میکنیم .

درهرلحظه ، فاصلهٔ بین شخص و پای برج را x و فاصلهٔ بین شخص و رأس برج را y مینامیم .

عمل دوم - چون مثلثی داریم که قائم‌الزاویه است :



شکل ۳۲

$$y^۲ = x^۲ + ۳٦۰۰$$

عمل سوم - از دو طرف این رابطه نسبت به t مشتق میگیریم :

$$۲y \frac{dy}{dt} = ۲x \frac{dx}{dt}$$

یا

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (۱)$$

معنی رابطهٔ اخیر آن است که در هرلحظه

$$(\text{نرخ تغییر } y) = \left(\frac{x}{y}\right) \times (\text{نرخ تغییر } x)$$

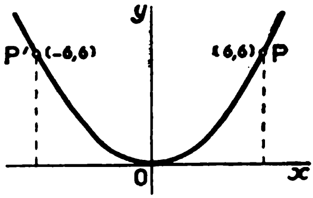
عمل چهارم - $x = ۸۰$, $\frac{dx}{dt} = -٥$ میل درساعت

$$y = \sqrt{x^۲ + ۳٦۰۰} = ۱۰۰ \quad , \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

عمل پنجم - مقادیر اخیر را در رابطهٔ (۱) میگذاریم :

جواب : $\frac{dy}{dt} = -\frac{۸۰}{۱۰۰} \times$ (میل درساعت ٥) = — ٤ میل درساعت

۲) نقطهٔ متحرکی روی سهمی $۶y = x^۲$ چنان تغییرمکان میدهد که وقتی $x = ۶$ است ، طول نقطه باسرعت ۲ فوت درثانیه افزایش می‌یابد. سرعت افزایش‌عرض نقطه دراین لحظه چقدر است ؟



شکل ۲۳

حل-**عمل اول**-سهمی $۶y = x^۲$ را رسم میکنیم (شکل ۲۳).

عمل دوم-میدانیم که $۶y = x^۲$ است.

عمل سوم- $۶\frac{dy}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt}$

یا $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{۳} \cdot \frac{dx}{dt}$ (۲)

معنی رابطهٔ اخیر آن است که درهرنقطهٔ سهمی

(نرخ تغییر طول نقطه) $\times \left(\frac{x}{۳}\right) =$ (نرخ تغییر عرض نقطه)

عمل چهارم- $x = ۶$, $\frac{dx}{dt} = ۲$ فوت درثانیه

$y = \frac{x^۲}{۶} = ۶$, $\frac{dy}{dt} = ?$

عمل پنجم-مقادیر اخیر را در رابطهٔ (۲) میگذاریم :

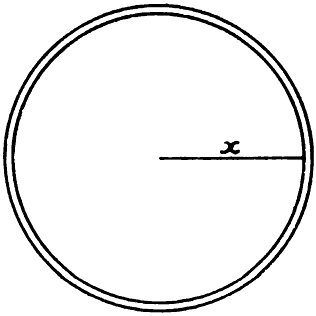
جواب : $\frac{dy}{dt} = \frac{۶}{۳} \times ۲ = ٤$ فوت درثانیه

بنابراین میتوان گفت که درنقطهٔ $P(۶ , ۶)$ نرخ افزایش عرض نقطهٔ متحرك دو برابر نرخ افزایش طول آن است . اگر بجای نقطهٔ $P(۶ , ۶)$ نقطهٔ $P'(-۶ , ۶)$ را در نظر بگیریم ، جواب به صورت

$\frac{dy}{dt} = -٤$ فوت در ثانیه

در میاید. علامت — نشان میدهد که وقتی طول زیاد میشود ، عرض کاهش می یابد .

۳) صفحهٔ فلزی دایره شکلی براثر حرارت منبسط میشود وبه شعاع آن درهرثانیه ۰۱ر۰ اینچ افزوده میگردد . وقتی شعاع آن ۲ اینچ است ، سرعت افزایش مساحت آنچقدراست؟



شکل ۳٤

حل- اگر x شعاع و y مساحت صفحهٔ فلزی باشد (شکل ۳٤) ، $y=\pi x^{۲}$ و

$$\frac{dy}{dt}=۲\pi x\frac{dx}{dt} \qquad (۳)$$

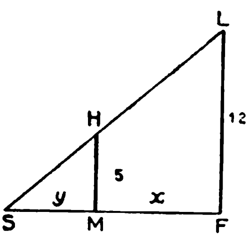
است، یعنی در هرلحظه سرعت افزایش مساحت صفحهٔ فلزی برحسب اینچ مربع برابراست با حاصل ضرب $۲\pi x$ درسرعت افزایش شعاع صفحه برحسب اینچ .

$$x=۲ \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۰٫۰۱ \quad , \quad \frac{dy}{dt}=?$$

این مقادیر را در رابطهٔ (۳) میگذاریم :

جواب : $\frac{dy}{dt}=۲\pi\times۲\times۰٫۰۱=۰٫۰٤\pi$ اینچ مربع در ثانیه

٤) بالای جاده‌ای که مستقیم وافقی است چراغ برقی در ارتفاع ۱۲ فوت آویزان است. جوانی که قدش ٥ فوت است و با سرعت ۱٦۸ فوت در دقیقه راه میرود ، از زیر چراغ میگذرد . میخواهیم بدانیم سایهٔ جوان با چه سرعتی افزایش می یابد.



شکل ۳٥

حل - اگر F تصویر قائم چراغ L ، x فاصلهٔ جوان تا نقطهٔ F و y طول سایهٔ جوان باشد ، بنابر شکل ۳٥ داریم :

$$\frac{y}{y+x}=\frac{٥}{۱۲}$$

یا

$$y=\frac{٥}{۷}x$$

از دو طرف این رابطه مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{5}{7}\cdot\frac{dx}{dt}$$

رابطهٔ اخیر مبین آن است که طول سایهٔ جوان با سرعتی برابر $\frac{5}{7}$ سرعت‌جوان، یعنی ۱۲۰ فوت در دقیقه، زیاد میشود.

۵) نقطهٔ P روی‌سهمی $y^2=12x$ طوری حرکت میکند که برطول آن درهرثانیه ۲ اینچ افزوده میشود. درکدام نقطه ازسهمی نرخ افزایش طول و عرض نقطه یکی‌است؟
جواب: (۳ , ۶)

۶) به ازای چه مقادیری از x نرخ‌تغییر $x^3-12x^2+45x-13$ صفر است؟
جواب: ۳ و ۵

۷) برای بساحل‌کشیدن یک کرجی که عرشهٔ آن ۱۲ فوت پایین‌تر ازسطح سکوی ساحل قرار دارد، ازطنابی استفاده میشود که یک سر آن به حلقه‌ای که درساحل متصل است منصوب است و سر دیگر آن به چرخی که به عرشهٔ کرجی وصل است منصوب میباشد. وقتی چرخ میچرخد، درهردقیقه ۸ فوت از طناب به دور آن میپیچد. میخواهیم بدانیم که وقتی کرجی به فاصلهٔ ۱۶ فوت ازساحل قرار دارد، باچه سرعتی به ساحل نزدیک میشود؟ جواب: ۱۰ فوت در دقیقه

۸) کشتی‌یی با سرعت ۸ فوت‌در ثانیه از ساحل‌دور میشود. طنابی که یک سرآن به کشتی وصل است، سر دیگرش به چرخی متصل است که ۲۰فوت بالاتر ازسطح اتصال طناب به کشتی قرار دارد. میخواهیم بدانیم وقتی فاصلهٔ نقطهٔ اتصال طناب به کشتی از امتداد قائم چرخ ۳۰ فوت است، طناب با چه سرعتی باز میشود.
جواب: ۶٫۶۶ فوت در ثانیه

۹) سر نردبانی که‌طول آن ۵۰ فوت‌است به‌دیوار قائمی تکیه‌دارد. پای نردبان، روی سطح زمین که افقی است، با سرعت ۳ فوت‌در دقیقه کشیده میشود واز پای دیوار دور میگردد. (الف) وقتی پای نردبان به فاصلهٔ ۱۴ فوت از پای دیوار قرار دارد، سرعت سر نردبان، که به دیوار متکی است، چقدر است؟ (ب) چه وقت سرعت سر نردبان (روی دیوار) با سرعت پای‌نردبان(روی زمین) مساویست؟ (پ) چه وقت سرعت سر نردبان ۴ فوت در دقیقه است؟

جواب: (الف) $\frac{7}{8}$ فوت در دقیقه

(ب) وقتی پای نردبان به فاصلهٔ $25\sqrt{2}$ فوت ازپای دیوار قرار دارد.

(پ) وقتی پای نردبان به فاصلهٔ ۴۰ فوت ازپای‌دیوار قرار دارد.

۱۰) کشتی‌یی با سرعت ۶ میل‌در ساعت بسمت جنوب و کشتی دیگری باسرعت ۸ میل در ساعت بسمت مشرق حرکت میکنند. درساعت ۱۶ کشتی دوم از نقطه‌ای میگذرد که کشتی اول دو ساعت قبل از آن نقطه گذشته است. (الف) نرخ افزایش یا کاهش فاصلهٔ بین دو کشتی در ساعت ۱۵ چه بوده است؟ (ب) نرخ افزایش فاصلهٔ بین دو کشتی درساعت ۱۷ چه خواهد بود؟ (پ) درچه ساعتی فاصلهٔ بین دو کشتی نه کم و نه زیاد میشده است؟

جواب: (الف) درساعت ۱۵ از فاصلهٔ بین دو کشتی ساعتی ۲٫۸ میل کم میشده است.

(ب) درساعت ۱۷ به فاصلهٔ بین دو کشتی ساعتی ۸٫۷۲ میل افزوده خواهد شد.

(پ) تقریباً درساعت پانزده وهفده دقیقه تغییر فاصله صفر بوده است.

۱۱) طول هریک از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاعی a اینچ است و به هریک از آنهادر هرساعت k اینچ افزوده میشود. مساحت این مثلث با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

جواب: با سرعت $\frac{\sqrt{3}}{2}ak$ اینچ سربع درساعت.

۱۲) طول هریک از یالهای چهار وجهی منتظمی ۱۰ اینچ است و به هریک از آنها در هردقیقه ۰٫۱ اینچ افزوده میشود. حجم این چهار وجهی با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۱۳) ابعاد مستطیلی، درلحظهٔ معینی، a و b میباشند و بترتیب با سرعتهای m و n زیاد میشوند. نشان دهیدکه مساحت‌این مستطیل با سرعت an + bm افزایش می‌یابد.

۱۴) ابعاد مکعب مستطیلی در لحظهٔ معینی بترتیب ۶ و ۸ و ۱۰ اینچ است. این ابعاد بترتیب با سرعتهای ۰٫۲ اینچ در ثانیه، ۰٫۳ اینچ درثانیه و۰٫۱ اینچ درثانیه زیاد میشوند. سرعت افزایش حجم این مکعب مستطیل در ثانیه چقدر است؟

۱۵) دورهٔ تناوب (P ثانیه) یک نوسان کامل آونگی به طول l متر با دستور

$P=2\sqrt{l}$ تعیین میشود. وقتی l برابر ۰٫۳۶ متر است ، نرخ تغییر دورهٔ تناوب آونگ نسبت به طول‌آن‌چیست ؟ با استفاده ازاین نتیجه مقدار تقریبی نمو P را ، وقتی l از ۰٫۳۶ متر به ۰٫۳۶۵ متر افزایش می‌یابد ، حساب کنید.

جواب : ۰٫۰۱۶۶ s/cm و ۰٫۰۸۳ s

۱۶) قطر قاعده و ارتفاع استوانهٔدواری در لحظهٔ معینی بترتیب ۱۰ اینچ و ۲۰ اینچ است. به قطر استوانه در هردقیقه یک اینچ افزوده میشود اما حجم استوانه ثابت میماند. میخواهیم بدانیم ارتفاع استوانه چگونه تغییر میکند ؟

جواب : از ارتفاع استوانه در هردقیقه چهار اینچ کاسته میشود.

۱۷) شعاع قاعدهٔ مخروط دواری ۷ اینچ و ارتفاع آن ۲۴ اینچ است . شعاع قاعدهٔ آن در هردقیقه ۳ اینچ افزایش می‌یابد درصورتیکه از ارتفاع آن در هردقیقه ٤ اینچ کاسته میشود. سرعت‌وجهت تغییرمساحت‌سطح کل مخروط را درنخستین‌لحظه تعیین کنید.

جواب : به مساحت سطح کل مخروط در هردقیقه 96π اینچ مربع افزوده میشود.

۱۸) به‌دوسراستوانه‌ای که شعاع آن ۱۰ $(=r)$ وارتفاع آن ۲۰ $(=h)$ اینچ است ، دو نیمکره افزوده شده است. حجم این جسم ثابت میماند درصورتیکه به r در هر دقیقه نیم اینچ افزوده میگردد. سرعت تغییر ارتفاع درنخستین لحظه چقدر است ؟

۱۹) قطر دهنهٔ یک قیف مخروطی ۱۲ اینچ و عمق‌آن ۱۰ اینچ است. درهرثانیه ۱۰ اینچ مکعب مایع بداخل قیف ریخته میشود ، درصورتیکه در هرثانیه تنها یک اینچ مکعب مایع از آن خارج میگردد. سرعت بالا آمدن سطح مایع را درلحظه‌ای که ارتفاع مایع در داخل قیف ٦ اینچ است ، تعیین کنید.

۲۰) منبع گازی محتوی ۱۰۰۰ فوت مکعب گازبا فشار ٥ پاوند براینچ مربع است. اگرفشارگاز با سرعت ۰٫۰۵ پاوند براینچ مربع درساعت کم شود (وقانون بویل ـ ماریوت* یعنی $pv=C^{te}$ را صحیح بدانیم) ، حجم گاز با چه سرعتی زیاد میشود ؟

جواب : ۱۰ فوت مکعب در ساعت.

۲۱) قانون انبساط آدیاباتیک** هوا $PV^{1.4}=C$ است . در لحظهٔ معینی ، حجم هوا ۱۰ فوت مکعب و فشار آن ۵۰ پاوند براینچ مربع است . اگر حجم درهرثانیه

* Boyle-Mariotte ** Adiabatic

۱ فوت مکعب کم شود ، فشار با چه سرعتی تغییر میکند ؟

جواب : فشار با سرعت ۷ پاوند براینچ مربع درثانیه زیاد میشود.

۲۲) اگر $y=4x-x^{3}$ باشد و x بطور یکنواخت با سرعت $\frac{1}{3}$ واحد در ثانیه زیاد شود ، شیب خم نمایش تابع y ، وقتی $x=2$ است ، با چه سرعتی تغییر میکند ؟

جواب : با سرعت ٤ واحد در ثانیه کم میشود.

۲۳) یک میلهٔ ۱۰ فوتی در صفحهٔ xy طوری حرکت میکند که همواره A و B یعنی دو انتهای آن ، بترتیب روی محورهای قائم Ox و Oy قرار دارند. اگر A به فاصلهٔ ۸ فوت از مبدأ مختصات باشد و با سرعت ۲ فوت در ثانیه از آن دور شود :

الف ـ انتهای B با چه سرعتی به مبدأ مختصات نزدیک میشود ؟

ب ـ مساحت مثلث محدود بین AB ومحورهای مختصات با چه سرعتی تغییر میکند ؟

پ ـ اگر P وسط AB باشد ، سرعت تغییر OP چیست ؟

جواب : (الف) $\frac{8}{3}$ فوت در ثانیه ، (ب) در هر ثانیه $\frac{14}{3}$ فوت مربع کم میشود ، (پ) OP مقدار ثابتی است.

۲٤) r و S و V بترتیب شعاع و مساحت و حجم یک کره‌اند. نشان دهید که $\frac{dV}{dt}=\frac{r}{2}\cdot\frac{dS}{dt}$ است.

۲۵) راه‌آهنی جادهٔ شوسه‌ای را به زاویهٔ 60° قطع میکند. لوکوموتیوی درفاصلهٔ ۸۰۰ فوتی محل تقاطع راه آهن و جادهٔ شوسه قرار دارد و با سرعت ٦۰ میل درساعت ازآن دور میشود. اتوموبیلی در فاصلهٔ ۵۰۰ فوتی محل تقاطع قرار دارد و با سرعت ۳۰ میل در ساعت به آن نزدیک میگردد . فاصلهٔ مستقیم بین لوکوموتیو و اتوموبیل با چه سرعتی تغییر میکند ؟ جواب : با سرعت ۱۵ یا $15\sqrt{3}$ میل در ساعت زیاد میشود.

۲٦) مقطع قائم یک آبشخوار افقی که طول آن ۱۰ فوت است ، به شکل مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است. اگردرهردقیقه ۸ فوت مکعب آب وارد آن شود ، وقتی عمق آب ۲ فوت است ، سطح آب با چه سرعتی بالا میاید ؟ جواب : $\frac{1}{5}$ فوت دردقیقه

۲۷) در مسئلهٔ ۲٦ ، اگر عمق آب موجود در آبشخوار ۳ فوت باشد ، آب با چه

سرعتی وارد آن شود تا سطح آب در هردقیقه $\frac{۱}{۶}$ فوت بالا بیاید ؟

۲۸) مقطع یک آبشخوار افقی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است . طول آبشخوار ۱۲ فوت ، قاعدهٔ پایین ذوزنقه ۳ فوت و سینوس زاویه‌ای که دو ساق ذوزنقه با امتداد قائم میسازند ، $\frac{۴}{۵}$ است. اگر در هردقیقه ۱۰ فوت مکعب آب وارد آبشخوار شود ، وقتی عمق آب ۲ فوت است ، سطح آب با چه سرعتی بالا میاید ؟

۲۹) درمسئلهٔ ۲۸ ، آب با چه سرعتی از سوراخ کف آبشخوارخارج شود تاسطح آب ، وقتی عمق آن ۳ فوت است ، با سرعت ۱ر۰ فوت در دقیقه پایین رود ؟

۳۰) A و B بترتیب نقاط تقاطع خط مماس به شاخهٔ مثبت هذلولی $xy=۴$ با محورهای Ox و Oy است. اگر طول نقطهٔ A در هرثانیه ۳ واحد زیاد شود و مبدأ حرکت نقطهٔ O باشد ، سرعت نقطهٔ B در پایان ثانیهٔ پنجم چقدر است ؟

جواب : $-\frac{۱۶}{۷۵}$ واحد درثانیه .

۳۱) نقطهٔ P روی سهمی $y^۲=x$ طوری حرکت میکند که به طول آن در هرثانیه k واحد افزوده میشود . M تصویر P روی محور Ox است. مساحت مثلث OMP ، وقتی $OM=a$ است ، با چه سرعتی زیاد میگردد ؟

جواب : $\frac{۳}{۴}k\sqrt{a}$ واحد در ثانیه

تمرین اضافی

۱) سهمی $y^۲=۱۶x$ و وتری را که به محور Ox عمود است و ازکانون سهمی میگذرد ، درنظر میگیریم. نخست در داخل سطح بین سهمی و وتر مذکور مستطیلی محاط میکنیم که یک ضلع آن منطبق بروتر باشد. سپس مکعب مستطیلی میسازیم که قاعدهٔ آن مستطیل مذکور و ارتفاعش برابر ضلعی‌از مستطیل باشد که موازی محور Ox است. حجم بزرگترین مکعب مستطیلی که بدین‌ترتیب بنا میشود چقدر است ؟

جواب : $\frac{۴۰۹۶}{۱۲۵}\sqrt{۵} \# ۷۳٫۲۷$

۲) معادلهٔ بیضی‌یی را پیدا کنید که نسبت به محورهای مختصات قرینه است، از نقطهٔ ثابت (h , k) میگذرد و مساحت آن مینیمم است.

جواب : $k^۲x^۲+h^۲y^۲=۲h^۲k^۲$

۳) خم‌نمایش معادلهٔ $x^۳-۳xy+y^۳=۰$ در ربع اول‌دستگاه مختصات‌حلقه‌ای دارد که نسبت به خط $y=x$ قرینه است. مثلثهای متساوی‌الساقینی‌را درنظر میگیریم که رأس آنها مبدأ مختصات و قاعدهٔ آنها منطبق برخط $x+y=a$ است. به ازای چه مقدار از a مساحت مثلث ماکزیمم‌است؟ جواب : $\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۱۳})\#۲٫۳۰۳$

٤) از نقطهٔ P که در ربع اول دستگاه مختصات و روی خم $y=۷-x^۲$ است، مماس به خم را رسم میکنیم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع میکند. جای P را چنان بیابید که طول پاره خط AB مینیمم باشد.

جواب : عرض $=\frac{٤۹}{۸}$

٥) بهای بنا کردن ساختمانی برای طبقهٔ اول ۵۰۰۰۰ دلار، برای طبقهٔ دوم ۵۲۵۰۰ دلار، برای طبقهٔ سوم ۵۵۰۰۰ دلار و به همین ترتیب برای هرطبقهٔ بالاتر ۲۵۰۰ دلار بیشتر از طبقهٔ زیر آن است. هزینه‌های دیگرساختمان (مانند زمین، نقشه، زیرزمین و غیره) جمعاً ۲۵۰۰۰۰ دلار و درآمد خالص سالانهٔ هرطبقه ۵۰۰۰ دلار است. ساختمان چند طبقه ساخته شود تا نرخ بهره حداکثر باشد؟ جواب : ۱۷ طبقه

٦) افزایش مقدار فروش کالای معینی برحسب پاوند متناسب است باکاهش مالیات‌برهرپاوند. وقتی مالیات صفراست، مقدار فروش کالا m پاوند، و وقتی مالیات برهر پاوند t دلاراست، مقدار فروش کالا n پاوند است. مالیات‌برهر پاوند چقدر باشد تا درآمد حاصل از مالیات حداکثر شود؟

۷) سهمی $y=kx^۲$ مفروض‌است. وتر BC ومماسهای در نقطهٔ B و C مثلث ABC را تشکیل میدهند. BC که همواره به محورسهمی عمود میماند، با سرعت ۲ واحد در ثانیه به رأس سهمی نزدیک میشود. میخواهیم بدانیم که وقتی BC به فاصلهٔ ٤ واحد از رأس سهمی قرار دارد، سرعت کاهش مساحت مثلث چقدر است؟

۸) شعاع قاعدهٔ ظرفی که به شکل استوانهٔ قائم است، ۱۰ اینچ است. درکف این ظرف سوراخی به قطر ۲ اینچ موجود است. سرعت خروج آب با دستور $v^۲=۲gh$

که در آن h ارتفاع آب در ظرف و g شتاب ثقل است ، داده شده است. سرعت خروج آب با چه سرعتی تغییر میکند ؟ جواب : $\frac{g}{۱۰۰}$ فوت در ثانیه کم میشود .

۹) در وسط کوچه‌ای چراغی در ارتفاع ۱۰ فوتی آویزان است. فاصلهٔ چراغ از دیواری که عمود به امتداد کوچه‌است ، ۲۰ فوت‌است. شخصی‌به بلندی ۶ فوت ، درست در وسط کوچه ، با سرعت ۲ فوت در ثانیه به دیوار مقابل‌نزدیک میشود. وقتی آن شخص در فاصلهٔ ٤ فوتی دیوار است ، سرعت سایهٔ سرش روی دیوار چقدر است ؟

جواب : $\frac{۵}{۸}$ فوت در ثانیه .

فصل ششم

مشتقات متوالی و موارد استعمال آنها

۵۳- تعریف مشتقات متوالی. - دیدیم که مشتق تابعی از x معمولاً تابعی از x است. این تابع جدید نیز ممکن است مشتق داشته باشد. دراین صورت مشتق **مشتق اول** را **مشتق دوم** تابع اصلی مینامند . به همین ترتیب ، مشتق مشتق دوم را مشتق سوم و ... و مشتق مشتق $(n-۱)$ ام را مشتق n ام تابع مینامند. بنابراین اگر

$$y=۳x^{۴}$$

باشد ، داریم :

$$\frac{dy}{dx}=۱۲x^{۳}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=۳۶x^{۲}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=۷۲x$$

. . . .

طرز نشان‌دادن مشتقات متوالی. - نشانه‌های مشتقات متوالی معمولاً به‌صورت زیر خلاصه میشود :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)=\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$$

. . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}\right)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

اگر $y=f(x)$ باشد ، مشتقات متوالی آن به صورت زیر نوشته میشود :

$$\frac{dy}{dx}=y'=f'(x) \quad , \quad \frac{d^۲y}{dx^۲}=y''=f''(x)$$

$$\frac{d^۳y}{dx^۳}=y'''=f'''(x) \quad , \quad .... \quad , \quad \frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

در مثال بالا مناسب‌ترین نشانه عبارتست از :

$$y=۳x^٤ \;,\; y'=۱۲x^۳ \;,\; y''=۳٦x^۲ \;,\; y'''=۷۲x \;,\; y^{iv}=۷۲$$

٥٤- مشتقات متوالی توابع ضمنی. - برای نشان دادن‌روش محاسبه ، مشتق دوم معادلهٔ هذلولی‌زیر را حساب میکنیم :

$$b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲ \tag{۱}$$

از دو طرف این معادله نسبت به x مشتق میگیریم (شمارهٔ ٤١) :

$$۲b^۲x-۲a^۲y\,\frac{dy}{dx}=۰$$

یا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^۲x}{a^۲y} \tag{۲}$$

از دو طرف معادلهٔ اخیر ، با توجه به این که y تابعی از x است ، یک بار دیگر مشتق میگیریم :

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{a^۲yb^۲-b^۲xa^۲\,\dfrac{dy}{dx}}{a^٤y^۲}$$

بجای $\frac{dy}{dx}$ مقدار آن را از رابطهٔ (۲) میگذاریم :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2b^2y-a^2b^2x\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2}=-\frac{b^2(b^2x^2-a^2y^2)}{a^4y^3}$$

اما بنابر معادلهٔ داده شده ، $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ است ، پس

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

تمرین

درستی مشتقهای زیر را بیازمایید :

۱) $y=3x^4-2x^3+6x$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=36x^2-12x$

۲) $s=\sqrt{a+bt}$ $\qquad \frac{d^3s}{dt^3}=\frac{3b^3}{8(a+bt)^{\frac{5}{2}}}$

۳) $y=\frac{a+bx}{a-bx}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4ab^2}{(a-bx)^3}$

۴) $u=\sqrt{a^2+v^2}$ $\qquad \frac{d^2u}{dv^2}=\frac{a^2}{(a^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$

۵) $y=\frac{x^2}{a+x}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^2}{(a+x)^3}$

۶) $s=\frac{t}{\sqrt{2t+1}}$ $\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{-(t+2)}{(2t+1)^{\frac{5}{2}}}$

۷) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{1-x}$ $\qquad f^{iv}(x)=\frac{-4!}{(1-x)^5}$

۸) $y=\dfrac{2}{x+1}$ $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{2(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

۹) $x^2+y^2=r^2$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{r^2}{y^3}$

۱۰) $y^2=4ax$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{4a^2}{y^3}$

۱۱) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$

۱۲) $ax^2+2hxy+by^2=1$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$

۱۳) $x^3+y^3=1$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2x}{y^5}$

۱۴) $x^4+2x^2y^2=a^4$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y^4-x^2y^2-x^4}{x^2y^3}$

درمسائل ۱۵ تا ۲۰ مقادیر y' و y'' را بەازای مقدارداده شدهٔ متغیر حساب کنید :

۱۵) $y=\sqrt{ax}+\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}}$; $x=a$ $\qquad y'=0$, $y''=\dfrac{1}{2a}$

۱۶) $y=\sqrt{25-3x}$; $x=3$ $\qquad y'=-\dfrac{3}{8}$, $y''=-\dfrac{9}{256}$

۱۷) $y=x\sqrt{x^2+9}$; $x=4$ $\qquad y'=\dfrac{41}{5}$, $y''=\dfrac{236}{125}$

۱۸) $x^2-4y^2=9$; $x=5$, $y=2$ $\qquad y'=\dfrac{5}{8}$, $y''=-\dfrac{9}{128}$

۱۹) $x^2+4xy+y^2+3=0$; $x=2$, $y=-1$

$y'=0$, $y''=-\dfrac{1}{3}$

۲۰) $y=(3-x^2)^4 \;;\; x=1$ ۲۱) $y=\sqrt{1+2x} \;;\; x=4$

۲۲) $y=\sqrt[3]{x^2+4} \;;\; x=2$ ۲۳) $y=x\sqrt{3x-2} \;;\; x=2$

۲٤) $y^2+2xy=16 \;;\; x=3 \;,\; y=2$

۲٥) $x^3-xy^2+y^3=8 \;;\; x=2 \;,\; y=2$

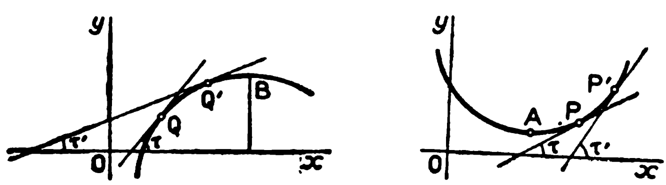
درمسائل زیر $\frac{d^2y}{dx^2}$ را پیدا کنید :

۲٦) $y=x^3-\frac{3}{x}$ ۲۷) $y=\frac{x^2}{x^2+a^2}$

۲۸) $y=\sqrt[3]{2-3x}$ ۲۹) $y=x\sqrt{a^2-x^2}$

۳۰) $y^2-4xy=16$ ۳۱) $x^3-3axy+y^3=b^3$

۵۵- جهت تقعر یك منحنی . - وقتی نقطه‌ای از منحنی مانند $P(x, y)$ روی منحنی تغییرمکان دهد ، شیب خط مماس به منحنی درنقطهٔ P تغییر میکند. وقتی خط مماس زیر منحنی قرار دارد (شکل ۳٦ الف) ، تقعر قوس نظیر بسمت بالاست و وقتی خط مماس بالای منحنی قرار دارد (شکل ۳٦ ب) ، تقعر قوس بسمت پایین است . درشکل الف ، وقتی P قوس AP' را میپیماید ، شیب زیاد میشود و از آنجا $f'(x)$ تابعی صعودی از x



ب الف

شکل ۳٦

است. بعکس درشکل ب ، وقتی P قوس QB را میپیماید ، شیب کم میشود و $f'(x)$ تابعی نزولی است. بنابراین $f''(x)$ درحالت اول مثبت و درحالت دوم منفی است (شمارهٔ ٤٥) . پس برای‌تعیین جهت تقعر منحنی دریک نقطه از خم از قضیهٔ زیر استفاده میکنیم :

اگر مشتق دوم y نسبت به x مثبت باشد تقعر خم نمایش تابع $y=f(x)$ بسمت بالاست و اگر مشتق دوم منفی باشد، تقعر خم بسمت پایین است.

۵۶- روش دوم برای پیدا کردن ماکزیمم ومینیمم. - در شکل ۳۶ الف، در نقطهٔ A تقعرخم بسمت بالاست و عرض نقطه مینیمم است. دراین نقطه $f'(x)=0$ و $f''(x)>0$ است. درشکل ۳۶ ب، در نقطهٔ B، $f'(x)=0$ و $f''(x)<0$ است.

پس میتوان شرایط کافی برای ماکزیمم یا مینیمم بودن تابع $f(x)$ را، به ازای هرمقدار بحرانی متغیر، به صورت زیر بیان کرد:

$f(x)$ ماکزیمم است اگر $f'(x)=0$ و $f''(x)<0$ باشد.

$f(x)$ مینیمم است اگر $f'(x)=0$ و $f''(x)>0$ باشد.

بااستفاده ازاین مطلب میتوان **دستورالعمل** زیر را برای پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم ذکر نمود:

عمل اول - مشتق اول تابع را پیدا میکنیم.

عمل دوم - مشتق اول را مساوی صفرقرار میدهیم و ریشه‌های حقیقی معادلهٔ حاصل را بدست میاوریم. این ریشه‌ها مقادیر بحرانی متغیرند.

عمل سوم - مشتق دوم تابع را پیدا میکنیم.

عمل چهارم - مقادیر بحرانی متغیر را بترتیب در مشتق دوم میگذاریم. اگرحاصل منفی باشد، تابع به ازای آن مقدار بحرانی ماکزیمم است واگر حاصل مثبت باشد، تابع مینیمم است.

وقتی $f''(x)$ صفراست و یا وجود ندارد، روش بالا، گرچه تابع ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد، قابل اجرا نیست. در آن صورت باید روش نخست را که در شمارهٔ ۴۷ بیان شده و روش اساسی است، بکار برد. بطورکلی روش دوم کوتاهترین روش است و وقتی بکار میرود که محاسبهٔ مشتق دوم خیلی طولانی یا خیلی مشکل نباشد.

مثال ۱- دستور بالا را برای آزمایش تحلیلی تابع

$$M=x^2+\frac{432}{x}$$

که درصفحهٔ ۷۵ ذکر شده است، بکار میبریم.

حل - $f(x) = x^۲ + \frac{۴۳۲}{x}$

عمل اول - $f'(x) = ۲x - \frac{۴۳۲}{x^۲}$

عمل دوم - $۲x - \frac{۴۳۲}{x^۲} = ۰$

مقدار بحرانی $x = ۶$

عمل سوم - $f''(x) = ۲ + \frac{۸۶۴}{x^۳}$

عمل چهارم - $f''(۶) > ۰$

پس $f(۶) = ۱۰۸$ مینیمم تابع است.

مثال ۲- با بکار بستن روش دوم ماکزیمم و مینیمم تابع $x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$ را پیدا کنید.

حل - $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$

عمل اول - $f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۹$

عمل دوم - $۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰$

پس مقادیر بحرانی عبارتند از $x = ۳$ و $x = -۱$

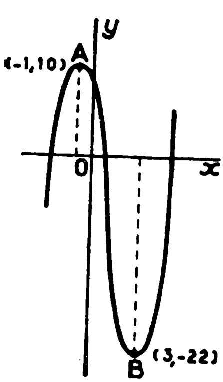
عمل سوم - $f''(x) = ۶x - ۶$

عمل چهارم - $f''(-۱) = -۱۲$

مقدار ماکزیمم $=$ (عرض نقطهٔ A) $= ۱۰ = f(-۱)$

$f''(۳) = +۱۲$

مقدار مینیمم $=$ (عرض نقطهٔ B) $= -۲۲ = f(۳)$



شکل ۲۷

تمرین

ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را پیدا کنید:

۱) x^3+3x^2-2

جواب: تابع به‌ازای $x=-2$ ماکزیممی برابر ۲ و به‌ازای $x=0$ مینیممی برابر ۲− دارد.

۲) x^3-3x+4

تابع به‌ازای $x=-1$ ماکزیممی برابر ۶ و به ازای $x=1$ مینیممی برابر ۲ دارد.

۳) $2x^3-3ax^2+a^3$ ، $(a>0)$

تابع به ازای $x=0$ ماکزیممی برابر a^3 و به ازای $x=a$ مینیممی برابر صفر دارد.

۴) $2+12x+3x^2-2x^3$

تابع به ازای $x=2$ ماکزیممی برابر ۲۲ و به ازای $x=-1$ مینیممی برابر ۵− دارد.

۵) $3x-2x^2-\frac{4x^3}{3}$

تابع به ازای $x=\frac{1}{2}$ ماکزیممی برابر $\frac{5}{6}$ و به ازای $x=-\frac{3}{2}$ مینیممی برابر $-\frac{9}{2}$ دارد.

۶) $3x^4-4x^3-12x^2+2$

تابع به‌ازای $x=0$ ماکزیممی برابر ۲ و به‌ازای $x=-1$ مینیممی برابر ۳− و به‌ازای $x=2$ مینیممی برابر ۳۰− دارد.

۷) x^4-4x^2+4

تابع به ازای $x=0$ ماکزیممی برابر ۴ و به ازای $x=\pm\sqrt{2}$ مینیممهایی برابر صفر دارد.

۸) $\frac{ax}{x^2+a^2}$ جواب : تابع به ازای $x=a$ ماکزیممی برابر $\frac{1}{2}$ و به‌ازای $x=-a$ مینیممی برابر $-\frac{1}{2}$ دارد.

۹) $x^3+9x^2+27x+9$

۱۰) $x^2(x-4)^2$

۱۱) $12x+9x^2-4x^3$

۱۲) $x^2-\frac{a^4}{x^2}$

۱۳) $x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

۱۴) میخواهیم یک جعبهٔ حلبی بدون در بسازیم که شکل آن مکعب مستطیل مربع‌القاعده ، مساحت‌حلبی‌آن ۱۲۰۰ فوت مربع‌وحجم‌آن ماکزیمم باشد. حجم جعبهٔ مورد نظر چقدر است ؟ جواب : ۴۰۰۰ فوت مکعب .

۱۵) میخواهیم مخزن آب بدون سقفی بسازیم که شکل آن مکعب مستطیل مربع‌القاعده وگنجایش‌آن ۱۲۵ یارد مکعب باشد. هزینهٔ ساختن بدنه از قرار یارد مربعی ۲ دلار و هزینهٔ ساختن کف‌ازقرار یارد مربعی ۴ دلاراست. ابعاد مخزن‌چه باشد تاهزینهٔ ساختن آن مینیمم‌شود ؟ جواب : مکعبی به ضلع ۵ یارد.

۱۶) باغچه‌ای‌است به‌شکل مستطیل‌و به مساحت ۸۰۰ فوت مربع. عرض راهروی اطراف آن در دو طرف ۳ فوت و در دو انتها ۶ فوت است و نیز میدانیم که مساحت باغچه و راهرو رویهم مینیمم است. ابعاد باغچه چیست ؟ جواب : فوت ۴۰ × فوت ۲۰

۱۷) میخواهیم مزرعه‌ای‌را که شکل‌آن مستطیل ، مساحت‌آن مقداری معین و یک ضلع آن مجاور رودخانه است ، محصور کنیم . طرف رودخانه احتیاج به حصار ندارد. نشان دهید که اگر طول مزرعه دو برابر عرض آن باشد ، هزینهٔ بنای حصار مینیمم است.

۱۸) میخواهیم با یک قطعه حلبی مستطیل شکل که عرض آن ۱۴ اینچ و طول

آن به اندازهٔ کافی زیاد است ، یک آبشخوار بسازیم. بدین منظور دو طرف حلبی را بسمت بالا طوری خم میکنیم که مقطع قائم آبشخوار مستطیل باشد. عمق آبشخوار را چه بگیریم تا گنجایش آن ماکزیمم شود ؟ جواب : ۳٫۵ اینچ.

۱۹) محیط پنجره‌ای ۱۵ فوت و شکل آن عبارت از مستطیلی است که بالای آن مثلث متساوی‌الاضلاعی نصب شده است. میدانیم که ازاین پنجره حداکثر نور وارد اطاق میشود. ابعاد پنجره چقدر است ؟ جواب : قسمت مستطیل پنجره به عرض ۳٫۰۱ فوت و به ارتفاع ۲٫۲۳ فوت است.

۲۰) وزن کرهٔ چوبی توپری w پاوند است . وزن سنگین‌ترین استوانهٔ دواری که پس‌از تراشیدن اطراف این کره بدست میاید چقدر است ؟ جواب : $\frac{w}{\sqrt{3}}$ پاوند .

۲۱) حجم مخروط دواری که طول مولد آن مقدار ثابت a است ، ماکزیمم است. ارتفاع آن چقدر است ؟ جواب : $\frac{a}{\sqrt{3}}$

۲۲) شکل یک قوطی حلبی جای نفت استوانه‌ای است که روی آن یک مخروط لحیم شده است . ارتفاع مخروط $\frac{2}{3}$ قطر قاعدهٔ آن است وگنجایش قوطی مقدار معینی است. نشان دهید که برای‌ساختن‌این قوطی وقتی مقدار حلبی لازم مینیمم است که ارتفاع استوانه برابر ارتفاع مخروط باشد.

۲۳) سهمی $y^2=8x$ و نقطهٔ $P(6, 0)$ مفروض است . مختصات نزدیکترین نقاط سهمی از نقطهٔ P را پیدا کنید. جواب : $(2, \pm 4)$

۲۴) درمثلث متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آن ۲۰ فوت و ارتفاع آن ۸ فوت است، متوازی‌الاضلاعی محاط است که تانژانت‌زاویهٔ حادهٔ آن $\frac{4}{3}$ و مساحت آن ماکزیمم است. نیزمیدانیم که یک ضلع این‌متوازی‌الاضلاع برقاعدهٔ مثلث قرار دارد. ابعاد آن چیست ؟

جواب : فوت ۱۰ × فوت ۵٫

۲۵) کارگر معدنی‌باید دونقطهٔ A و B را با حفر تونلی به یکدیگر وصل کند. میدانیم که نقطهٔ B در ۲۰۰ فوتی زیر نقطهٔ A و در ۶۰۰ فوتی مشرق آن واقع است . درسطح افقی ماربر A و بالای آن زمین نرم و در زیر آن زمین سخت است. هزینهٔ حفاری

هرفوت خطی* در زمین نرم ۵ دلار و در زمین سخت ۱۲ دلار است . هزینهٔ حفاری ارزان‌ترین تونل را حساب کنید. جواب : ۵۰۴۰۰ دلار

۲۶) شکل یک قوطی حلبی جای نفت استوانه‌ای است که روی آن یک مخروط لحیم شده است. اگر h ارتفاع مخروط و r شعاع قاعدهٔ آن باشد ، میتوان همواره ارتفاع مخروط را ضریبی از شعاع قاعدهٔ آن ، یعنی $h=cr$ ، دانست. نشان دهید که اگر c مقدار ثابتی باشد ، برای گنجایش معینی مانند V وقتی کمترین مقدارحلبی (M) لازم است که رابطهٔ

$$M^۲=۹\pi V^۲(۳-۲c+۳\sqrt{۱+c^۲})$$

برقرار باشد و اگر c مقدار ثابتی نباشد ، کمترین مقدار M با رابطهٔ زیر تعیین میشود :

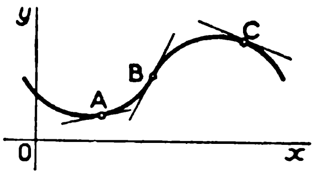
$$M^۳=۹\pi V^۲(۳+\sqrt{۵})$$

۵۷- نقاط عطف. - نقطهٔ عطف منحنی نقطه‌ای است که در آن جهت تقعر خم عوض میشود (شمارهٔ ۵۵ را بخوانید).

در شکل ۳۸ ، B نقطهٔ عطف است. اگر نقطهٔ متحرکی روی خم حرکت کند و از این نقطه بگذرد ، مشتق دوم تابع تغییرعلامت میدهد واگر پیوسته باشد ، در این نقطه صفر میشود . پس در **نقاط عطف**

$$f''(x)=۰ \qquad (۱)$$

است. حل معادلهٔ (۱) طول نقاط عطف را میدهد. برای تعیین جهت تقعر منحنی در مجاورت نقطهٔ عطف ، مقدار $f''(x)$ را نخست به ازای مقداری کمی کمتر و سپس به ازای مقداری کمی بیشتراز طول نقطهٔ عطف حساب میکنیم.



شکل ۳۸

اگر $f''(x)$ تغییر علامت دهد ، نقطه نقطهٔ عطف است و علامتهای آن جهت تقعر خم را در مجاورت نقطهٔ عطف میدهند.

یادآور میشویم که در نزدیکی نقطه‌ای که جهت تقعر خم در آن نقطه بسمت بالاست

* منظور طول تونل بدون توجه به قطر دهانهٔ آن است . کارگران ایرانی بجای کلمهٔ «خطی» کلمهٔ «کرباسی» را بکار میبرند و میگویند «متر کرباسی» . مترجم

(مثلاً در A) ، خم در بالای خط مماس و در نزدیکی نقطه‌ای که جهت تقعر خم در آن نقطه بسمت پایین‌است (مثلاً در C) ، خم‌در زیر خط مماس قرار دارد. امادر نقطهٔ عطف (مثلاً در B) ، خط مماس به خم از خم عبور میکند.

در زیر دستورالعملی‌برای‌پیدا کردن نقاط عطف خمی‌که معادله‌اش $y=f(x)$ است ، میدهیم. دراین دستور جهت تقعر خم در مجاورت نقطهٔ عطف نیز تعیین میگردد.

عمل اول - $f''(x)$ را حساب میکنیم.

عمل دوم - $f''(x)$ را مساوی صفر قرار میدهیم و ریشه‌های حقیقی معادلهٔ حاصل را پیدا میکنیم.

عمل سوم - علامت $f''(x)$ را به ازای مقادیری‌کمی‌کمتر و کمی بیشتر از هرریشهٔ حاصل از عمل سوم تعیین میکنیم. اگر $f''(x)$ تغییر علامت دهد ، نقطه نقطهٔ عطف است.

وقتی $f''(x)=+$ است ، تقعر خم بسمت بالاست $+$ *.

وقتی $f''(x)=-$ است ، تقعر خم بسمت پایین است $-$.

اغلب بهتر است قبل‌از عمل سوم $f''(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب چند عامل درآوریم.

درمطالب مذکور $f'(x)$ و $f''(x)$ توابعی پیوسته فرض شده‌اند . حل مسئلهٔ ۲ ی زیر نمونه برای مواقعی است‌که $f'(x)$ و $f''(x)$ هردو نامحدودند.

تمرین

درخمهای زیر نقاط عطف و جهت تقعر منحنی را تعیین کنید :

۱) $y=۳x^{٤}-٤x^{۳}+۱$

* میتوان این دو نتیجه را بدین ترتیب بخاطر سپردکه اگر تقعر ظرفی بسمت بالا باشد ، آن ظرف میتواند مقدار مثبتی‌آب در خود نگهدارد و اگر تقعر ظرف بسمت پایین باشد ، آبی در ظرف باقی نمیماند .

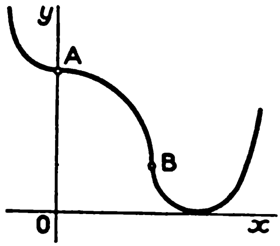
حل - $f(x)=۳x^{٤}-٤x^{۳}+۱$

عمل اول - $f''(x)=۳٦x^{۲}-۲٤x$

عمل دوم - $۳٦x^{۲}-۲٤x=۰$

ریشه‌های آن عبارتند از $x=۰$ و $x=\frac{۲}{۳}$

عمل سوم - $f''(x)=۳٦x\left(x-\frac{۲}{۳}\right)$



شکل ۳۹

وقتی $۰>x$ است ، $f''(x)=+$ است و وقتی $\frac{۲}{۳}>x>۰$ است ، $f''(x)=-$ است.

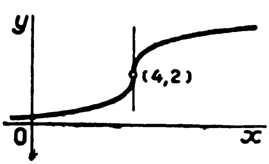
پس تقعر خم در طرف چپ $x=۰$ بسمت بالا و در طرف راست $x=۰$ بسمت پایین است (A در شکل ۳۹).

وقتی $\frac{۲}{۳}>x>۰$ است ، $f''(x)=-$ است و وقتی $x>\frac{۲}{۳}$ است ، $f''(x)=+$ است.

پس تقعر خم در طرف چپ $x=\frac{۲}{۳}$ بسمت پایین و در طرف راست $x=\frac{۲}{۳}$ بسمت بالاست (B در شکل ۳۹).

بنابراین نقاط $A(۰,۱)$ و $B\left(\frac{۲}{۳},\frac{۱۱}{۲۷}\right)$ نقاط عطف میباشند.

روشن است که تقعر خم در تمام نقاط طرف چپ A بسمت بالا ، در تمام نقاط بین $A(۰,۱)$ و $B\left(\frac{۲}{۳},\frac{۱۱}{۲۷}\right)$ بسمت پایین و در تمام نقاط طرف راست B بسمت بالاست.



شکل ٤۰

۲) $(y-۲)^{۳}=x-٤$

حل - $y=۲+(x-٤)^{\frac{۱}{۳}}$

عمل اول - $\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۳}(x-۴)^{-\frac{۲}{۳}}$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=-\frac{۲}{۹}(x-۴)^{-\frac{۵}{۳}}$$

عمل دوم - وقتی $x=۴$ است ، مشتقهای اول و دوم نامحدودند.

عمل سوم - وقتی $x<۴$ است ، $\frac{d^۲y}{dx^۲}=+$ است و وقتی $x>۴$ است ، $\frac{d^۲y}{dx^۲}=-$ است.

بنابراین مماس در نقطهٔ (۲ , ۴) به محور Ox عمود است و در طرف چپ نقطهٔ (۲ , ۴) تقعر خم بسمت بالا و در طرف راست نقطهٔ (۲ , ۴) تقعر خم بسمت پایین است. پس نقطهٔ (۲ , ۴) نقطهٔ عطف است.

۳) $y=x^۲$ جواب : تقعر خم همه‌جا بسمت بالاست.

۴) $y=۵-۲x-x^۲$ تقعر خم همه‌جا بسمت پایین است.

۵) $y=x^۳$ تقعرخم در طرف چپ نقطهٔ (۰ , ۰) بسمت پایین و در طرف راست آن بسمت بالاست.

۶) $y=x^۴$ تقعر خم همه‌جا بسمت بالاست.

۷) $y=۲x^۳-۳x^۲-۳۶x+۲۵$

جواب : تقعر خم در طرف چپ $x=\frac{۱}{۲}$ بسمت پایین و در طرف راست آن بسمت بالاست.

۸) $y=۲۴x^۲-x^۴$ ۹) $y=x+\frac{۱}{x}$

۱۰) $y=x^۲+\frac{۱}{x}$

۵۸. رسم خمها. - روش سادهٔ ترسیم خمی که معادله‌اش دردستگاه قائم داده شده است وخواننده آن روش را بخوبی میشناسد ، روش نقطه‌یابی است. معادلهٔ داده شده را نسبت به y (یا نسبت به x) حل میکنند ، به x (یا به y) مقادیر دلخواهی میدهند و مقادیر نظیر y (یا x) را حساب میکنند. جای این نقاط را در صفحهٔ مختصات تعیین مینمایند و براین

نقاط خم یکنواخت و همواری مرور میدهند. این خم بطور تقریب خم مطلوب است . اما این کار بسیار پرزحمت‌است و اگر معادلهٔ‌خم از درجه‌ای بالاتر از ۲ باشد ، حل آن نسبت به y یا x اغلب غیر ممکن است. معمولاً شکل کلی خمها مورد نظر است و این شکلها را میتوان با استفاده از روشهای آنالیز با محاسبهٔ بسیار کمی تعیین کرد.

مشتق اول شیب خم و مشتق دوم نقاط عطف را میدهند . نقاط عطف فواصلی را تعیین میکنند که درآنها تقعر خم بسمت بالا و یا بسمت پایین است. از طرف دیگر نقاط ماکزیمم بالاترین نقاط خم ونقاط مینیمم پایین‌ترین نقاط خم میباشند. باتوجه به‌این نکات میتوان دستورالعمل زیر را بکاربست.

دستور برای رسم خمها در دستگاه مختصات قائم.

عمل اول - مشتق اول‌را پیدا میکنیم‌وآن‌را مساوی صفر قرار میدهیم. ریشه‌های این معادله طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم اند.

عمل دوم - مشتق دوم‌را پیدا میکنیم‌وآن‌را مساوی صفر قرار میدهیم. ریشه‌های‌این معادله طولهای نقاط عطف اند.

عمل سوم - جوابهای دو عمل اول و دوم را در معادلهٔ خم میگذاریم و عرض نقاط اکسترمم و عطف را حساب میکنیم. سپس به تعداد کافی از نقاط واقع برخم پیدا مینماییم تا نظر مشخص و روشنی از شکل خم کسب کنیم. سرانجام جدولی نظیر جدول مسئلهٔ حل شدهٔ زیر تشکیل میدهیم.

عمل چهارم - جای نقاط حاصل را در صفحهٔ مختصات تعیین میکنیم و خم مطلوب را بنابر نتایج جدول رسم مینماییم.

در جدول ، مقادیر x رابه‌ترتیب صعودی مینویسیم. اگرعرض نقاطی از خم که در جدول ذکر شده‌اند ، زیاد باشد ، بهتر است واحد را روی محور y ها کوچکتر اختیارکنیم تا شکل کلی خم روی کاغذمان دیده شود. نیز بهتر است ، به منظور دقت بیشتر ، کاغذ میلیمتری بکار بریم.

تمرین

با بکار بستن دستور مذکور در بالا خمهای زیر را رسم کنید و معادلهٔ مماس و قائم به خمها را در نقاط عطف بنویسید :

۱) $$y=x^{3}-9x^{2}+24x-7$$

حل ـ دستور بالا را بکار میبندیم.

عمل اول ـ $y'=3x^{2}-18x+24$

$$3x^{2}-18x+24=0$$

ریشه‌ها $x=4$ و $x=2$

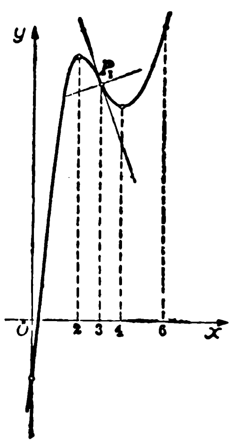
عمل دوم ـ $y''=6x-18$

$$6x-18=0$$

ریشه $x=3$

عمل سوم ـ

جهت تقعر	توضیح	y"	y'	y	x
تقعر بسمت پایین		−	+	−۷	۰
	ماکزیمم	−	۰	۱۳	۲
	نقطهٔ عطف	۰	−	۱۱	۳
تقعر بسمت بالا	مینیمم	+	۰	۹	٤
		+	+	۲۹	٦



شکل ٤۱

عمل چهارم ـ جای نقاط را درصفحهٔ مختصات معین میکنیم وخم را رسم مینماییم، شکل ٤۱ بدست میاید.

برای تشکیل معادلهٔ مماس و قائم به خم درنقطهٔ عطف $P_1(۳ , ۱۱)$ ، ازدستورهای (۱) و (۲) ی شمارهٔ ۴۳ استفاده میکنیم . معادلهٔ مماس $۳x+y=۲۰$ ومعادلهٔ قائم $۳y-x=۳۰$ است.

۲) $۳y=x^۳-۳x^۲-۹x+۱۱$

جواب : ماکزیمم $(-۱ , \frac{۱۶}{۳})$ ، مینیمم $(۳, -\frac{۱۶}{۳})$ ، نقطهٔ عطف $(۱ , ۰)$ ،

معادلهٔ مماس $۴x+y-۴=۰$ ، معادلهٔ قائم $x-۴y-۱=۰$

۳) $۶y=۱۲-۲۴x-۱۵x^۲-۲x^۳$

جواب : ماکزیمم $(-۱ , \frac{۲۳}{۶})$ ، مینیمم $(-۴ , -\frac{۲}{۳})$ ،

نقطهٔ عطف $(-\frac{۵}{۲} , \frac{۱۹}{۱۲})$

۴) $y=x^۴-۸x^۲$ جواب : ماکزیمم $(۰ , ۰)$ ، مینیممها $(\pm ۲ , -۱۶)$ ،

نقاط عطف $(\pm\frac{۲}{۳}\sqrt{۳} , -\frac{۸۰}{۹})$

۵) $y=۵x-x^۵$ جواب : ماکزیمم $(۱ , ۴)$ ، مینیمم $(-۱ , -۴)$ ،
نقطهٔ عطف $(۰ , ۰)$

۶) $y=\frac{۶x}{x^۲+۳}$

جواب : ماکزیمم $(\sqrt{۳} , \sqrt{۳})$ ، مینیمم $(-\sqrt{۳} , -\sqrt{۳})$ ،

نقاط عطف $(-۳ , -\frac{۳}{۲})$ و $(۰ , ۰)$ و $(۳ , \frac{۳}{۲})$

۷) $y=x^۳+۶x^۲$ ۸) $y=۴+۳x-x^۳$

۹) $۳y=۴x^۳-۱۸x^۲+۱۵x$ ۱۰) $y=(x-a)^۳+b$

۱۱) $۱۲y=(x-۱)^۴-۲۴(x-۱)^۲$

۱۲) $y=x^2(9-x^2)$ ۱۳) $y=2x^5-5x^2$

۱۴) $y=3x^5-5x^3$ ۱۵) $y=x^5-5x^4$

۱۶) $y=x(x^2-4)^2$ ۱۷) $ay=x^2+\dfrac{a^4}{x^2}$

۱۸) $ay=x^2+\dfrac{2a^3}{x}$ ۱۹) $a^2y=x^3+\dfrac{a^4}{x}$

۲۰) $a^2y=x^3+\dfrac{a^5}{x^2}$ ۲۱) $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$

۲۲) $y=\dfrac{x}{(x+a)^2}$ ۲۳) $x^2y=(x^2+1)^2$

۲۴) $x^3y+16y-x^3=0$

۵۹- شتاب در حرکت مستقیم‌الخط . - در شمارهٔ ۵۱ ، سرعت را ، در حرکت مستقیم‌الخط ، به عنوان نرخ تغییر فاصله نسبت به زمان تعریف کردیم. اکنون **شتاب را به عنوان نرخ تغییر سرعت نسبت به زمان** تعریف میکنیم. بدین‌ترتیب :

$$\text{شتاب}=a=\frac{dv}{dt} \qquad \text{(A)}$$

چون بنابررابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۵۱ ، $v=\dfrac{ds}{dt}$ است ، پس

$$a=\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{(B)}$$

با توجه به شماره‌های ۴۵ و ۴۷ و ۵۶ میتوان‌احکام زیر را برای لحظهٔ معین $t=t_0$ نوشت :

اگر $a>0$ باشد ، مقدار جبری v صعود میکند.

اگر $a<0$ باشد ، مقدار جبری v نزول میکند.

اگر $a>0$ و $v=0$ باشد ، s مینیمم است.

اگر $a<0$ و $v=0$ باشد ، s ماکزیمم‌است.

اگر $a=0$ باشد و از + به − (یا از − به +) تغییر علامت دهد، وقتی t از t_0 عبور میکند، v به ازای $t=t_0$ ماکزیمم (یا مینیمم) است.

در حرکت مستقیم با تغییریکنواخت a مقدار ثابتی است. مثلاً در سقوط جسمی که تنها جاذبهٔ زمین برآن اثر میکند، $a=981\ cm/s^2$ است و بنابر شمارهٔ ۰۱

$$s=490{,}5t^2 \quad , \quad v=\frac{ds}{dt}=981t \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}=981$$

تمرین

۱) تجربه نشان داده است که سقوط آزاد جسم در خلاء و در نزدیکی سطح زمین بطور تقریب از قانون $s=490{,}5t^2$ که در آن s راه (ارتفاع) پیموده شده به سانتیمتر و t مدت برحسب ثانیه است، تبعیت میکند. سرعت و شتاب را (الف) در یک لحظهٔ غیر مشخص، (ب) در پایان اولین ثانیهٔ سقوط، (پ) در پایان پنجمین ثانیهٔ سقوط پیدا کنید.

حل - $s=490{,}5t^2$ (۱)

الف - ازاین رابطه مشتق میگیریم : $\frac{ds}{dt}=981t$

یا بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۰۱ $v=981t\ cm/s$ (۲)

از معادلهٔ اخیر مشتق میگیریم : $\frac{dv}{dt}=981$

یا بنابر رابطهٔ (A) ی بالا $a=981\ cm/s^2$ (۳)

بدین ترتیب شتاب جسم در سقوط آزاد مقدار ثابتی است. به عبارت دیگر به سرعت جسم در هرثانیهٔ سقوط ۹۸۱ سانتیمتر در ثانیه افزوده میشود.

ب - برای پیدا کردن سرعت و شتاب درپایان اولین ثانیهٔ سقوط در رابطهٔ (۲) و (۳) بجای t، ۱ میگذاریم :

$$v=981\ cm/s \quad و \quad a=981\ cm/s^2$$

پ ـ برای پیدا کردن سرعت و شتاب در پایان پنجمین ثانیهٔ سقوط در رابطهٔ (۲) و (۳) بجای t ، ۵ میگذاریم :

$$v=۴۹۰۵ \text{ cm/s} \quad \text{و} \quad a=۹۸۱ \text{ cm/s}^۲$$

حرکات مستقیمی راکه معادلات آنها در زیر داده شده است درنظر بگیرید و مکان و سرعت و شتاب متحرك را در زمانهای داده شده تعیین کنید :

۲) $s=۴t^۲-۶t$ ، در لحظهٔ $t=۲$

جواب : $s=۴$ ، $v=۱۰$ ، $a=۸$

۳) $s=۱۲۰t-۱۶t^۲$ ، در لحظهٔ $t=۴$

جواب : $s=۲۲۴$ ، $v=-۸$ ، $a=-۳۲$

۴) $x=۳۲t-۸t^۲$ ، در لحظهٔ $t=۲$

جواب : $x=۳۲$ ، $v=۰$ ، $a=-۱۶$

۵) $y=۶t^۲-۲t^۳$ ، در لحظهٔ $t=۱$

جواب : $y=۴$ ، $v=۶$ ، $a=۰$

۶) $s=\frac{t}{t+۱}$ ، در لحظهٔ $t=۲$

جواب : $s=\frac{۲}{۳}$ ، $v=\frac{۱}{۹}$ ، $a=-\frac{۲}{۲۷}$

۷) $x=۱۶t^۲-۲۰t+۴$ ، در لحظهٔ $t=۲$

۸) $y=۱۰۰-۴t-۸t^۲$ ، در لحظهٔ $t=۳$

۹) $s=\sqrt{۵t}+\frac{۱۰}{\sqrt{۵t}}$ ، درلحظهٔ $t=۵$

۱۰) $s=\sqrt[۳]{۳t+۲}$ ، در لحظهٔ $t=۲$

حرکات مستقیمی با معادلات زیر مشخص شده‌اند . محل و شتاب نقطهٔ متحرك را در لحظه‌ای که سرعت در آن صفر است ، تعیین کنید.

۱۱) $s=۱٦t^{۲}-٦٤t+٦٤$ جواب : $s=۰$ ، $a=۳۲$

۱۲) $s=۸۰t-۱٦t^{۲}$

۱۳) $s=۳c^{۲}t-t^{۳}$

۱٤) $s=t+\frac{۳۲}{(t+۱)^{۲}}$

۱۵) قانون حرکت گلوله‌ای که عمودی بسمت بالا پرتاب شده است ، $s=۸۰t-۱٦t^{۲}$ است. (الف) مکان و سرعت گلوله را در پایان دومین وسومین ثانیهٔ پرتاب تعیین کنید. (ب) گلوله به چه ارتفاعی خواهد رسید؟ (پ) گلوله در مدت چهارمین ثانیه چه فاصله‌ای را میپیماید؟

۱٦) معادلهٔ حرکت مستقیمی $s=\sqrt{t+۱}$ است. نشان دهید که دراین حرکت شتاب منفی و متناسب با مکعب سرعت است.

۱۷) جسمی با سرعت $v_{۱}$ سانتیمتر در ثانیه عمودی بسمت بالا پرتاب شده است. ارتفاعی (s سانتیمتر) که جسم پس‌از t ثانیه به آن میرسد ، با دستور $s=v_{۱}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ تعیین میشود . دستوری را بنویسید که بیشترین ارتفاع جسم را میدهد.

۱۸) درمسئلهٔ قبل ، $v_{۱}$ را برابر ۱٦۰ و g را برابر ۹۸۱ بگیرید و (الف) سرعت جسم را در پایان چهارمین ثانیه و (ب) مسافت پیموده شده را در مدت چهارمین و ششمین ثانیه حساب کنید.

۱۹) سرعت نقطه‌ای که در امتداد خط مستقیمی حرکت میکند ، با رابطهٔ $v^{۲}=a+\frac{۲b}{s}$ که در آن a و b مقادیر ثابتی میباشند ، داده شده است. نشان‌دهید که شتاب نقطه $-\frac{b}{s^{۲}}$ است.

۲۰) اتومبیلی که قانون‌حرکتش $s=۲٥۰t^{۲}-\frac{٥}{٤}t^{٤}$ است ، مدت ده دقیقه طی‌طریق میکند. t زمان‌برحسب‌دقیقه و s مسافت برحسب‌فوت‌است. (الف) مطلوبست مسافتی که اتومبیل دراین ده دقیقه میپیماید. (ب) بیشترین سرعت‌اتومبیل چقدراست؟

(پ) اتوموبیل تا لحظه‌ای که سرعتش ماکزیمم میشود ، چه مسافتی را پیموده است؟

جواب : الف - ۱۲۵۰۰ فوت ، ب - ۱۹۲٤ فوت در دقیقه ، پ - ٦۹٤٤ فوت.

تمرین اضافی

۱) خم نمایش $(x^۲-۲x-٤)y=۲x-x^۲$ را رسم کنید ومعادلات مماس وقائم به خم را در نقاط عطف بنویسید.

جواب : ماکزیمم $(۱\,,\,\frac{۱}{۳})$. نقطهٔ عطف $(۰\,,\,۰)$: معادلهٔ مماس $x-۲y=۰$ ، معادلهٔ قائم $۲x+y=۰$. نقطهٔ عطف $(۲\,,\,۰)$: معادلهٔ مماس $x+۲y-۲=۰$ ، معادلهٔ قائم $۲x-y-٤=۰$

۲) خم (t) چنانست که روی هرمماس به آن طول پاره خط واقع بین نقطهٔ تماس، $P(x\,,\,y)$ ، و محل تقاطع مماس با محور x ها ، A ، مقدارثابتی است(یعنی $AP=c$) .

نشان دهید که (الف) $\frac{dy}{dx}=\frac{\pm y}{\sqrt{c^۲-y^۲}}$ و (ب) $\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{c^۲y}{(c^۲-y^۲)^۲}$

[این خم تراکتریس نام دارد.]

۳) خم $y=k(x^۲-۳)^۲$ مفروض‌است. مقدار ثابت k را طوری تعیین کنید که قائمهای به خم در نقاط عطف از مبدأ مختصات بگذرند. جواب : $k=\frac{۱}{٤\sqrt{۲}}$

فصل هفتم

مشتق توابع غیر جبری

۶۰- چند دستور دیگر برای محاسبهٔ مشتق. - توابعی مانند

$$sin\ ۲x \quad , \quad ۳^{x} \quad , \quad log(۱+x^{۲})$$

را **غیر جبری** مینامند. این توابع با توابعی که تاکنون مطالعه کرده‌ایم و توابع جبری نام دارند، تفاوت بسیاردارند. ما دراین فصل به محاسبهٔ مشتق آنها میپردازیم و درستی دستورهای زیر را که برای آسانی مراجعه دراینجا پشت‌سرهم ذکر کرده‌ایم، **نشان** میدهیم. این دستورها با دستورهای شمارهٔ ۲۹ مجموعهٔ تمام دستورهایی است که دراین کتاب برای محاسبهٔ مشتق بکار رفته‌اند.

X $$\frac{d}{dx}(ln\,v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=\frac{۱}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad (ln\,v=log_{e}v)$$

Xa $$\frac{d}{dx}(log\,v)=\frac{log\,e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

XI $$\frac{d}{dx}(a^{v})=a^{v}\,ln\,a\,\frac{dv}{dx}$$

XIa $$\frac{d}{dx}(e^{v})=e^{v}\,\frac{dv}{dx}$$

XII $$\frac{d}{dx}(u^{v})=vu^{v-۱}\,\frac{du}{dx}+ln\,u\,.\,u^{v}\frac{dv}{dx}$$

XIII $$\frac{d}{dx}(sin\ v)=cos\ v\,\frac{dv}{dx}$$

XIV $$\frac{d}{dx}(cos\ v)=-sin\ v\,\frac{dv}{dx}$$

XV $$\frac{d}{dx}(tg\,v)=sec^{۲}v\,\frac{dv}{dx}$$

XVI $$\frac{d}{dx}(cotg\,v)=-cosec^{۲}v\,\frac{dv}{dx}$$

XVII $$\frac{d}{dx}(sec\,v)=sec\,v\ tg\,v\,\frac{dv}{dx}$$

XVIII $$\frac{d}{dx}(cosec\,v)=-cosec\,v\ cotg\,v\,\frac{dv}{dx}$$

XIX $$\frac{d}{dx}(vers\,v)=sin\,v\,\frac{dv}{dx}$$

XX $$\frac{d}{dx}(arc\,sin\,v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۱-v^{۲}}}$$

XXI $$\frac{d}{dx}(arc\,cos\,v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۱-v^{۲}}}$$

XXII $$\frac{d}{dx}(arc\,tg\,v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{۱+v^{۲}}$$

XXIII $$\frac{d}{dx}(arc\,cotg\,v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{۱+v^{۲}}$$

XXIV $$\frac{d}{dx}(arc\,sec\,v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^{۲}-۱}}$$

XXV $$\frac{d}{dx}(\mathit{arc\ cosec}\ v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^{۲}-۱}}$$

XXVI $$\frac{d}{dx}(\mathit{arc\ vers}\ v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۲v-v^{۲}}}$$

۶۱- عدد e ، لگاریتم طبیعی. - در آنالیز ریاضی ، حد

$$\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = ۲٫۷۱۸۲۸\ ... \qquad (۱)$$

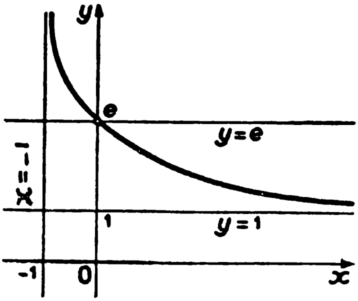
یکی‌از مهمترین‌حدود است. این‌حد را با حرف e نشان میدهند. اثبات دقیق‌وجود این‌حد از سطح این کتاب بالاتر است. ما دراینجا به رسم خم نمایش معادلهٔ

$$y=(۱+x)^{\frac{۱}{x}}$$

اکتفا میکنیم‌و از روی شکل نشان میدهیم که وقتی $x \to ۰$ ، تابع $y=(۱+x)^{\frac{۱}{x}}$ مقادیری خیلی‌نزدیک به ... ۲٫۷۱۸ میگیرد و از آنجا بطور تقریب ... $e = ۲٫۷۱۸$ است.

وقتی x از طرف چپ بسمت صفر میل میکند ، y نزول میکند و بسمت حدش e میل مینماید. وقتی x ازطرف راست بسمت صفر میل میکند ، y صعود میکند و بازهم بسمت e میل مینماید.

x	y	x	y
10	1,271 0		
5	1,431 0		
2	1,732 0		
1	2,000 0		
0,5	2,250 0	— 0,5	4,000 0
0,1	2,593 7	— 0,1	2,868 0
0,01	2,704 8	— 0,01	2,732 0
0,001	2,716 9	— 0,001	2,719 5



شکل ۴۲

وقتی $\infty+ \leftarrow x$ ، y بسمت ۱ میل میکند و وقتی x از طرف راست بسمت ۱ — میل میکند ، y بی‌پایان صعود مینماید. خطوط $y=+1$ و $x=-1$ مجانبهای خم میباشند.

درفصل بیستم نشان خواهیم داد که چگونه میتوان مقدار e را تا هر رقم دلخواه اعشار حساب کرد.

لگاریتم طبیعی یا نپری لگاریتمی است که پایهٔ آن عدد e است و در ریاضیات نقش بسیار مهمی دارد. برای نشان دادن لگاریتم طبیعی عدد v نشانهٔ $\ln v$ و برای نشان دادن لگاریتم عادی عدد v نشانهٔ $\log v$ را بکار میبرند.

لگاریتم طبیعی (پایه e) : $\ln v$

لگاریتم عادی (پایه ۱۰) : $\log v$

بنابر تعریف ، لگاریتم طبیعی عدد N نمای e در معادلهٔ زیر است :

$$e^x = N \tag{۳}$$

یعنی

$$x = \ln N$$

اگر $x=0$ باشد ، $N=1$ و $\ln 1 = 0$ است. اگر $x=1$ باشد ، $N=e$ و $\ln e = 1$ است.

اگر x بسمت $-\infty$ میل کند ، N بسمت‌صفر میل میکند ومینویسیم $\ln 0 = -\infty$.

خواننده جدولهای لگاریتم عادی‌را که پایهٔ‌آن ۱۰ است،بخوبی میشناسد. **لگاریتم عادی یا اعشاری** عدد N نمای ۱۰ درمعادلهٔ

$$10^y = N \quad \Longrightarrow \quad y = \log N \tag{٤}$$

است. اکنون رابطهٔ بین $\ln N$ و $\log N$ را پیدا میکنیم.

از دو طرف رابطهٔ (۳) برطبق روابط (۲) ی صفحهٔ ۳ لگاریتم عادی میگیریم :

$$x \log e = \log N \tag{٥}$$

این معادله را برحسب x که بنابررابطهٔ (۳) لگاریتم طبیعی N است ، حل میکنیم :

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e} \tag{A}$$

بنابراین **لگاریتم طبیعی هرعدد باتقسیم کردن لگاریتم عادی آن بر** $\log e$ **بدست میاید.**

رابطهٔ (A) را میتوان به صورت

$$\log N = \log e \times \ln N \tag{٦}$$

نوشت. پس **لگاریتم عادی هر عدد باضرب کردن لگاریتم طبیعی آن در** $\log e$ **بدست میاید.** $\log e$ را مدول* لگاریتم عادی مینامند و با حرف M نشان میدهند.

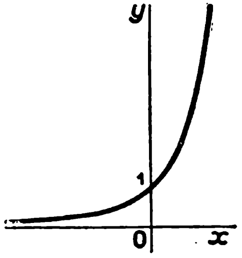
چون ... $\log e = ۰٫٤۳٤۳$ و ... $\frac{۱}{\log e} = ۲٫۳۰۳$ است ، رابطهٔ (A) به‌صورت زیر در میاید :

$$\ln N = ۲٫۳۰۳ \log N \tag{۷}$$

بدین‌ترتیب برای تنظیم جدولهای لگاریتم عادی ناگزیر باید جدول لگاریتم طبیعی اعداد را در دست داشته باشیم.

۶۲- توابع نمایی و توابع لگاریتمی. - تابعی از x را که به‌صورت

$$y = e^x \qquad (e = ۲٫۷۱۸\ldots) \tag{۱}$$



شکل ۴۳

باشد ، یک **تابع نمایی** مینامند. خم نمایش آن درشکل ۴۳ داده شده است. این تابع به‌ازای جمیع مقادیر x صعودی است و بعداً خواهیم دید که به ازای جمیع مقادیر x پیوسته نیز هست.

بنابر تعریف ، از رابطهٔ (۱) رابطهٔ

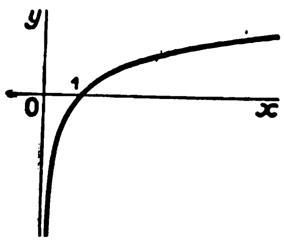
$$x = \ln y \tag{۲}$$

بدست میاید. توابع e^x و $\ln y$ توابع معکوس یکدیگرند (شمارهٔ ۳۹). اگر در رابطهٔ (۲) جای x و y را عوض کنیم ، رابطهٔ

$$y = \ln x \tag{۳}$$

* Modulus

بدست میاید. دراین رابطه y **تابعی لگاریتمی** از x است. خم نمایش آن در شکل ٤٤ داده شده است. تابع برای مقادیر منفی x و نیز برای $x=۰$ تعریف‌نشده است. این تابع به‌ازای جمیع مقادیرمثبت x صعودی‌وپیوسته است. پس بنابر شمارهٔ ۱۷ برای هرمقدار مثبت x مانند a



شکل ٤٤

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a \qquad (٤)$$

است. چنانکه دیده‌ایم ، وقتی x بسمت صفر میل کند ، y بسمت $\infty-$ میل میکند ، و بدین‌ترتیب محور y ها مجانب‌خم‌است.

توابع a^x و $\log_a x$ $(a>۰)$ نیز همان مشخصات e^x و $\ln x$ را دارند و خمهای نمایش آنها مانند دو خم بالاست.

۶۳- مشتق $\ln v$. - اگر

$$y = \ln v \qquad (v > ۰)$$

باشد ، v را متغیر مستقل فرض میکنیم‌و با بکار بستن دستورکلی (شمارهٔ ۲۷) مشتق $\ln v$ را حساب مینماییم :

عمل اول - $$y+\Delta y = \ln(v+\Delta v)$$

عمل دوم - $$\Delta y = \ln(v+\Delta v) - \ln v$$

و بنابر روابط (۲) ی صفحهٔ ۳

$$= \ln\left(\frac{v+\Delta v}{v}\right) = \ln\left(۱+\frac{\Delta v}{v}\right)$$

عمل سوم - $$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{۱}{\Delta v}\ln\left(۱+\frac{\Delta v}{v}\right)$$

چون حد Δv که مخرج طرف‌راست معادلهٔ اخیر است صفر است ، بنابر شمارهٔ ۱۶ ، نمیتوان حد طرف راست‌را حساب کرد. آن را در $\frac{v}{v}$ ضرب میکنیم ، داریم :

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{۱}{v} \cdot \frac{v}{\Delta v}\ln\left(۱+\frac{\Delta v}{v}\right).$$

و بنابر روابط (۲) ی صفحهٔ ۳

$$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{۱}{v}\, ln\left(۱+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}$$

اگردراین معادله $\frac{\Delta v}{v}$ را x فرض کنیم ، جمله‌ای که پس‌از *ln* قرار دارد ، به‌همان صورت طرف راست رابطهٔ (۲) ی شمارهٔ ٦۱ درمیاید.

عمل چهارم -

$$\frac{dy}{dv}=\frac{۱}{v}\, ln\, e=\frac{۱}{v}$$

زیرا وقتی Δx بسمت صفر میل میکند ، $\frac{\Delta v}{v}$ نیز بسمت صفر میل‌مینماید و لذا بنابر رابطهٔ (۱) شمارهٔ ٦۱ ، $\lim\limits_{\Delta v\to ۰}\left(۱+\frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}=e$ است ، و با استفاده از رابطهٔ (٤) شمارهٔ ٦۲ نتیجهٔ اخیر بدست میاید.

چون v تابعی از x است ، بایدبرای‌پیداکردن مشتق y نسبت به x ، دستور (A)ی شمارهٔ ۳۸ ، یعنی

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

راکه مشتق تابع تابع را میدهدبکاربست . اگر بجای $\frac{dy}{dv}$ مقداری را قرار دهیم‌که در عمل چهارم برای آن بدست آورده‌ایم ، داریم :

$$\frac{d}{dx}(ln\, v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}=\frac{۱}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \text{X}$$

پس مشتق لگاریتم طبیعی یك تابع برابر است با حاصل‌ضرب معکوس آن تابع در مشتق آن.

چون $log\, v=log\, e\; ln\, v$ است ، بنابر رابطهٔ IV شمارهٔ ۲۹ داریم :

$$\frac{d}{dx}(\log\ v)=\frac{\log e}{v}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \text{Xa}$$

٦٤- مشتق تابع نمایی. - اگر

$$y=a^v \qquad (a>\cdot)$$

باشد و از دو طرف آن برپایهٔ e لگاریتم بگیریم ، تساوی

$$\ln y=v\ln a$$

یا

$$v=\frac{\ln y}{\ln a}=\frac{۱}{\ln a}\cdot\ln y$$

بدست میاید. از دو طرف این رابطه برطبق دستور X نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy}=\frac{۱}{\ln a}\cdot\frac{۱}{y}$$

اکنون از رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹ (که دربارهٔ توابع معکوس است) استفاده میکنیم ، رابطهٔ

$$\frac{dy}{dv}=\ln a\cdot y$$

یا

$$\frac{dy}{dv}=\ln a\cdot a^v \qquad (۱)$$

حاصل‌میشود. چون v خود تابعی‌از x است ، باید مشتق a^v را نسبت‌به x بدست‌بیاوریم. دستور (A) ی شمارهٔ ۳۸ را بکار میبندیم ، داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\ln a\cdot a^v\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^v)=\ln a\cdot a^v\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \text{XI}$$

وقتی $a=e$ است ، $\ln a=\ln e=۱$ است و دستور اخیر به صورت زیر درمیاید :

$$\text{XIa} \qquad \frac{d}{dx}(e^v) = e^v \cdot \frac{dv}{dx}$$

پس مشتق a^v ، یعنی مشتق مقدار ثابت و مثبت a که به قوهٔ متغیر v رسیده است ، برابر حاصلضرب این سه عامل است : لگاریتم طبیعی مقدار ثابت a یعنی $ln\, a$ ، خود تابع یعنی a^v ، مشتق نما یعنی $\frac{dv}{dx}$.

۶۵- مشتق تابع نمایی در حالت کلی. - اگر

$$y = u^v \qquad (u > ۰)$$

باشد و از دو طرف آن برپایهٔ e لگاریتم بگیریم ، داریم :

$$ln\, y = v\, ln\, u$$

یا بنابر رابطهٔ (۳) ی شمارهٔ ۶۱

$$y = e^{v\, ln\, u}$$

ازاین معادله برطبق دستور XIa مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx} = e^{v\, ln\, u} \frac{d}{dx}(v\, ln\, u)$$

و بنابر V و X

$$= e^{v\, ln\, u}\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + ln\, u \frac{dv}{dx}\right)$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + ln\, u \frac{dv}{dx}\right)$$

بنابراین

$$\text{XII} \qquad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-۱}\frac{du}{dx} + ln\, u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$$

پس برای محاسبهٔ مشتق u^v ، یعنی برای محاسبهٔ مشتق تابع u که به قوهٔ متغیر v رسیده است ، نخست v را ثابت فرض میکنیم و برطبق دستور VI مشتق u^v را حساب مینماییم ، سپس u را ثابت فرض میکینم و برطبق دستور XI مشتق u^v را حساب مینماییم و سرانجام این دو مشتق را به یکدیگر میفزاییم.

اگر v مقدار ثابتی مانند n باشد ، دستور XII به صورت سادهٔ زیر درمیاید :

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n\, u^{n-۱}\frac{du}{dx}$$

بنابراین دستور VI ، یعنی دستور مشتق قوه‌ای از تابع ، به ازای هرمقدار n ، چه گویا و چه گنگ ، صحیح است.

مثال ۱- مشتق تابع $y=ln(x^۲+a)$ را حساب کنید.

حل - اگر $x^۲+a$ را v فرض کنیم ، بنابر دستور X

جواب : $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(x^۲+a)}{x^۲+a}=\frac{۲x}{x^۲+a}$$

مثال ۲- مشتق تابع $y=log\frac{۲x}{۱+x^۲}$ را حساب کنید.

حل - بنابر روابطه (۲) ی صفحهٔ ۳ میتوان نوشت :

$$y=log\,۲x-log(۱+x^۲)$$

و بنابر دستورهای III و Xa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{log\,e}{۲x}\cdot\frac{d}{dx}۲x-\frac{log\,e}{۱+x^۲}\cdot\frac{d}{dx}(۱+x^۲)$$

جواب : $$=log\,e\cdot(\frac{۱}{x}-\frac{۲x}{۱+x^۲})=log\,e\cdot\frac{۱-x^۲}{x(۱+x^۲)}$$

مثال ۳- مشتق تابع $y=a^{۳x^۲}$ را حساب کنید.

حل- بنابر دستور XI

جواب : $$\frac{dy}{dx}=ln\,a\cdot a^{۳x^۲}\frac{d}{dx}(۳x^۲)=٦x\,ln\,a\cdot a^{۳x^۲}$$

مثال ۴- مشتق تابع $y=be^{c^۲+x^۲}$ را حساب کنید.

حل- بنابر دستور IV

$$\frac{dy}{dx}=b\frac{d}{dx}(e^{c^۲+x^۲})$$

و بنابر دستور XIa

$$=be^{c^۲+x^۲}\frac{d}{dx}(c^۲+x^۲)$$

جواب : $$=۲bxe^{c^۲+x^۲}$$

مثال ۵- مشتق تابع $y=x^{e^x}$ را حساب کنید .

حل - بنابر دستور XII

$$\frac{dy}{dx}=e^x \cdot x^{e^x-1} \cdot \frac{d}{dx}(x)+x^{e^x} \cdot \ln x \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$=e^x \cdot x^{e^x-1}+x^{e^x} \cdot \ln x \cdot e^x$$

جواب :

$$=e^x \cdot x^{e^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$$

٦٦- مشتق لگاریتمی . - هنگام محاسبهٔ مشتق توابع لگاریتمی بجای آنکه از اول دستورهای X و Xa را بکار بندیم ، اغلب میتوانیم با استفاده از رابطه‌های (۲) ی صفحهٔ ۳ محاسبه را ساده‌تر کنیم . این کار درتمام حالاتی که استفاده ازاین رابطه‌ها ممکن باشد ، توصیه میگردد .

مثال ۱- مشتق تابع $y=\ln\sqrt{1-x^2}$ را حساب کنید .

حل - با استفاده از روابط (۲) ی صفحهٔ ۳ میتوان این تابع را به صورت زیر که در آن رادیکالی دیده نمیشود ، نوشت :

$$y=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

پس بنابر دستور X

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}$$

جواب :

$$=\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2}=\frac{x}{x^2-1}$$

مثال ۲- مشتق تابع $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ را حساب کنید.

حل - با استفاده از روابط (۲) ی صفحهٔ ۳ میتوان نوشت :

$$y=\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)]$$

و بنابر دستورهای III و X

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{\frac{d}{dx}(۱+x^۲)}{۱+x^۲}-\frac{\frac{d}{dx}(۱-x^۲)}{۱-x^۲}\right]$$

جواب :

$$=\frac{x}{۱+x^۲}+\frac{x}{۱-x^۲}=\frac{۲x}{۱-x^٤}$$

برای محاسبهٔ مشتق توابع نمایی ، بخصوص در حالاتی که هم پایه و هم نما متغیر است ، بهترین روش آن است که نخست از تابع داده شده برپایهٔ e لگاریتم بگیریم و سپس به محاسبهٔ مشتق آن بپردازیم . بدین ترتیب حل مثال ٥ شمارهٔ ٦٥ به صورت ظریفتر زیر در میاید .

مثال ۳- مشتق تابع $y=x^{e^x}$ را حساب کنید .

حل - از دوطرف این رابطه برپایهٔ e لگاریتم میگیریم :

بنابر روابط (۲) ی صفحهٔ ۳

$$\ln y=e^x\ln x$$

از دو طرف رابطهٔ اخیر نسبت به x مشتق میگیریم :

بنابر دستورهای X و V

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=e^x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\cdot\frac{d}{dx}(e^x)$$

بنابر دستورهای X و XIa

$$=e^x\cdot\frac{۱}{x}+\ln x\cdot e^x$$

یا

$$\frac{dy}{dx}=e^x\cdot y\left(\frac{۱}{x}+\ln x\right)$$

جواب :

$$=e^x\cdot x^{e^x}\left(\frac{۱}{x}+\ln x\right)$$

مثال ٤- مشتق تابع $y=(٤x^۲-۷)^{۲+\sqrt{x^۲-٥}}$ را حساب کنید .

حل - از دو طرف این رابطه برپایهٔ e لگاریتم میگیریم :

$$\ln y=(۲+\sqrt{x^۲-٥})\ln(٤x^۲-۷)$$

از دو طرف رابطهٔ اخیر نسبت به x مشتق میگیریم :

$$\frac{۱}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=(۲+\sqrt{x^۲-۵})\,\frac{۸x}{۴x^۲-۷}+ln(۴x^۲-۷)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^۲-۵}}$$

جواب :

$$\frac{dy}{dx}=x(۴x^۲-۷)^{۲+\sqrt{x^۲-۵}}\left[\frac{۸(۲+\sqrt{x^۲-۵})}{۴x^۲-۷}+\frac{ln(۴x^۲-۷)}{\sqrt{x^۲-۵}}\right]$$

نیز در حالاتی که تابع داده شده از حاصل‌ضرب چندین عامل تشکیل شده است ، گاهی بهتر است قبل‌از محاسبهٔ مشتق‌تابع لگاریتم آن را برپایهٔ e بدست آوریم و حاصل را برطبق دستورهای (۲) ی صفحهٔ ۳ ساده کنیم ، مانند :

مثال ۵- مشتق تابع $y=\sqrt{\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۳)(x-۴)}}$ را حساب کنید .

حل - از دو طرف این رابطه برپایهٔ e لگاریتم میگیریم :

$$ln\,y=\frac{۱}{۲}\,[ln(x-۱)+ln(x-۲)-ln(x-۳)-ln(x-۴)]$$

از دو طرف رابطهٔ اخیر نسبت به x مشتق میگیریم :

$$\frac{۱}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{x-۴}\right]$$

$$=-\frac{۲x^۲-۱۰x+۱۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)}$$

جواب :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x^۲-۱۰x+۱۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}(x-۳)^{\frac{۳}{۲}}(x-۴)^{\frac{۳}{۲}}}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را حساب کنید :

جواب

۱) $y=ln(ax+b)$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}$

۲) $y=ln(ax^۲+b)$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲ax}{ax^۲+b}$

۳) $y=ln(ax+b)^۲$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲a}{ax+b}$

٤) $y=ln\, ax^n$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}$

٥) $y=ln\, x^۳$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۳}{x}$

٦) $y=ln^۳x\ [=(ln\, x)^۳]$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۳ln^۲x}{x}$

۷) $y=ln(۲x^۳-۳x^۲+٤)$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{٦x(x-۱)}{۲x^۳-۳x^۲+٤}$

۸) $y=log\frac{۲}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{log\, e}{x}$

۹) $y=ln\frac{x^۲}{۱+x^۲}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲}{x(۱+x^۲)}$

۱۰) $y=ln\sqrt{۹-۲x^۲}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-۲x}{۹-۲x^۲}$

۱۱) $y=ln(ax\sqrt{a+x})$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲a+۳x}{۲x(a+x)}$

	جواب
۱۲) $f(x)=x\ \ln x$	$f'(x)=۱+\ln x$
۱۳) $f(x)=\ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})$	$f'(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$
۱۴) $s=\ln\sqrt{\dfrac{a+bt}{a-bt}}$	$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{ab}{a^{۲}-b^{۲}t^{۲}}$
۱۵) $f(x)=x^{۲}\ln x^{۲}$	$f'(x)=۲x(۱+۲\ln x)$
۱۶) $y=e^{nx}$	$\dfrac{dy}{dx}=ne^{nx}$
۱۷) $y=۱۰^{nx}$	$\dfrac{dy}{dx}=n\ ۱۰^{nx}\ \ln ۱۰$
۱۸) $y=e^{x^{۲}}$	$\dfrac{dy}{dx}=۲xe^{x^{۲}}$
۱۹) $y=\dfrac{۲}{e^{x}}$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{۲}{e^{x}}$
۲۰) $s=e^{\sqrt{t}}$	$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{e^{\sqrt{t}}}{۲\sqrt{t}}$
۲۱) $z=b^{۲y}$	$\dfrac{dz}{dy}=۲b^{۲y}\ \ln b$
۲۲) $u=se^{s}$	$\dfrac{du}{ds}=e^{s}(s+۱)$
۲۳) $v=\dfrac{e^{u}}{u}$	$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{e^{u}(u-۱)}{u^{۲}}$
۲۴) $y=\dfrac{\ln x}{x}$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۱-\ln x}{x^{۲}}$

جواب

۲۵) $y=\ln(x^{۲}e^{x})$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲}{x}+۱$

۲۶) $y=\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۲e^{x}}{(e^{x}+۱)^{۲}}$

۲۷) $y=x^{۲}e^{-x}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=e^{-x}(۲x-x^{۲})$

۲۸) $y=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}-c^{-\frac{x}{a}}\right)$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}+c^{-\frac{x}{a}}\right)$

۲۹) $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{٤}{(e^{x}+e^{-x})^{۲}}$

۳۰) $s=\frac{\ln t^{۲}}{t^{۲}}$ $\qquad \frac{ds}{dt}=\frac{۲-٤\ln t}{t^{۳}}$

۳۱) $f(x)=\ln\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}{\sqrt{x^{۲}+۱}+x}$ $\qquad f'(x)=\frac{-۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$

راهنمایی : درتمرین ۳۱ نخست مخرج را گویا کنید .

۳۲) $y=x^{x}$ $\qquad y'=x^{x}(۱+\ln x)$

۳۳) $y=x^{\sqrt{x}}$ $\qquad y'=\frac{x^{\sqrt{x}}(۲+\ln x)}{۲\sqrt{x}}$

۳٤) $s=\left(\frac{a}{t}\right)^{t}$ $\qquad \frac{ds}{dt}=\left(\frac{a}{t}\right)^{t}\left(\ln\frac{a}{t}-۱\right)$

۳۵) $y=\frac{x\sqrt[۳]{۳x+a}}{\sqrt{۲x+b}}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=y\left[\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۳x+a}-\frac{۱}{۲x+b}\right]$

جواب

۳۶) $y=\dfrac{\sqrt{۴+x^۲}}{x\sqrt{۴-x^۲}}$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx}=y\left[-\dfrac{x}{۴+x^۲}-\dfrac{۱}{x}+\dfrac{x}{۴-x^۲}\right]$

۳۷) $y=x^n(a+bx)^m$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx}=y\left[\dfrac{n}{x}+\dfrac{mb}{a+bx}\right]$

در مسائل ۳۸ تا ۴۷ مقدار مشتق را به ازای مقدار داده شدهٔ x حساب کنید :

۳۸) $y=ln(x^۲+۲)\ ;\ x=۴$ $\qquad$ $y'=\dfrac{۴}{۹}$

۳۹) $y=log(۴x-۳)\ ;\ x=۲$ $\qquad$ $y'=۰٫۳۴۷۴$

۴۰) $y=x\,ln\sqrt{x+۳}\ ;\ x=۶$ $\qquad$ $y'=۱٫۴۳۱۹$

۴۱) $y=xe^{-۲x}\ ;\ x=\dfrac{۱}{۲}$ $\qquad$ $y'=۰$

۴۲) $y=\dfrac{ln\,x^۲}{x}\ ;\ x=۴$ $\qquad$ $y'=-۰٫۰۴۸۳$

۴۳) $y=\dfrac{e^{\frac{x}{۲}}}{x+۱}\ ;\ x=۱$ $\qquad$ ۴۴) $y=log\sqrt{۲۵-۴x}\ ;\ x=۵$

۴۵) $y=۱۰^{\sqrt{x}}\ ;\ x=۴$ $\qquad$ ۴۶) $y=\left(\dfrac{۳}{x}\right)^x\ ;\ x=۳$

۴۷) $y=\dfrac{x^۲\sqrt{x^۲+۹}}{\sqrt[۳]{۲۰-۳x}}\ ;\ x=۴$

در هریک از توابع زیر $\dfrac{d^۲y}{dx^۲}$ را حساب کنید :

۴۸) $y=ln\,cx$ $\qquad$ ۴۹) $y=e^{ax}$

۵۰) $y=x\,\ln x$

۵۱) $y=e^{x^2}$

۵۲) $y=\ln\dfrac{x-a}{x+a}$

۵۳) $y=\dfrac{e^x}{x^2}$

مشتق توابع زیر را حساب کنید :

۵۴) $\ln\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

۵۵) $\dfrac{\ln\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

۵۶) $\log\sqrt{\dfrac{x^2+a^2}{x+a}}$

۵۷) $\ln\dfrac{t}{\sqrt{2t+3}}$

۵۸) $e^{\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}$

۵۹) $10^t\log t$

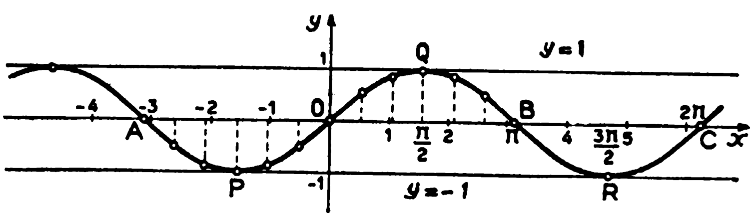
۶۰) $(ae)^{nx}$

۶۱) $2^s s^2$

۶۲) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\sqrt{x}}$

۶۷- تابع $\sin x$. ـ شکل ۴۵ خم نمایش

$$y=\sin x \qquad (1)$$



شکل ۴۵

را نشان میدهد. بنابر فرض مقادیر x اندازهٔ زاویه برحسب رادیان است (شمارهٔ ۲). مثلاً به ازای $x=1$

$$y = sin(\text{۱ رادیان}) = sin\ ۵۷^\circ\ ۱۸' = ۰{,}۸۴۱$$

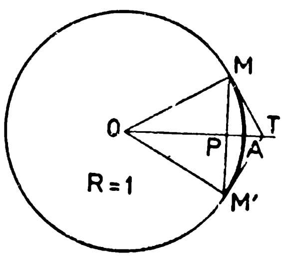
است . تابع $sin\,x$ به ازای جمیع مقادیر x معین و پیوسته است . باید توجه داشت که $sin\,x$ **تابعی متناوب** با دورهٔ تناوب ۲π است زیرا $sin\,x = sin(x+۲\pi)$ است . بدین ترتیب وقتی به مقدار x به اندازهٔ یک دورهٔ تناوب افزوده شود ، مقدار y تکرار میگردد .

خاصیت تناوب در شکل ۴۵ این معنی را میرساند که **اگر آن پاره از خم نمایش را که به ازای مقادیر x واقع بین ۰ و ۲π بدست میاید (پاره خم OQBRCO در شکل ۴۵) ، موازی محور Ox به اندازهٔ ضریب صحیحی از ۲π بسمت راست یا بسمت چپ انتقال دهیم ، بر قسمتی از خم نمایش تابع منطبق میشود .**

۶۸- قضیه . - قبل از محاسبهٔ مشتق $sin\,x$ (شمارهٔ ۶۹) ، لازم است نشان دهیم که

$$\lim_{x \to ۰} \frac{sin\,x}{x} = ۱ \qquad \text{(B)}$$

است . این حد را نمیتوان با استفاده از شمارهٔ ۱۶ بدست آورد . ما از هندسه و مثلثات استفاده میکنیم .



شکل ۴۶

اگر O مرکز دایره‌ای به شعاع واحد و x زاویهٔ AOM برحسب رادیان باشد ، چون طول شعاع دایره برابر یکه است ، قوس AM مساوی x است . اکنون اگر M' قرینهٔ M نسبت به OA باشد ، قوس AM برابر قوس AM' خواهد بود. مماسهای MT و M'T را رسم میکنیم. میدانیم که

$$MM' < \text{قوس}\ MAM' < MT + M'T$$

این نامساویها به صورت مثلثاتی زیر نوشته میشوند :

$$۲sin\,x < ۲x < ۲tg\,x$$

اکنون اگر x را بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ بگیریم ، $۲sin\,x$ مثبت است . مقادیر اخیر را به $۲sin\,x$ تقسیم میکنیم :

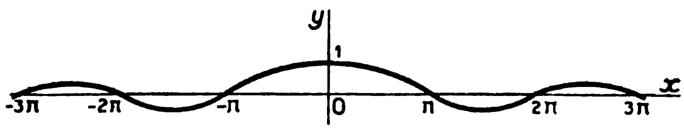
$$۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{۱}{\cos x}$$

هرسه جمله را معکوس میکنیم ، جهت نامساویها عوض میشود :

$$۱ > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

می‌بینیم به‌ازای مقادیر x بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ ، مقدار $\frac{\sin x}{x}$ بین ۱ و $\cos x$ است . اگر x را بسمت صفر میل دهیم ، میدانیم که $\lim\limits_{x \to ۰} \cos x = \cos ۰ = ۱$ است زیرا $\cos x$ به ازای $x = ۰$ تابعی پیوسته است (شمارهٔ ۱۷ را ببینید) . بدین‌ترتیب درستی دستور (B) محقق است .

خم نمایش تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ را درنظرمیگیریم (شکل ٤۷) . تابع به ازای $x = ۰$



شکل ٤۷

تعریف نشده است. ولی اگر به ازای $x = ۰$ به تابع عدد ۱ را نسبت دهیم ، تابع به‌ازای جمیع مقادیر x معین و پیوسته است (شمارهٔ ۱۷ را ببینید) .

٦۹- مشتق $\sin v$. - اگر

$$y = \sin v$$

و v متغیر مستقل باشد ، بنابر **قاعدهٔ کلی** شمارهٔ ۲۷ داریم :

عمل اول - $$y + \Delta y = \sin(v + \Delta v).$$

عمل دوم - $$\Delta y = \sin(v + \Delta v) - \sin v$$

باید شکل عبارت طرف راست معادلهٔ اخیر را طوری تغییر دهیم که بدست آوردن حد مطلوب ممکن باشد . بدین منظور از روابط (٦) صفحهٔ ٦ استفاده میکنیم :

$$\sin A - \sin B = ۲\cos\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A-B}{۲}$$

قرار میدهیم $A = v + \Delta v \;,\; B = v$

پس $\frac{A+B}{۲} = v + \frac{\Delta v}{۲} \;,\; \frac{A-B}{۲} = \frac{\Delta v}{۲}$

و $\sin(v+\Delta v) - \sin v = ۲\cos\left(v + \frac{\Delta v}{۲}\right)\sin\frac{\Delta v}{۲}$

و لذا $\Delta y = ۲\cos\left(v + \frac{\Delta v}{۲}\right)\sin\frac{\Delta v}{۲}$

عمل سوم - $\frac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\left(v + \frac{\Delta v}{۲}\right)\frac{\sin\frac{\Delta v}{۲}}{\frac{\Delta v}{۲}}$

عمل چهارم - $\frac{dy}{dv} = \cos v$

زیرا $\lim\limits_{\Delta v \to ۰}\cos\left(v + \frac{\Delta v}{۲}\right) = \cos v$ و بنابر شمارهٔ ۶۸ ، $\lim\limits_{\Delta v \to ۰}\left(\frac{\sin\frac{\Delta v}{۲}}{\frac{\Delta v}{۲}}\right) = ۱$ است.

این مقدار $\frac{dy}{dv}$ را در رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \cos v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v\,\frac{dv}{dx} \qquad \text{XIII}$$

بیان لفظی این قواعد به عهدهٔ خواننده گذاشته میشود .

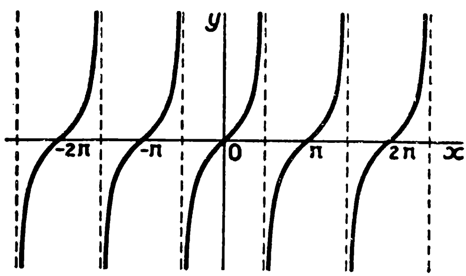
۷۰- توابع مثلثاتی دیگر. - تابع $\cos x$ به‌ازای جمیع مقادیر x معین و پیوسته و تابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π است. اگر در خم نمایش $y=\sin x$، شمارهٔ ٦۷، خط $x=\frac{\pi}{2}$ را محور y ها فرض کنیم، خم نمایش

$$y=\cos x$$

بدست میاید.

خم نمایش $$y=tg\,x$$

(شکل ٤۸) نشان میدهد که تابع $tg\,x$ به ازای عدهٔ بینهایتی از مقادیر متغیر مستقل x، یعنی به ازای $x=(n+\frac{1}{2})\pi$، که در آن n عدد صحیحی‌است، منفصل‌است. درواقع



شکل ٤۸

وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$، $tg\,x$ بینهایت میشود. اما از رابطهٔ $tg(\pi+x)=tg\,x$ دیده میشود که دورهٔ تناوب‌تابع π است. اختلاف مقادیر $x=(n+\frac{1}{2})\pi$ با $\frac{\pi}{2}$ مضرب صحیحی از دورهٔ تناوب است.

تابع $cotg\,x$ دارای دورهٔ تناوب π است و به ازای جمیع مقادیر x معین و پیوسته است جز به ازای مضارب صحیح π، یعنی $x=n\pi$، که $cotg\,x$ به ازای آنها بینهایت میشود. سرانجام $\sec x$ و $cosec\,x$ توابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π هستند. $\sec x$ تنها به ازای مقادیر $x=(n+\frac{1}{2})\pi$ و $cosec\,x$ تنها به ازای مقادیر $x=n\pi$ منفصل است. مقادیری از x که $\sec x$ و $cosec\,x$ به ازای آنها بینهایت میشوند، مجانبهای قائم خم نمایش آنها را بدست میدهند.

۷۱- مشتق $\cos v$. - اگر

$$y=\cos v$$

باشد ، بنابر جدول (۳) ی صفحهٔ ه ، این تساوی را میتوان به صورت

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-v\right)$$

نوشت . از تساوی اخیر برطبق دستور XIII مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-v\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{۲}-v\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-v\right)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

$$=-\sin v\frac{dv}{dx}\qquad .$$

زیرا بنابر جدول (۳) ی صفحهٔ ه ، $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-v\right)=\sin v$ است .

پس
$$\frac{d}{dx}(\cos v)=-\sin v\frac{dv}{dx}\qquad \text{XIV}$$

۷۲- اثبات دستورهای XV تا XIX . - به منظور اثبات این دستورها نخست توابع مورد نظر را به صورت ترکیبی از توابعی در میاوریم که مشتق هریک از آنها را میشناسیم و سپس از آنها مشتق میگیریم .

اثبات دستور XV . - اگر

$$y=tg\, v$$

باشد ، بنابر روابط (۲) ی صفحهٔ ه ، این تساوی را میتوان به صورت

$$y=\frac{\sin v}{\cos v}$$

نوشت . از تساوی اخیر برطبق دستور VII مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos v\frac{d}{dx}(\sin v)-\sin v\frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^{۲} v}$$

$$=\frac{\cos^{۲} v\frac{dv}{dx}+\sin^{۲} v\frac{dv}{dx}}{\cos^{۲} v}$$

بنابر روابط (۲) ی صفحهٔ ۵

$$=\frac{\frac{dv}{dx}}{\cos^{۲} v}=\sec^{۲} v\frac{dv}{dx}$$

پس

$$\text{XV} \qquad \frac{d}{dx}(tg\ v)=\sec^{۲} v\frac{dv}{dx}$$

برای اثبات دستورهای XVI تا XIX ، توابع مورد نظر را به صورتهای زیر مینویسیم :

$$\text{XVI} \qquad cotg\ v=\frac{۱}{tg\ v}$$

$$\text{XVII} \qquad \sec v=\frac{۱}{\cos v}$$

$$\text{XVIII} \qquad cosec\ v=\frac{۱}{\sin v}$$

$$\text{XIX} \qquad \sin vers\ v=vers\ v=۱-\cos v$$

محاسبهٔ مشتق این توابع به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته میشود .

۷۳- تبصره. - در بدست آوردن مشتقهای I تا XIX تنها برای دستورهای زیر بکار بستن **قاعدهٔ کلی** شمارهٔ ۲۷ لازم بوده است :

مجموع جبری

$$\text{III} \qquad \frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

حاصل‌ضرب

$$\text{V} \qquad \frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

خارج قسمت	$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^{۲}}$$	VII
تابع تابع	$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$	VIII
تابع معکوس	$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{\frac{dx}{dy}}$$	IX
لگاریتم	$$\frac{d}{dx}(\ln v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$	X
سینوس	$$\frac{d}{dx}(\sin v)=\cos v\frac{dv}{dx}$$	XIII

نه تنها تمام دستورهایی که تاکنون بدست آورده‌ایم از این دستورها نتیجه شده‌اند، بلکه تمام دستورهایی را نیزکه بعداً بدست خواهیم آورد، از اینها نتیجه خواهند شد. بدین‌ترتیب مشاهده میشودکه اشتقاق دستورهای اصلی مشتق گیری تنها محاسبهٔ کم‌وبیش مشکل دو حد زیر را ایجاب مینماید:

بنابر شمارهٔ ۶۸

$$\lim_{v\to ۰}\frac{\sin v}{v}=۱$$

و بنابر شمارهٔ ۶۱

$$\lim_{v\to ۰}(۱+v)^{\frac{۱}{v}}=e$$

تمرین

مشتق توابع زیر را حساب کنید:

۱) $y=\sin ax^{۲}$

حل - بنابر دستور XIII
$$\frac{dy}{dx}=\cos ax^{۲}\frac{d}{dx}(ax^{۲})$$
$$[v=ax^{۲}]$$
جواب :
$$=۲ax\cos ax^{۲}$$

۲) $y=tg\sqrt{۱-x}$

حل - بنابر دستور XV
$$\frac{dy}{dx}=sec^{۲}\sqrt{۱-x}\frac{d}{dx}(۱-x)^{\frac{۱}{۲}}$$
$$[v=\sqrt{۱-x}]$$
$$=sec^{۲}\sqrt{۱-x}\cdot\frac{۱}{۲}(۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}(-۱)$$
جواب :
$$=-\frac{sec^{۲}\sqrt{۱-x}}{۲\sqrt{۱-x}}$$

۳) $y=\cos^{۳}x$

حل - این تابع را میتوان به صورت زیر نوشت :
$$y=(\cos x)^{۳}$$
بنابر دستور VI
$$\frac{dy}{dx}=۳(\cos x)^{۲}\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$[v=\cos x \text{ و } n=۳]$$
بنابر دستور XIV
$$=۳\cos^{۲}x\,(-\sin x)$$
جواب :
$$=-۳\sin x\cos^{۲}x$$

٤) $y=\sin nx\,\sin^{n}x$

حل - بنابر دستور V
$$\frac{dy}{dx}=\sin nx\frac{d}{dx}(\sin x)^{n}+\sin^{n}x\frac{d}{dx}(\sin nx)$$

$[u=\sin nx$ و $v=\sin^n x]$

بنابر دستورهای VI و XIII

$$\frac{dy}{dx}=\sin nx \cdot n(\sin x)^{n-1}\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx)$$

$$=n \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x+n \sin^n x \cos nx$$

$$=n \sin^{n-1} x(\sin nx \cos x+\cos nx \sin x)$$

جواب : $=n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x$

۵) $y=\sin ax$ — $y'=a \cos ax$

٦) $y=3 \cos 2x$ — $y'=-6 \sin 2x$

۷) $s=tg\, 3t$ — $s'=3\sec^2 3t$

۸) $u=2cotg \frac{v}{2}$ — $\frac{du}{dv}=-cosec^2 \frac{v}{2}$

۹) $y=\sec 4x$ — $y'=4\sec 4x\ tg\, 4x$

۱۰) $\rho=a\, cosec\, b\theta$ — $\rho'=-ab\, cosec\, b\theta\, cotg\, b\theta$

۱۱) $y=\frac{1}{2}\sin^2 x$ — $y'=\sin x \cos x$

۱۲) $s=\sqrt{\cos 2t}$ — $\frac{ds}{dt}=\frac{-\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$

۱۳) $\rho=\sqrt[3]{tg\, 3\theta}$ — $\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{\sec^2 3\theta}{(tg\, 3\theta)^{\frac{2}{3}}}$

جواب

۱۴) $y=\dfrac{4}{\sqrt{\sec x}}$ — $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec x}}$

۱۵) $y=x\cos x$ — $y'=\cos x-x\sin x$

۱۶) $f(\theta)=\operatorname{tg}\theta-\theta$ — $f'(\theta)=\operatorname{tg}^2\theta$

۱۷) $\rho=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ — $\dfrac{d\rho}{d\theta}=\dfrac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}$

۱۸) $y=\sin 2x\cos x$ — $y'=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

۱۹) $y=\ln\sin ax$ — $y'=a\operatorname{cotg} ax$

۲۰) $y=\ln\sqrt{\cos 2x}$ — $y'=-\operatorname{tg} 2x$

۲۱) $y=e^{ax}\sin bx$ — $y'=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

۲۲) $s=e^{-t}\cos 2t$ — $s'=-e^{-t}(2\sin 2t+\cos 2t)$

۲۳) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ — $y'=\dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$

۲۴) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ — $y'=\sec x$

۲۵) $f(\theta)=\sin(\theta+a)\cos(\theta-a)$ — $f'(\theta)=\cos 2\theta$

۲۶) $f(x)=\sin^2(\pi-x)$ — $f'(x)=-2\sin(\pi-x)\cos(\pi-x)$

۲۷) $\rho=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta-\operatorname{tg}\theta+\theta$ — $\rho'=\operatorname{tg}^4\theta$

۲۸) $y=x^{\sin x}$ — $\dfrac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$

۲۹) $y=(\cos x)^x$ — $y'=y(\ln\cos x-x\operatorname{tg} x)$

مشتق دوم توابع زیر را حساب کنید :

جواب

۳۰) $y = \sin kx$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 \sin kx$

۳۱) $\rho = \frac{1}{4} \cos 2\theta$ $\qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\cos 2\theta$

۳۲) $u = tg\, v$ $\qquad \frac{d^2u}{dv^2} = 2\sec^2 v\, tg\, v$

۳۳) $y = x \cos x$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin x - x\cos x$

۳۴) $y = \frac{\sin x}{x}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sin x - 2x\cos x - x^2 \sin x}{x^3}$

۳۵) $s = e^t \cos t$ $\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -2e^t \sin t$

۳۶) $s = e^{-t} \sin 2t$ $\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -e^{-t}(3\sin 2t + 4\cos 2t)$

۳۷) $y = e^{ax} \sin bx$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(a^2 - b^2)\sin bx + 2ab \cos bx]$

در توابع زیر، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید :

جواب

۳۸) $y = \cos(x-y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y)}{\sin(x-y) - 1}$

۳۹) $e^y = \sin(x+y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{e^y - \cos(x+y)}$

۴۰) $\cos y = \ln(x+y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + (x+y)\sin y}$

درمسائل ۴۱ تا ۵۰ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به ازای مقادیر x که برحسب رادیان داده شده است حساب کنید :

جواب

۴۱) $y=x-\cos x \; ; \; x=1$ $\qquad y'=1.841$

۴۲) $y=x\sin\frac{x}{2} \; ; \; x=2$ $\qquad y'=1.381$

۴۳) $y=\ln\cos x \; ; \; x=0.5$ $\qquad y'=-0.546$

۴۴) $y=\frac{e^x}{x} \; ; \; x=-0.5$ $\qquad y'=-3.639$

۴۵) $y=\sin x\cos 2x \; ; \; x=1$ $\qquad y'=-1.754$

۴۶) $y=\ln\sqrt{tg\, x} \; ; \; x=\frac{\pi}{4}$ $\qquad y'=1$

۴۷) $y=e^x\sin x \; ; \; x=2$ $\qquad y'=3.643$

۴۸) $y=10e^{-x}\cos\pi x \; ; \; x=1$ $\qquad y'=3.679$

۴۹) $y=5e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi x}{2} \; ; \; x=2$ $\qquad y'=-21.35$

۵۰) $y=10e^{-\frac{x}{10}}\sin 3x \; ; \; x=1$ $\qquad y'=-27.00$

۷۴- توابع مثلثاتی معکوس. - اگر

$$y=\sin x \tag{1}$$

باشد ، میتوانیم بگوییم که «x اندازهٔ زاویه‌ای ، برحسب رادیان ، است که سینوس آن برابر y است» . درهر دایرهٔ به شعاع واحد اندازهٔ هرزاویهٔ مرکزی درست همان اندازهٔقوس مقابل به آن زاویه است (شمارهٔ ۲ را ببینید) . بیان داخل گیمه را به صورت مختصر

$$x=arc\sin y \tag{2}$$

مینویسیم و با عبارت «x مساوی است با آرك سینوس y» میخوانیم .

اگر در رابطهٔ (۲) جای x و y را عوض کنیم ، رابطهٔ

$$y = arc\ sin\ x \qquad (۳)$$

بدست میاید . این تابع به ازای $+۱ \geqslant x \geqslant -۱$ معین است . روابط (۱) و (۲) نشان میدهند (شمارهٔ ۳۹) که $sin\ x$ و $arc\ sin\ y$ دو تابع معکوس یکدیگرند .

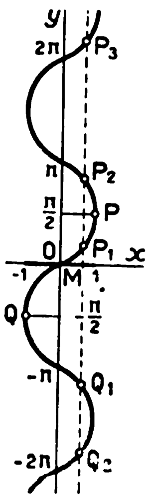
معادلهٔ (۳) را اغلب به‌صورت $y = sin^{-}\ x$ مینویسند*. اما این طرز نوشتن چندان مناسب نیست زیرا ممکن است $sin^{-۱}\ x$ با $(sin\ x)^{-۱}$ اشتباه شود .

اکنون مقدار y را که از رابطهٔ (۳) به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ بدست میاید ، درنظرمیگیریم:

$$y = arc\ sin\ \frac{۱}{۲} \qquad (٤)$$

یکی از مقادیر y که در رابطهٔ (٤) صدق میکنند ، $y = \frac{\pi}{٦}$ است ، زیرا

$\frac{۱}{۲} = sin\ ۳۰^\circ = sin\frac{\pi}{٦}$ است . یک مقدار دیگر آن $y = \frac{٥\pi}{٦}$ است ، زیرا



شکل ٤٩

$\frac{۱}{۲} = sin\ ۱٥۰^\circ = sin\ \frac{٥\pi}{٦}$ است . اگر به هریک از این دو مقدار ضریب صحیحی ، مثبت یا منفی ، از ۲π بیفزاییم ، جوابهای دیگر معادله بدست میاید . **پس عدهٔ مقادیری که در رابطهٔ (٤) صدق میکنند ، بینهایت است** و بدین ترتیب تابع $arc\ sin\ x$ «**چندسان**» است .

خم نمایش تابع $arc\ sin\ x$ (شکل ٤٩) چندسان بودن تابع را بخوبی نشان میدهد . به ازای $x = OM$ ، $y = MP_۱, MP_۲, MP_۳, \ldots, MQ_۱, MQ_۲, \ldots$ است.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال غالباً میتوان ، وگاهی باید ، یکی ازاین مقادیر متعدد را انتخاب کرد . دراینجا آن را که قدر مطلقش ازهمه کوچکتراست یعنی آن که بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$

---

* مؤلفان انگلیسی و آمریکایی معمولاً به این طرز مینویسند . مترجم

قرار دارد ، انتخاب میکنیم . مثلاً مینویسیم :

$$Arc\ sin\ \frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{٦}\ ,\ Arc\ sin\ ۰=۰\ ,\ Arc\ sin(-۱)=-\frac{\pi}{۲} \tag{۵}$$

بنابراین تابع $Arc\ sin\ x$ **یکسان** است و میتوان نوشت :

$$y=Arc\ sin\ x \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲}\right) \tag{٦}$$

بدین ترتیب تنها قوس QOP را درنظر میگیریم .

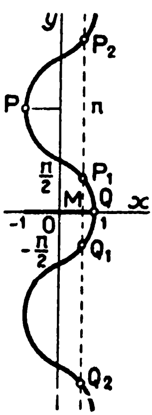
به همین طریق میتوان توابع مثلثاتی معکوس دیگررا نیز یکسان کرد . مثلاً برای $arc\ cos\ x$ مینویسیم :

$$y=Arc\ cos\ x \qquad (۰\leqslant y\leqslant\pi) \tag{۷}$$

مانند $Arc\ cos\ \frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}\ ,\ Arc\ cos(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ Arc\ cos(-۱)=\pi$

از دستورهای (٦) و (۷) اتحاد زیر بدست میاید :

$$Arc\ sin\ x+Arc\ cos\ x=\frac{\pi}{۲} \tag{۸}$$



شکل ۵۰

خم نمایش $Arc\ cos\ x$ تنها قوس $QP_۱P$ است (شکل ۵۰) .

توابع مثلثاتی معکوس دیگررا بعداً تعریف خواهیم کرد .

۷۵ - مشتق $arc\ sin\ v$. - اگر

$$y=Arc\ sin\ v \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

باشد ،

$$v=sin\ y$$

است . برطبق دستور XIII نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy}=cos\ y$$

و بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹

$$\frac{dy}{dv}=\frac{۱}{\cos y}$$

چون v تابعی از x است ، این نتیجه را در رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

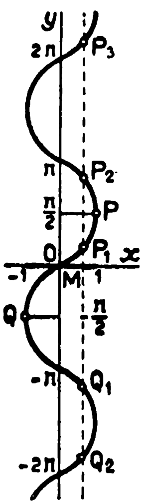
$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{\cos y}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{۱}{\sqrt{۱-v^۲}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

زیرا $\cos y=\sqrt{۱-\sin^۲ y}=\sqrt{۱-v^۲}$ است. علامت جلوی رادیکال را مثبت میگیریم زیرا کسینوس قوسی که بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد ، همواره مثبت است .

پس

$$\frac{d}{dx}(Arc\sin v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۱-v^۲}} \qquad \text{XX}$$

اگر $y=Arc\sin x$ باشد ، $y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ است. خم نمایش آن قوس QOP است (شکل ۵۱) . شیب خط مماس به این خم در نقاط Q و P بینهایت و در نقطهٔ O برابر ۱ است . تابع در تمام فاصلهٔ $[-۱ , +۱]$ صعودی است $(y' > ۰)$.



شکل ۵۱

۷۶ - مشتق $arc\cos v$. - اگر

$$y=Arc\cos v \qquad (۰\leqslant y\leqslant \pi)$$

باشد ،

$$v=\cos y$$

است . برطبق دستور XIV نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy}=-\sin y$$

پس بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹

$$\frac{dy}{dv}=-\frac{۱}{\sin y}$$

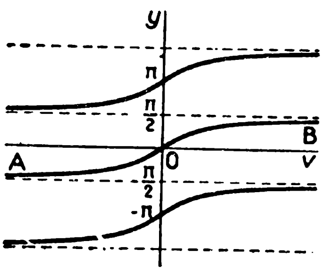
چون v تابعی از x است ، این نتیجه را در رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۱}{sin\,y}\cdot\frac{dv}{dx}=-\frac{۱}{\sqrt{۱-v^۲}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

زیرا $sin\,y=\sqrt{۱-cos^۲y}=\sqrt{۱-v^۲}$ است. علامت جلوی رادیکال را مثبت میگیریم زیرا سینوس قوسی که بین ۰ و π قرار دارد ، همواره مثبت است .

پس
$$\frac{d}{dx}(Arc\,cos\,v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۱-v^۲}} \qquad \text{XXI}$$

اگر $y=Arc\,cos\,x$ باشد ، $y'=-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ است . خم نمایش آن (در شکل ۵۰)قوس PQ است. وقتی x از ۱— تا ۱+ صعود میکند ، y از π تا ۰ نزول مینماید $(y' < ۰)$.



شکل ۵۲

۷۷ - مشتق $arc\,tg\,v$. - اگر

$$y=arc\,tg\,v \qquad (۱)$$

باشد ،
$$v=tg\,y \qquad (۲)$$

است. تابع (۱) وقتی یکسان است که کوچکترین مقدار عددی y را انتخاب کنیم ، یعنی مقداری را بگیریم که بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد و (در شکل ۵۲) نظیر قوس AB است . بدین ترتیب وقتی $v \to -\infty$ ، $y \to -\frac{\pi}{۲}$ و وقتی $v \to +\infty$ ، $y \to \frac{\pi}{۲}$ و میتوان نوشت :

$$Arc\,tg(+\infty)=\frac{\pi}{۲}\ ,\ Arc\,tg(-\infty)=-\frac{\pi}{۲} \qquad (۳)$$

بر طبق دستور XV از رابطهٔ (۲) نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy}=sec^{۲}y$$

و بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹

$$\frac{dy}{dv}=\frac{۱}{sec^{۲}y}$$

چون v تابعی از x است ، این نتیجه را در رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

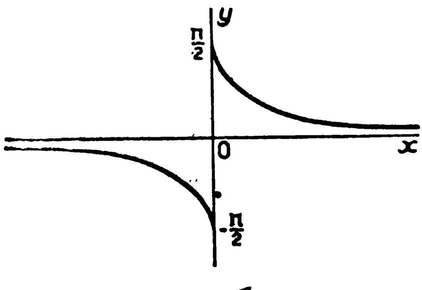
$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{sec^{۲}y}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{۱}{۱+v^{۲}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

زیرا $sec^{۲}y=۱+tg^{۲}y=۱+v^{۲}$ است .

پس

$$\text{XXII}\qquad \frac{d}{dx}(Arc\ tg\ v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{۱+v^{۲}}$$

اگر $y=Arc\ tg\ x$ باشد ، $y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ است و تابع به ازای جمیع مقادیر x صعودی است .



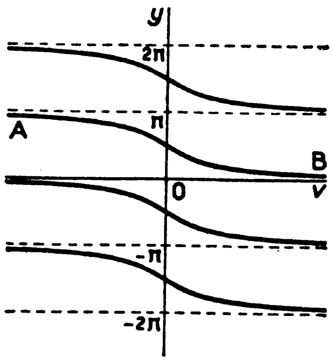
شکل ۵۳

تابع $arc\ tg\ \frac{۱}{x}$ مثال خوبی از یک تابع منفصل است . اگر تنها یک شاخه از خم نمایش تابع $y=Arc\ tg\ \frac{۱}{x}$ را درنظر بگیریم (شکل ۵۳) ، می‌بینیم وقتی x ازطرف چپ بسمت صفر میل میکند ، y بسمت $-\frac{\pi}{۲}$ میل مینماید ، درصورتی که وقتی x ازطرف راست

بسمت‌صفرمیل‌میکند،yبسمت $+\frac{\pi}{۲}$ میل مینماید. پس این تابع به ازای $x=۰$ منفصل است (شمارهٔ ۱۷) . مقدار آن‌را به ازای $x=۰$ میتوان بطور دلخواه $-\frac{\pi}{۲}$ یا $+\frac{\pi}{۲}$ اختیارکرد .

۷۸- مشتق *arc cotg* v . - اگر روش شمارهٔ اخیر را دنبال کنیم ، داریم :

$$\frac{d}{dx}(Arc\ cotg\ v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{۱+v^۲} \qquad \text{XXIII}$$



شکل ٥٤

تابع $y=Arc\ cotg\ v$ به‌ازای‌جمیع مقادیر $۰<y<\pi$ که (درشکل ٥٤) نظیر قوس AB است ، یکسان‌است. وقتی $v\to+\infty$ ، $y\to۰$ و وقتی $v\to-\infty$ ، $y\to\pi$ ومیتوان‌نوشت :

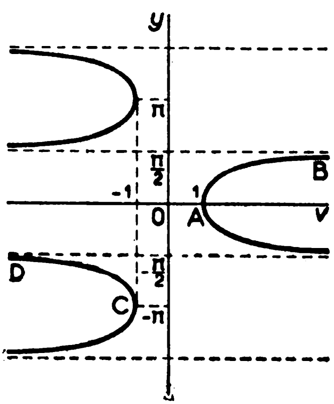
$$Arc\ cotg\ (+\infty)=۰$$

$$Arc\ cotg\ (-\infty)=\pi$$

۷۹- مشتق *arc sec* v و *arc cosec* v . - تابع

$$y=arc\ sec\ v \qquad (۱)$$

به‌ازای جمیع مقادیر v ، جز به ازای مقادیر بین ۱- و ۱+ ، معین است . به منظورآنکه تابع یکسان باشد ، برای y مقادیر زیر را انتخاب میکنیم (شکل ٥٥ را ببینید) :



شکل ٥٥

وقتی v مثبت است ، y را بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ میگیریم (قوس AB) ،

و وقتی v منفی است ، y را بین $-\pi$ و $-\frac{\pi}{۲}$ میگیریم (قوس CD) .

پس وقتی $v \to +\infty$ ، $y \to \frac{\pi}{۲}$ و وقتی $v \to -\infty$ ، $y \to -\frac{\pi}{۲}$.

رابطهٔ (۱) را به صورت $v = sec\ y$ مینویسیم و از آن برطبق دستور XVII نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy} = sec\ y\ tg\ y$$

و بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹

$$\frac{dy}{dv} = \frac{۱}{sec\ y\ tg\ y}$$

چون v تابعی از x است، این نتیجه را در دستور (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{sec\ y\ tg\ y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{۱}{v\sqrt{v^۲ - ۱}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

زیرا $sec\ y = v$ و $tg\ y = \sqrt{sec^۲ y - ۱} = \sqrt{v^۲ - ۱}$ است . علامت جلوی رادیکال را مثبت میگیریم زیرا $tg\ y$ به ازای جمیع مقادیر y واقع بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ و واقع بین $-\pi$ و $-\frac{\pi}{۲}$ مثبت است .

پس

$$\frac{d}{dx}(Arc\ sec\ v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^۲ - ۱}} \qquad \text{XXIV}$$

مشتق $arc\ cosec\ v$. - اگر

$$y = arc\ cosec\ v$$

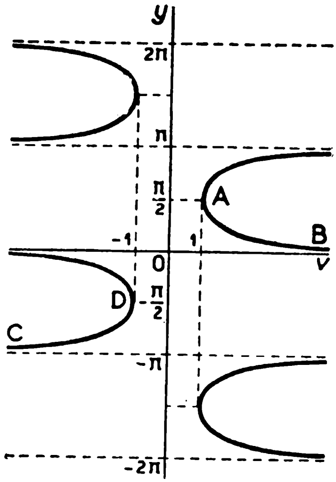
باشد ،

$$v = cosec\ y$$

است: از این رابطه برطبق دستور XVIII نسبت به y مشتق میگیریم و روش شمارهٔ اخیر را دنبال میکنیم ، داریم :

$$\frac{d}{dx}(Arc\ cosec\ v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^۲ - ۱}} \qquad \text{XXV}$$

تابع $y=arc\ cosec\ v$ به ازای جمیع مقادیر v ، جز به ازای مقادیر بین ۱— و ۱+ ، معین ولی چند سان است. به منظور آن که تابع یکسان‌باشد ، برای y مقادیر زیررا انتخاب میکنیم (شکل ٥٦ را ببینید) :



شکل ٥٦

وقتی v مثبت است ، y را بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ میگیریم (قوس AB) ،

و وقتی v منفی است ، y را بین π— و $-\frac{\pi}{۲}$ میگیریم (قوس CD).

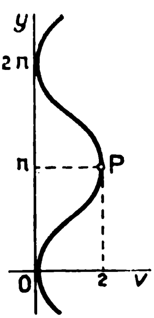
۸۰- مشتق $arc\ vers\ v$ * . - اگر

$$y=arc\ vers\ v$$

باشد ،

$$v=vers\ y$$

است . از این رابطه برطبق دستور XIX نسبت به y مشتق میگیریم :



شکل ٥٧

$$\frac{dv}{dy}=sin\ y$$

پس بنابر رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۳۹ داریم :

$$\frac{dy}{dv}=\frac{۱}{sin\ y}$$

چون v تابعی از x است ، این نتیجه‌را در دستور (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

* این تابع تنها به ازای مقادیری از v که در فاصلهٔ بستهٔ [۲ , ۰] قرار دارند ، معین است و به ازای هرمقدار از این فاصله بینهایت مقدار دارد . به منظور آن که تابع یکسان باشد ، برای y کوچکترین قوس مثبتی که سینوس ورس آن v است یعنی فاصلهٔ بستهٔ [π , ۰] را در نظر میگیریم . خم نمایش آن (در شکل ٥٧) پاره خم OP است .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{sin\, y}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{۱}{\sqrt{۲v-v^{۲}}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

زیرا $sin\, y=\sqrt{۱-cos^{۲}y}=\sqrt{۱-(۱-vers\, y)^{۲}}=\sqrt{۲v-v^{۲}}$ است . علامت جلوی رادیکال را مثبت میگیریم زیرا $sin\, y$ به ازای جمیع مقادیر y واقع در فاصلهٔ بستهٔ $[۰ , \pi]$ مثبت‌است . پس :

$$\frac{d}{dx}(Arc\ vers\ v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{۲v-v^{۲}}} \qquad \text{XXVI}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را پیدا کنید :

۱) $y=arc\, tg\, ax^{۲}$

حل - بنابر دستور XXII

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(ax^{۲})}{۱+(ax^{۲})^{۲}}$$

$$[v=ax^{۲}]$$

جواب :

$$=\frac{۲ax}{۱+a^{۲}x^{٤}}$$

۲) $y=arc\, sin(۳x-٤x^{۳})$

حل - بنابردستور XX

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(۳x-٤x^{۳})}{\sqrt{۱-(۳x-٤x^{۳})^{۲}}}$$

$$[v=۳x-٤x^{۳}]$$

جواب :

$$=\frac{۳-۱۲x^{۲}}{\sqrt{۱-۹x^{۲}+۲٤x^{٤}-۱٦x^{٦}}}=\frac{۳}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

۳) $y = arc\ sec\ \frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$

حل - بنابر دستور XXIV

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\right)}{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\sqrt{\left(\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\right)^۲-۱}}$$

$$\left[v = \frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\right]$$

$$= \frac{\frac{(x^۲-۱)۲x-(x^۲+۱)۲x}{(x^۲-۱)^۲}}{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\cdot\frac{۲x}{x^۲-۱}} = -\frac{۲}{x^۲+۱}$$ جواب :

٤) $y = arc\ cos\ \frac{x}{a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$

٥) $y = arc\ sec\ \frac{x}{a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{x^۲-a^۲}}$

٦) $y = arc\ cotg\ \frac{x}{a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{a^۲+x^۲}$

۷) $y = arc\ sec\ \frac{۱}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۸) $y = arc\ cosec\ ۲x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-۱}{x\sqrt{٤x^۲-۱}}$

۹) $y = arc\ sin\ \sqrt{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{x-x^۲}}$

جواب

۱۰) $\theta = arc\ vers\ \rho^{۲}$ $\qquad \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{۲}{\sqrt{۲-\rho^{۲}}}$

۱۱) $y = x\ arc\ sin\ ۲x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = arc\ sin\ ۲x + \frac{۲x}{\sqrt{۱-۴x^{۲}}}$

۱۲) $y = x^{۲}\ arc\ cos\ x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = ۲x\ arc\ cos\ x - \frac{x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۳) $f(u) = u\sqrt{a^{۲}-u^{۲}} + a^{۲}\ arc\ sin\ \frac{u}{a}$ $\qquad f'(u) = ۲\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}$

۱۴) $f(x) = \sqrt{a^{۲}-x^{۲}} + a\ arc\ sin\ \frac{x}{a}$ $\qquad f'(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

۱۵) $v = a^{۲}\ arc\ sin\ \frac{u}{a} - u\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}$ $\qquad \frac{dv}{du} = \frac{۲u^{۲}}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}$

۱۶) $v = \frac{u}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}} - arc\ sin\ \frac{u}{a}$ $\qquad \frac{dv}{du} = \frac{u^{۲}}{(a^{۲}-u^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۷) $v = arc\ sin\ \frac{u}{a} + \frac{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}{u}$ $\qquad \frac{dv}{du} = -\frac{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}{u^{۲}}$

۱۸) $v = a\ arc\ cos\left(۱-\frac{u}{a}\right) + \sqrt{۲au-u^{۲}}$ $\qquad \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{۲au-u^{۲}}}{u}$

۱۹) $\varphi = arc\ tg\ \frac{a+r}{۱-ar}$ $\qquad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{۱}{۱+r^{۲}}$

۲۰) $x = r\ arc\ vers\ \frac{y}{r} - \sqrt{۲ry-y^{۲}}$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{۲ry-y^{۲}}}$

۲۱) $y = \frac{۱}{۳}x^{۳}\ arc\ tg\ x + \frac{۱}{۶}ln(x^{۲}+۱) - \frac{۱}{۶}x^{۲}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{۲}\ arc\ tg\ x$

درمسائل ۲۲ تا ۲۷ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به ازای مقدار داده شدهٔ x حساب کنید :

جواب

۲۲) $y = x\,arc\,sin\,x \;;\; x = \frac{۱}{۲}$ — $y' = ۱٫۱۰۱$

۲۳) $y = x\,arc\,cos\,x \;;\; x = -\frac{۱}{۲}$ — $y' = ۲٫٦۷۱$

۲۴) $y = \frac{arc\,tg\,x}{x} \;;\; x = ۱$ — $y' = -۰٫۲۸۵$

۲۵) $y = \sqrt{x}\,arc\,cotg\,\frac{x}{٤} \;;\; x = ٤$ — $y' = -۰٫۰۵٤$

۲٦) $y = \frac{arc\,sec\,۲x}{\sqrt{x}} \;;\; x = ۱$ — $y' = ۰٫۰۵۳$

۲۷) $y = x^{۲} arc\,cosec\sqrt{x} \;;\; x = ۲$ — $y' = ۲٫۱٤۲$

مشتق توابع زیر را پیدا کنید :

۲۸) $arc\,sin\sqrt{x}$

۲۹) $arc\,tg\,\frac{۲}{x}$

۳۰) $x\,arc\,cos\,\frac{x}{۲}$

۳۱) $\frac{arc\,cotg\,۲x}{x}$

۳۲) $arc\,vers\,(۱-x)$

۳۳) $arc\,sec\sqrt{x}$

۳٤) $e^{x}\,arc\,cos\,x$

۳۵) $ln\,arc\,tg\,x$

۳٦) $\sqrt{arc\,sin\,۲x}$

۳۷) $\frac{arc\,cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

تمرین

خمهای زیر را رسم کنید ، محل تقاطع آنها را با محورهای مختصات تعیین نمایید و شیب خطوط مماس به خمها را در این نقاط پیدا کنید .

۱) $y = ln\, x$ جواب : در نقطهٔ $(۱ , ۰)$ ، $m = ۱$

۲) $y = log\, x$ در نقطهٔ $(۱ , ۰)$ ، $m = ۰٫۴۳۴$

۳) $y = ln(٤ - x)$ در نقطهٔ $(۳ , ۰)$ ، $m = -۱$

و در نقطهٔ $x = ۰$ ، $m = -\frac{۱}{٤}$

٤) $y = ln\sqrt{٤ - x^{۲}}$

٥) نشان دهید که اگر $y = \frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ باشد ، $y'' = \frac{y}{a^{۲}}$ است .

زاویهٔ بین هر زوج خم زیر را پیدا کنید :

٦) $y = ln(۷ - ۲x)$ ، $y = ln(x + ۱)$ جواب : $۱۲۷^{\circ}\ ٥۳'$

۷) $y = ln(٥ - x^{۲})$ ، $y = ln(x + ۳)$

۸) $y = cos\, x$ ، $y = sin\, x$ $۱۰۹^{\circ}\ ۲۸'$

۹) $y = cotg\, x$ ، $y = tg\, x$ $٥۳^{\circ}\ ۸'$

۱۰) $y = sin\, ۲x$ ، $y = cos\, x$

نقاط ماکزیمم ، نقاط مینیمم و نقاط عطف خمهای زیر را پیدا کنید و خم نمایش آنها را رسم نمایید :

۱۱) $y = x\, ln\, x$ جواب : مختصات نقطهٔ مینیمم $\left(\frac{۱}{e} , -\frac{۱}{e}\right)$

۱۲) $y=\frac{x}{\ln x}$ جواب : مختصات نقطهٔ مینیمم (e , e)

عطف $(e^{۲} , \frac{e^{۲}}{۲})$

۱۳) $y=\ln(۸x-x^{۲})$ ماکزیمم $(۴ , \ln ۱۶)$

۱۴) $y=xe^{x}$ مینیمم $(-۱ , -\frac{۱}{e})$

عطف $(-۲ , -\frac{۲}{e^{۲}})$

۱۵) $y=x^{۲} e^{-x}$

۱۶) یک کابل زیر دریایی تلگراف متشکل از یک سیم مسی است . این سیم با قشر عایقی پوشیده شده است . میدانیم که اگر نسبت شعاع سیم به ضخامت قشر عایق x باشد ، سرعت انتقال خبربرطبق دستور $x^{۲} \ln \frac{۱}{x}$ تغییر میکند . نشان دهید که به ازای $x=\frac{۱}{\sqrt{e}}$ سرعت انتقال خبرماکزیمم است .

۱۷) مقدار ماکزیمم تابع $y=ae^{kx}+be^{-kx}$ را پیدا کنید .

جواب : $۲\sqrt{ab}$

۱۸) نقطهٔ ماکزیمم ونقاط عطف خم $y=e^{-x^{۲}}$ را پیدا کنید و خم نمایش آن را رسم نمایید .

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $(۱ , ۰)$ ، نقاط عطف $\left(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}} , \frac{۱}{\sqrt{e}}\right)$

۱۹) مستطیلی راکه زیر خم مسئلهٔ ۱۸ محاط است و یک ضلع آن برمحور x ها قرار دارد درنظر میگیریم . نشان دهید که مساحت این مستطیل وقتی ماکزیمم است که دو رأس دیگر آن برنقاط عطف خم منطبق باشند .

نقاط ماکزیمم ، نقاط مینیمم ونقاط عطف خمهای زیر را در فاصله های داده شده پیدا کنید و خم نمایش آنها را رسم نمایید .

۲۰) $y=\frac{x}{۲}-\sin x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲\pi)$

جواب : نقطهٔ مینیمم $\left(\frac{\pi}{۳} , -۰ر۳۴۲۴\right)$ ، نقطهٔ ماکزیمم $\left(\frac{۵\pi}{۳} , ۳ر۴۸۴۰\right)$ ،
نقاط عطف $(۰ , ۰)$ و $\left(\pi , \frac{\pi}{۲}\right)$ و $(۲\pi , \pi)$

۲۱) $y=۲x-tg\, x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $\left(\frac{\pi}{۴} , ۰ر۵۷۱\right)$ ، نقطهٔ مینیمم $\left(\frac{۳\pi}{۴} , ۵ر۷۱۲\right)$ ، نقاط عطف $(۰ , ۰)$ و $(\pi , ۲\pi)$

۲۲) $y=tg\, x-۴x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

جواب : نقطهٔ مینیمم $\left(\frac{\pi}{۳} , -۲ر۴۵۷\right)$ ، نقطهٔ ماکزیمم $\left(\frac{۲\pi}{۳} , -۱۰ر۱۱\right)$ ،
نقاط عطف $(۰ , ۰)$ و $(\pi , -۴\pi)$

۲۳) $y=۳\sin x-۴\cos x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲\pi)$

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $(۲ر۴۹۸ , ۵)$ ، نقطهٔ مینیمم $(۵ر۶۴۰ , -۵)$ ، نقاط عطف
$(۰ر۹۲۷ , ۰)$ و $(۴ر۰۶۹ , ۰)$

۲۴) $y=x+\cos ۲x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

۲۵) $y=\sin \pi x-\cos \pi x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲)$

۲۶) $y=\frac{x}{۲}+\sin ۲x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

۲۷) $y=x-۲\cos ۲x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

۲۸) $y=\frac{\pi x}{۲}+\sin \pi x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲)$

۲۹) نشان دهید که مقدار ماکزیمم $y=a \sin x+b \cos x$ ، $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است .

۳۰) طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی ۸ فوت است . ارتفاع آن در لحظهٔ t_0 ، ۴ فوت است و با سرعت ۳ اینچ در دقیقه زیاد میشود . سرعت افزایش زاویهٔ رأس مثلث درلحظهٔ t_0 چقدر است ؟ جواب : با سرعت $۳^\circ ۳۵'$ در دقیقه کاهش می‌یابد .

۳۱) نقاط ماکزیمم و مینیمم خمهای زیر را در فاصله‌های داده شده پیدا کنید و خم نمایش آنها را رسم نمایید :

الف) $y=۱۰e^{-x} \sin x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲\pi)$

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $(۳٫۲۲۴ , \frac{\pi}{۴})$ ،

نقطهٔ مینیمم $(-۰٫۱۳۹ , \frac{۵\pi}{۴})$

ب) $y=۱۰e^{-x} \cos x$ در فاصلهٔ $(۰ , ۲\pi)$

پ) $y=۱۰e^{-\frac{x}{۲}} \sin ۲x$ در فاصلهٔ $(۰ , \pi)$

۳۲) ابعاد استوانه‌ای را پیدا کنید که در کره‌ای به شعاع ۶ اینچ محاط و حجم آن ماکزیمم است(اگر زاویهٔ دید شعاع قاعدهٔ استوانه را از مرکز کره θ بنامیم و آن را پارامتر بگیریم، $r=۶\sin\theta$ و $h=۱۲\cos\theta$ میشود) .

۳۱) مسئلهٔ ۳۲ را با فرض آن که سطح جانبی استوانه ماکزیمم است ، حل کنید (همان θ را پارامتر بگیرید) .

۳۴) نیروی F جسمی را که وزن آن P است و روی صفحه‌ای افقی قرار دارد ، میکشد . امتداد نیرو با صفحهٔ افق زاویه‌ای برابر x میسازد . اندازهٔ نیرو با دستور $F=\frac{kP}{k \sin x+\cos x}$ که در آن k ضریب مالش است ، داده شده است . نشان دهید که وقتی $tg\, x=k$ است ، کشش مینیمم است .

۳۵) از نقطهٔ O واقع برصفحهٔ مایلی که بالای صفحهٔ افق قرار دارد و با آن زاویهٔ α میسازد ، گلوله‌ای در صفحهٔ قائم مار برخط بزرگترین شیب نقطهٔ O پرتاب میشود . اندازهٔ برد با دستور

$$R=\frac{۲v^۲ \cos\theta \sin(\theta-\alpha)}{g \cos^۲\alpha}$$

تعیین میگردد . v و g مقادیر ثابت و θ زاویهٔ پرتاب است . به ازای چه مقدار θ برد ماکزیمم است ؟ جواب : $\theta=\frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲}$

۳۶) درپیچ ذوزنقه * ، اندازهٔ کارآیی بادستور $E=\dfrac{tg\,\theta}{tg(\theta+\varphi)+f}$ تعیین میشود. θ زاویهٔ شیب ، φ زاویهٔ مالش و f مقدار ثابتی است . وقتی φ معین و ثابت است ، به‌ازای چه مقدار از θ کارآیی پیچ ماکزیمم است ؟

تمرین اضافی

۱) خمهای $y=x\,ln\,x$ و $y=x\,ln(۱-x)$ یکدیگررا درمبدأمختصات ونقطهٔ دیگری قطع میکنند . زاویهٔ بین این دو خم در نقطهٔ اخیر چقدر است ؟

جواب : $۱۰۳^\circ\ ۳۰'$

۲) دو خم زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و زاویهٔ تقاطع آنها را پیدا نمایید :

$$y=ln(\frac{x^۳}{۸}-۱)\quad,\quad y=ln(۳x-\frac{x^۲}{٤}-۱)$$

جواب : $۳۲^\circ\ ۲۸'$

۳) خط AB در نقطهٔ A به خم $y=e^x+۱$ مماس است و محور x ها را در نقطهٔ B قطع میکند . میدانیم که طول پاره خط AB مینیمم است . مختصات نقطهٔ A را پیدا کنید . جواب : (۲ , ۰)

* Square-threaded screw

فصل هشتم

معادلات پارامتری ـ معادلات قطبی

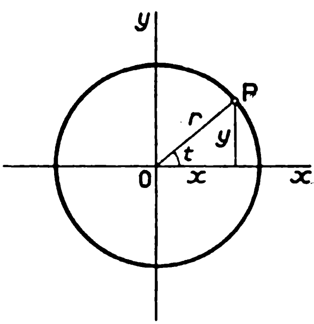
ریشهٔ معادلات

۸۱- معادلات پارامتری خم - شیب خم .- مختصات نقاط یک خم اغلب به‌صورت توابعی از یک پارامتر ، مانند t ، در دست است ، مثل

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases} \qquad (۱)$$

این معادلات به ازای هرمقدار t معمولاً یک مقدار برای x و یک مقدار برای y بدست میدهند و بدین‌ترتیب یک نقطه از خم را معین‌میکنند. معادلات (۱) را **معادلات‌پارامتری** خم مینامند . اگر t را بین معادلات (۱) حذف کنیم ، **معادلهٔ قائم** خم بدست میاید . مثلاً اگر معادلات پارامتری دایرهٔ شکل ۵۸ ، یعنی

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \qquad (۲)$$



شکل ۵۸

را در نظر بگیریم و بخواهیم پارامتر t را بین آنها حذف کنیم ، این معادلات‌را به قوهٔ دو میرسانیم‌و دو طرف آنها را با یکدیگر جمع میکنیم ، معادلهٔ قائم‌دایره

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2$$

بدست میاید . روشن است که وقتی t از ۰ تا ۲π تغییر میکند ، نقطهٔ P(x , y) یک دایرهٔ کامل رسم مینماید .

بنابر معادلات (۱) ، y به صورت تابعی از t و t به صورت تابعی از x داده شده است . پس بنابر دستور (A) ی شمارهٔ ۳۸ :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

و بنابر دستور (C) ی شمارهٔ ۳۹

$$=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{۱}{\frac{dx}{dt}}$$

و از آنجا

$$\text{(A)}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}=[P(x\,,\,y)\ \text{شیب خم درنقطهٔ}]$$

با این دستورمیتوان‌شیب خمی‌راکه معادلات پارامتری‌آن‌دردست است ، حساب کرد .

مثال ۱- معادلهٔ مماس و قائم و اندازهٔ تحت مماس و تحت قائم به بیضی

$$(۲)\qquad \begin{cases} x=a\,cos\,\varphi \\ y=b\,sin\,\varphi \end{cases}$$

را در نقطهٔ نظیر به $\varphi=45^\circ$ پیدا کنید * .

---

* دایرهٔ اصلی و دایرهٔ محاطی بیضی را درنظر میگیریم و سپس از B و C که دو نقطه از یک‌شعاع‌اند خطوط BA و DP رابترتیب موازی Oy و Ox رسم میکنیم. این‌خطوط یکدیگر را در نقطهٔ P(x , y) که روی بیضی قرار دارد ، قطع میکنند زیرا

$$x=OA=OB\,cos\,\varphi=a\,cos\,\varphi$$

و

$$y=AP=OD=OC\,sin\,\varphi=b\,sin\,\varphi$$

یا

$$\frac{x}{a}=cos\,\varphi \quad \text{و} \quad \frac{y}{b}=sin\,\varphi$$

دنبالهٔ زیرنویس را در صفحهٔ بعد بخوانید

حل - چون دراین مثال φ پارامتر است ، از x و y نسبت به φ مشتق میگیریم :

$$\frac{dx}{d\varphi}=-a\,sin\,\varphi \quad , \quad \frac{dy}{d\varphi}=b\,cos\,\varphi$$

این مقادیر را در (A) میگذاریم ، شیب خم در یک نقطهٔ اختیاری بدست میاید :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\,cos\,\varphi}{a\,sin\varphi}=-\frac{b}{a}cotg\,\varphi=m$$

بجای φ ، ٤٥° میگذاریم ، معادلات (۲) مختصات نقطهٔ تماس وعبارت اخیر ضریب زاویهٔ خط مماس را میدهند :

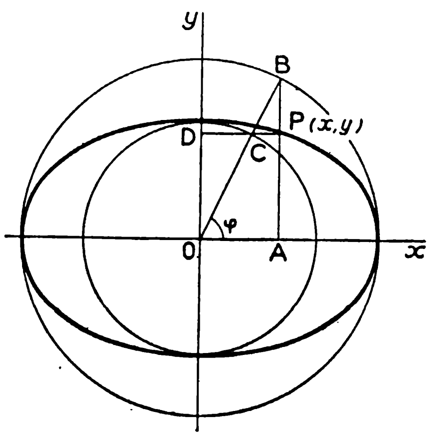
$$x_۱=\frac{a}{۲}\sqrt{۲} \quad , \quad y_۱=\frac{b}{۲}\sqrt{۲}$$

دنبالهٔ زیرنویس صفحهٔ قبل

است . اکنون اگرطرفین دوتساوی اخیررا به قوهٔ دوبرسانیم وطرفهای راست را باهم وطرفهای چپ‌را باهم جمع کنیم ، معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=cos^۲\varphi+sin^۲\varphi=۱$$

بدست میاید . این‌معادله معادلهٔ‌بیضی‌دردستگاه قائم‌است. φ راگاهی‌زاویهٔ‌خروج‌ازمرکزنقطهٔ P مینامند.



شکل ٥۹

$$m_{1}=-\frac{b}{a}\,cotg\,45^{\circ}=-\frac{b}{a}$$

این مقادیر را در معادلات (۱) ، (۲) ، (۳) و (٤) شمارهٔ ٤۳ میگذاریم ، پس‌از اختصار داریم :

معادلهٔ مماس $bx+ay=\sqrt{2}\,ab$

معادلهٔ قائم $\sqrt{2}(ax-by)=a^{2}-b^{2}$

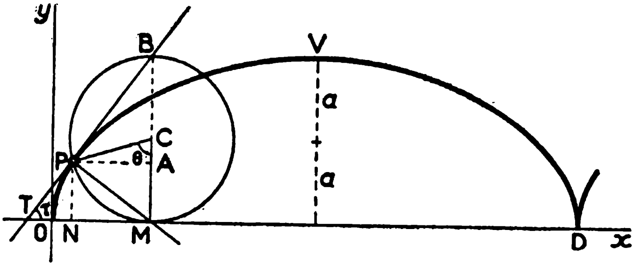
طول تحت مماس $=\frac{b}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{a}{b}\right)=-\frac{a}{2}\sqrt{2}$

طول تحت قائم $=\frac{b}{2}\sqrt{2}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{b^{2}}{2a}\sqrt{2}$

مثال ۲ - معادلات پارامتری سیکلوئید *

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad (4)$$

* مسیر نقطهٔ ثابتی از یک دایره را که بدون لغزش روی خط ثابت و مستقیمی بغلتد ، **سیکلوئید** مینامند . اگر a شعاع دایرهٔ غلتان ، P نقطهٔ مولد خم و M نقطهٔ تماس دایره با خط Ox (که پایه نام‌دارد) باشد ، چون طول قوس PM با طول OM برابر است ، وقتی دایره بسمت چپ بغلتد ، نقطهٔ P به نقطهٔ O نزدیک و سرانجام برآن منطبق میشود . حال اگر زاویهٔ PCM را θ بنامیم :



شکل ٦۰

دنبالهٔ زیر نویس را در صفحهٔ بعد بخوانید

و θ پارامتر آن است . طول تحت مماس و تحت قائم و قطعهٔ قائم به سیکلوئید را در نقطهٔ (x_1 , y_1) که به $\theta = \theta_1$ نظیر است ، پیدا کنید .

حل - از x و y نسبت به θ مشتق میگیریم :

$$\frac{dx}{d\theta} = a(۱ - \cos\theta) \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin\theta$$

این مقادیر را در دستور (A) ی شمارهٔ ۸۱ میگذاریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{۱ - \cos\theta} = m = [\text{شیب خم در یک نقطهٔ اختیاری}]$$

وقتی $\theta = \theta_1$ است ، $y = y_1 = a(۱ - \cos\theta_1)$ و $m = m_1 = \frac{\sin\theta_1}{۱ - \cos\theta_1}$ است. پس بنابر دستورهای شمارهٔ ۴۳ (شکل ٦۰ را ببینید) :

$$\text{تحت مماس} = \frac{a(۱ - \cos\theta_1)^۲}{\sin\theta_1} = TN$$

$$\text{تحت قائم} = a \sin\theta_1 = NM$$

$$\text{قطعهٔ قائم} = a\sqrt{۲(۱ - \cos\theta_1)} = MP$$

و بنابر روابط (۵) صفحهٔ ٦

$$= ۲a \sin\frac{\theta_1}{۲}$$

دنبالهٔ زیر نویس صفحهٔ قبل

$$x = ON = OM - NM = a\theta - a\sin\theta = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = NP = MC - AC = a - a\cos\theta = a(۱ - \cos\theta)$$

اینها معادلات پارامتری سیکلوئید و زاویهٔ θ ، یعنی زاویهٔ بین دو شعاع CP و CM ، پارامتر آن است . در یک طاق نمای سیکلوئید (شکل ٦۰) ، $OD = ۲\pi a$ را پایه و نقطهٔ V را رأس طاق نما مینامند . اگر بین دو معادلهٔ بالا θ را حذف کنیم ، معادلهٔ قائم خم بدست میاید :

$$x = a \arccos\left(\frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{۲ay - y^۲}$$

است . در شکل ۶۰ ، وقتی $\theta=\theta_1$ است :

$$PA=a\ sin\ \theta_1=NM \text{ تحت قائم}$$

این درست همان است که پیدا کرده‌ایم . بدین ترتیب رسم قائم PM و مماس PB میسر میگردد .

مماسهای افقی و مماسهای عمودی . - با توجه به رابطهٔ (A) و شمارهٔ ۴۲ می‌بینیم که مقادیر t ی نظیر به نقاط تماس مماسهای افقی و مماسهای عمودی به طریق زیر بدست میایند :

مقادیر t ی نظیر به نقاط تماس مماسهای افقی ریشه‌های معادلهٔ $\frac{dy}{dt}=0$ هستند ،

ومقادیر t ی نظیربه نقاط تماس مماسهای عمودی‌ریشه‌های معادلهٔ $\frac{dx}{dt}=0$ میباشند .

مثال ۳- نقاط تماس مماسهای افقی و مماسهای عمودی به کار دیوئید زیر را پیدا کنید (شکل ۶۱ را ببینید) :

$$\left\{\begin{aligned} x&=a\ cos\ \theta-\frac{a}{2}\ cos\ 2\theta-\frac{a}{2} \\ y&=a\ sin\ \theta-\frac{a}{2}\ sin\ 2\theta \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

حل -

$$\frac{dx}{d\theta}=a(-sin\ \theta+sin\ 2\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=a(cos\ \theta-cos\ 2\theta)$$

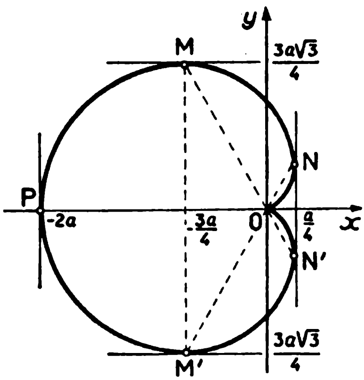
مماسهای افقی : $\quad cos\ \theta-cos\ 2\theta=0$

اگر دراین معادله بجای $cos\ 2\theta$ مقدار آن یعنی $2cos^2\theta-1$ را قرار دهیم و معادله را نسبت به θ حل کنیم ، °۲۴۰ و °۱۲۰ و $\theta=0°$ بدست میاید.

مماسهای عمودی : بنابر دستور مذکور باید ریشه‌های معادلهٔ $-sin\ \theta+sin\ 2\theta=0$ را پیدا کنیم . اگر بجای $sin\ 2\theta$ ، $2sin\ \theta\ cos\ \theta$ بگذاریم و معادله‌را نسبت به θ حل کنیم ، °۳۰۰ ، °۱۸۰ ، °۶۰ ، $\theta=0°$ بدست میاید.

ریشهٔ مشترک ۰ را کنار میگذاریم زیرا به ازای $\theta = ۰$ صورت و مخرج (A) هردو صفر میشوند و شیب نامعین است (شمارهٔ ۱۲ را ببینید). وقتی $\theta = ۰$ است، $x = y = ۰$ است و نقطهٔ O بنابر تعریف یک نقطهٔ بازگشت است.

کمی مطالعهٔ اضافی نشان میدهد که خم دراین نقطه به محورx ها مماس‌است. به ازای مقادیر دیگر θ داریم :



شکل ۶۱

نقاط تماس مماسهای افقی :

$$\left(-\frac{۳a}{٤}\ ,\ \pm\frac{۳a\sqrt{۳}}{٤}\right)$$

نقاط تماس مماسهای عمودی : $\left(\frac{a}{٤}\ ,\ \pm\frac{a\sqrt{۳}}{٤}\right)$ و $(-۲a\ ,\ ۰)$

دو مماس عمودی برهم منطبقند و یک «مماس دوگانه» تشکیل میدهند.

این نتایج در شکل ۶۱ دیده میشوند.

تمرین

معادلات مماس و قائم وطولهای تحت مماس و تحت قائم به خمهای زیر را درنقاط داده شده پیدا کنید :

۱) $x = t^{۲}$ ، $y = ۲t + ۱$ در نقطهٔ نظیر به $t = ۱$

جواب : معادلهٔ مماس $x - y + ۲ = ۰$ ، معادلهٔ قائم $x + y - ٤ = ۰$ ، طول تحت مماس ۳ ، طول تحت قائم ۳

۲) $x = t^{۳}$ ، $y = ۳t$ در نقطهٔ نظیر به $t = -۱$

جواب : معادلهٔ مماس $x - y - ۲ = ۰$ ، معادلهٔ قائم $x + y + ٤ = ۰$ ، طول تحت مماس ۳ − ، طول تحت قائم ۳ −

۳) $x=3t$ ، $y=\frac{2}{t}$ در نقطهٔ نظیر به $t=2$

جواب : معادلهٔ مماس $x+6y-12=0$ ، معادلهٔ قائم $6x-y-35=0$ ، طول تحت مماس -6 ، طول تحت قائم $-\frac{1}{6}$

٤) $x=e^{t}$ ، $y=3e^{-t}$ در نقطهٔ نظیر به $t=0$

جواب : معادلهٔ مماس $3x+y-6=0$ ، معادلهٔ قائم $x-3y+8=0$ ، طول تحت مماس -1 ، طول تحت قائم -9

٥) $x=\cos 2\theta$ ، $y=\sin\theta$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{6}$

٦) $x=t^{2}$ ، $y=2-t$ در نقطهٔ نظیر به $t=1$

۷) $3x=t^{3}$ ، $2y=t^{2}$ در نقطهٔ نظیر به $t=2$

۸) $x=6t-t^{2}$ ، $y=2t+3$ در نقطهٔ نظیر به $t=0$

۹) $x=t^{2}$ ، $y=t^{3}+3t$ در نقطهٔ نظیر به $t=1$

۱۰) $x=\frac{1}{t}$ ، $y=2t$ در نقطهٔ نظیر به $t=-1$

۱۱) $x=tg\,\theta$ ، $y=cotg\,\theta$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{4}$

۱۲) $x=-3e^{-t}$ ، $y=2e^{t}$ در نقطهٔ نظیر به $t=0$

۱۳) $x=3\cos\alpha$ ، $y=5\sin\alpha$ در نقطهٔ نظیر به $\alpha=\frac{\pi}{4}$

۱٤) $x=\sin 2\theta$ ، $y=\cos\theta$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{3}$

۱٥) $x=\ln(t-2)$ ، $3y=t$ در نقطهٔ نظیر به $t=3$

خمهای زیررا رسم کنید ونقاط تماس مماسهای افقی ومماسهای عمودی را پیدا نمایید :

۱٦) $x=3t-t^{3}$ ، $y=t+1$

جواب : این خم مماس افقی ندارد و مختصات نقاط تماس مماسهای عمودی آن عبارتند از $(2,2)$ و $(-2,0)$

۱۷) $x=3-4\sin\theta$ ، $y=4+3\cos\theta$

جواب : مختصات نقاط تماس مماسهای افقی عبارتند از $(3 , 1)$ و $(3 , 7)$ و مختصات نقاط تماس مماسهای عمودی عبارتند از $(7 , 4)$ و $(-1 , 4)$

۱۸) $x=t^2-2t$ ، $y=t^3-12t$

۱۹) $x=h+r\cos\theta$ ، $y=k+r\sin\theta$

۲۰) $x=\sin 2t$ ، $y=\sin t$

۲۱) $x=\cos^4\theta$ ، $y=\sin^4\theta$

در خمهای زیر (شکلهای آنها را در فصل ۲۶ ببینید) طول تحت مماس ، طول تحت قائم ، طول قطعهٔ مماس و طول قطعهٔ قائم را در نقطهٔ نظیر به $t=t_0$ بدست آورید :

۲۲)
$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$$

جواب : طول تحت مماس $y_0 \operatorname{cotg} t_0$ ، طول تحت قائم $y_0 \operatorname{tg} t_0$ ، طول قطعهٔ مماس $\dfrac{y_0}{\sin t_0}$ ، طول قطعهٔ قائم $\dfrac{y_0}{\cos t_0}$

۲۳) هیپوسیکلوئید (آستروئید)
$$\begin{cases} x=4a\cos^3 t \\ y=4a\sin^3 t \end{cases}$$

جواب : طول تحت مماس $-y_0 \operatorname{cotg} t_0$ ، طول تحت قائم $-y_0 \operatorname{tg} t_0$ ، طول قطعهٔ مماس $\dfrac{y_0}{\sin t_0}$ ، طول قطعهٔ قائم $\dfrac{y_0}{\cos t_0}$

۲۴) دایرهٔ
$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$$

۲۵) کاردیوئید
$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$$
(شکل ۶۱)

۲۶) فلیوم
$$\begin{cases} x=\dfrac{۳t}{۱+t^۳} \\ y=\dfrac{۳t^۲}{۱+t^۳} \end{cases}$$

۲۷) مارپیچ هذلولی
$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{t}\cos t \\ y=\dfrac{a}{t}\sin t \end{cases}$$

۸۲- معادلات پارامتری - مشتق دوم . - اگر مشتق اول y را نسبت به x ، y' بنامیم ، دستور (A) ی شمارهٔ ۸۱ ، y' را به صورت تابعی از t میدهد :

$$y'=h(t) \tag{۱}$$

اکنون به منظور محاسبهٔ y'' ، یعنی مشتق دوم y نسبت به x ، دستور (A) را بکار میبندیم و در آن بجای y ، y' را میگذاریم ، داریم :

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{h'(t)}{f'(t)} \tag{B}$$

زیرا $y'=h(t)$ و $x=f(t)$ است .

مثال - در سیکلوئید $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(۱-\cos\theta) \end{cases}$ ، مثال ۲ ی شمارهٔ قبل، y'' را حساب کنید .

حل -
$$y'=\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta} \quad , \quad \frac{dx}{d\theta}=a(۱-\cos\theta)$$

$$\frac{dy'}{d\theta}=\frac{(۱-\cos\theta)\cos\theta-\sin^۲\theta}{(۱-\cos\theta)^۲}=\frac{\cos\theta-۱}{(۱-\cos\theta)^۲}=-\frac{۱}{۱-\cos\theta}$$

و بنابر دستور (B)
$$y''=-\frac{۱}{a(۱-\cos\theta)^۲}$$

چون $a > 0$ است ، y'' همواره منفی است و از آنجا تقعر خم ، چنانکه در شکل ۶۰ دیده میشود ، همه‌جا بسمت پایین است .

تمرین

۱) درهریک از مثالهای زیر $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ را برحسب t پیدا کنید :

جواب

$$a \begin{cases} x=t-1 \\ y=t^2+1 \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx}=2t \;,\; \frac{d^2y}{dx^2}=2$$

$$b \begin{cases} x=\frac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{t} \;,\; \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{t^3}$$

$$c \begin{cases} x=2t \\ y=\frac{t^3}{3} \end{cases} \qquad d \begin{cases} x=\frac{t^3}{6} \\ y=\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$e \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \qquad f \begin{cases} x=2(1-\sin t) \\ y=4\cos t \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin 2t \end{cases} \qquad h \begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin t \end{cases}$$

۲) نشان دهید که خم $\begin{cases} x=\sec\theta \\ y=tg\,\theta \end{cases}$ نقطهٔ عطف ندارد .

۳) خم نمایش معادلات (الف) و خم نمایش معادلات (ب) را رسم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف آنها را پیدا نمایید :

$$(\text{الف}) \begin{cases} x=2a\,cotg\,\theta \\ y=2a\sin^2\theta \end{cases}$$

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $(2a\ ,\ 0)$ ، نقاط عطف $\left(\dfrac{3a}{2}\ ,\ \pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)$

(ب)
$$\begin{cases} x = tg\, t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$$

جواب : نقطهٔ ماکزیمم $\left(1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ ، نقطهٔ مینیمم $\left(-1\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ ،

نقاط عطف $\left(-\sqrt{3}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ، $(0\ ,\ 0)$ ، $\left(\sqrt{3}\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

۸۳- حرکت منحنی‌الخط - سرعت . - هرگاه در معادلات (۱) شمارهٔ ۸۱ ، پارامتر t زمان باشد و وقتی t بطور پیوسته تغییر کند ، توابع $f(t)$ و $\varphi(t)$ پیوسته باشند ، مسیر نقطهٔ $P(x\ ,\ y)$ یک خم است و بدین ترتیب حرکت نقطهٔ P یک **حرکت منحنی‌الخط** است و

$$x = f(t) \quad , \quad y = \varphi(t) \tag{1}$$

معادلات حرکت نامیده میشوند .

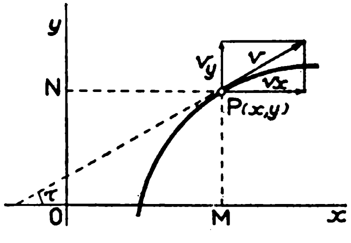
v ، سرعت نقطهٔ متحرك $P(x\ ,\ y)$ در هرلحظه بوسیلهٔ مؤلفه‌های افقی و عمودیش تعیین میشود .

v_x ، مؤلفهٔ افقی v ، سرعت تصویر P یعنی سرعت M در امتداد Ox ، و از آنجا سرعت تغییر x نسبت به زمان است . پس بنابر دستور (C) ی شمارهٔ ۵۱ ، وقتی بجای s ، x بگذاریم ، داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{C}$$

به همین ترتیب v_y ، مؤلفهٔ عمودی v یا سرعت تغییر y نسبت به زمان عبارتست از :

$$v_y = \frac{dy}{dt} \tag{D}$$



شکل ٦٢

از نقطهٔ P دو بردار همسنگ v_x و v_y رسم میکنیم (شکل ٦٢) ، مربع مستطیل را کامل مینماییم وقطرمار بر P را وصل میکنیم . این قطر همان $\vec{v}$ ، بردار سرعت است واندازه وامتداد آن

با دستورهای زیر تعیین میشود :

$$(E)\qquad v^2=v_x^2+v_y^2 \quad , \quad tg\,\tau=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

اگر این دستور را با دستور (A) ی شمارهٔ ۸۱ مقایسه کنیم ، می‌بینیم $tg\,\tau$ همان شیب خم مسیرنقطهٔ P است و از آنجا امتداد بردار سرعت همان امتداد مماس به خم مسیر در نقطهٔ P است . اندازهٔ بردار سرعت را **سرعت** مینامند .

۸٤ - حرکت منحنی الخط - مؤلفه‌های شتاب . - درکتابهای مکانیک نشان میدهند که در حرکت منحنی‌الخط بردار شتاب ، α ، برخلاف بردار سرعت در امتداد مماس‌نیست، بلکه بسمت تقعرمسیر است و میتوان‌آن‌رابه یک مؤلفهٔ مماسی α_t ویک مؤلفهٔ قائم α_n به صورت زیر تجزیه کرد :

$$\alpha_t=\frac{dv}{dt} \quad , \quad \alpha_n=\frac{v^2}{R}$$

(R شعاع انحنای خم مسیر است . شمارهٔ ۱۰۵ را ببینید) .

نیز میتوان‌شتاب را به مؤلفه‌های موازی محورهای مختصات تجزیه نمود. اگرهمان روشی‌را که برای مؤلفه‌های سرعت‌بکار بسته‌ایم ، بکار بندیم ، آن **مؤلفه‌های شتاب** که موازی محورهای Ox و Oy میباشند ، بدست میایند :

$$(F)\qquad \alpha_x=\frac{dv_x}{dt} \quad , \quad \alpha_y=\frac{dv_y}{dt}$$

اکنون اگر مربع مستطیلی‌بسازیم که یک‌رأس‌آن P ودو ضلع آن α_x و α_y باشند، قطر ماربر P همان α است و از آنجا

$$(G)\qquad \alpha=\sqrt{(\alpha_x)^2+(\alpha_y)^2}$$

این دستور اندازهٔ (همواره مثبت) بردار شتاب را در هرلحظه میدهد .

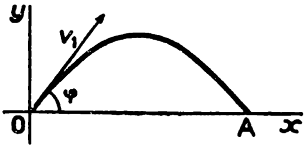
مسئلهٔ شمارهٔ ۱ زیرکه دربارهٔ حرکت یک‌گلوله است ، این شماره و شمارهٔ قبل را بخوبی روشن میسازد .

تمرین

۱) اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم ، معادلات حرکت گلوله عبارت میشوند از

$$x=v_1 \cos\varphi \cdot t \quad , \quad y=v_1 \sin\varphi \cdot t-\text{٤ر٩١}\, t^2$$

v_1 سرعت‌اولیه ، φ زاویهٔ پرتاب ، t زمان حرکت گلوله برحسب ثانیه و x و y برحسب مترند .



شکل ٦٣

مؤلفه های‌سرعت، مؤلفه های‌شتاب ، اندازهٔ سرعت‌واندازهٔ شتاب را ، وقتی v_1 برابر ۱۰۰ متر در ثانیه و φ=۳۰° است ، (الف) در لحظهٔ t_0 ، (ب) در پایان اولین ثانیهٔ پرتاب حساب کنید . (پ) امتداد حرکت را در پایان اولین ثانیه پیدا نمایید . (ت) معادلهٔ قائم مسیر را بدست آورید .

حل ـ بنابر دستورهای (C) و (D)

(الف)
$$v_x=v_1\cos\varphi$$
$$v_y=v_1\sin\varphi-\text{٩ر٨٢}\,t_0$$

و بنابر دستور(E)
$$v=\sqrt{v_1^2-\text{١٩ر٦٤}\,t_0 v_1 \sin\varphi+\text{٩٦ر٤٣}\,t_0^2}$$

بنابر دستورهای (F) و (G)
$$\alpha_x=\text{٠} \quad \text{و} \quad \alpha_y=-\text{٩ر٨٢}$$

$$\alpha=\text{٩ر٨٢} \quad \text{امتداد بسمت پایین}$$

(ب) اگر دراین روابط $t=\text{١}$ و $v_1=\text{١٠٠}$ و $\varphi=\text{٣٠}^\circ$ بگذاریم ، داریم :

$$v_x=\text{٨٦ر٦ متر در ثانیه} \quad , \quad \alpha_x=\text{٠}$$

$$v_y=\text{٤٠ر١٨ متر در ثانیه} \quad , \quad \alpha_y=-\text{٩ر٨٢}\ m/s^2$$

$$v=\text{٩٥ر٦ متر در ثانیه} \quad , \quad \alpha=\text{٩ر٨٢}\ m/s^2$$

(پ)
$$\tau=arc\ tg\,\frac{v_y}{v_x}=arc\ tg\,\frac{\text{٤٠ر١٨}}{\text{٨٦ر٦}}$$

$\tau = ۲٤° ۵۳'$ = زاویهٔ امتداد حرکت با افق

(ت) وقتی $v_1 = ۱۰۰\ m/s$ و $\varphi = ۳۰°$ است ، معادلات پارامتری حرکت عبارتند از :

$$x = ۵۰\sqrt{۳}\, t \quad , \quad y = ۵۰ t - ٤٫۹۱ t^2$$

t را بین این دو معادله حذف میکنیم ، معادلهٔ قائم مسیر که یک سهمی است بدست میاید :

$$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} x - \frac{۰٫۰٤۹۱}{۷۵} x^2$$

۲) نشان دهید که درمسئلهٔ قبل ، درحالت کلی، معادلهٔ قائم مسیربه صورت زیر است :

$$y = x\, tg\,\varphi - \frac{٤٫۹۱}{v_1^2}(۱ + tg^2\varphi)x^2$$

۳) سرعت اولیهٔ گلوله‌ای ۵۰ متر در ثانیه و زاویهٔ پرتاب آن ٤۵° است .
(الف) مؤلفه های‌سرعت‌آن‌را در پایان دومین و چهارمین ثانیه حساب کنید. (ب) سرعت و امتداد حرکت را در پایان دومین و چهارمین ثانیه تعیین نمایید .

جواب : (الف) درلحظهٔ $t = ۲$: $v_x = ۳۵٫۳۵\ m/s$ ، $v_y = ۱۵٫۷۱\ m/s$

در لحظهٔ $t = ٤$: $v_x = ۳۵٫۳۵\ m/s$ ، $v_y = -۳٫۹۳\ m/s$

(ب) درلحظهٔ $t = ۲$: $v = ۳۸٫٦۹ m/s$ ، $\tau = ۲۳° ۵۷'$

درلحظهٔ $t = ٤$: $v = ۳۵٫۵۵\ m/s$ ، $\tau = -٦° ۲۱'$

٤) در مسئلهٔ ۳ ، بلندترین ارتفاعی که گلوله به آن میرسد کدام است ؟ اگر سطح زمین افقی ومار بر نقطهٔ پرتاب باشد ، زمان سیر گلوله درهوا و زاویهٔ سقوط چقدر است؟

۵) گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ ۵۰ متر در ثانیه در صفحهٔ عمود به دیوار قائمی که در ۱۵۰ متری نقطهٔ عزیمت گلوله قرار دارد بسمت دیوار پرتاب میشود . نشان دهید که بلندترین نقطه‌ای ازاین دیوارکه میتواند مورد اصابت گلوله قرارگیرد ، به‌ارتفاع ۸۲٫۳ متر است . اندازهٔ زاویهٔ φی نظیر به این ارتفاع را پیدا کنید . جواب : $\varphi \# ۵۹°$

۶) مختصات قائم نقطهٔ متحرك $P(x, y)$ برحسب زمان عبارتند از :

$$x = a\cos t + b \quad , \quad y = a\sin t + c$$

نشان دهید که اندازهٔ سرعت نقطهٔ P مقدار ثابتی است .

۷) مسیر نقطهٔ متحرکی سینوسوئید $\begin{cases} x = at \\ y = b\sin at \end{cases}$ است . نشان دهید که (الف) اندازهٔ مؤلفهٔ سرعتی که موازی محور x هاست ، مقدار ثابتی است ، (ب) شتاب نقطه در هرلحظه متناسب با فاصلهٔ آن نقطه از محور x هاست .

۸) معادلات حرکت‌نقطه‌ای $x = t^2$ ، $y = (t-1)^2$ است . (الف) معادلهٔ قائم مسیر را پیدا کنید . (ب) منحنی مسیر و بردارهای سرعت و شتاب را در لحظات $t = \frac{1}{2}$ ، $t = 1$ و $t = 2$ رسم نمایید . (پ) درکدام لحظه سرعت ماکزیمم است . (ت) وقتی سرعت نقطهٔ متحرك ۱۰ متر درثانیه است ، نقطه درکجاست ؟

جواب : (الف) سهمی $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ ، (پ) $t = \frac{1}{2}$ ، (ت) (۹ , ۱۶)

۹) نشان دهید که درحرکت مستدیر یکنواخت (سرعت ثابت) بزرگی اندازهٔ شتاب در هرنقطهٔ مسیر ، P ، ثابت است ، امتداد آن امتداد شعاع ماربر نقطهٔ P و سوی آن بسمت مرکز دایره است.

۱۰) معادلات حرکت منحنی‌الخطی $x = 2\cos 2t$ ، $y = 3\cos t$ است .

(الف) نشان دهید که نقطهٔ متحرك روی قوسی از سهمی $4y^2 - 9x - 18 = 0$ نوسان میکند . خم مسیررا رسم کنید (ب) بردارهای شتاب‌را در نقطه‌هایی‌که درآنها $v = 0$ است، رسم کنید. (پ) بردار سرعت را درنقطه‌ای که در آن سرعت حداکثر است ، رسم نمایید.

درهریک ازحرکات منحنی‌الخط زیر ، درلحظهٔ داده شده ، v_x ، v_y ، α_x ، α_y ، α ، مختصات نقطهٔ متحرك و جهت حرکت را در دستگاه قائم بدست آورید :

۱۱) $x = t^2$ ، $y = 2t$ در نقطهٔ نظیر به $t = 2$

۱۲) $x = 2t$ ، $y = t^3$ در نقطهٔ نظیر به $t = 1$

۱۳) $x = t^3$ ، $y = t^2$ در نقطهٔ نظیر به $t = 2$

۱۴) $x=3t$ ، $y=t^2-3$ در نقطهٔ نظیر به $t=3$

۱۵) $x=2-t$ ، $y=1+t^2$ در نقطهٔ نظیر به $t=0$

۱۶) $x=a\cos t$ ، $y=a\sin t$ در نقطهٔ نظیر به $t=\frac{3\pi}{4}$

۱۷) $x=4\sin t$ ، $y=2\cos t$ در نقطهٔ نظیر به $t=\frac{\pi}{2}$

۱۸) $x=\sin 2t$ ، $y=2\cos t$ در نقطهٔ نظیر به $t=\frac{\pi}{2}$

۱۹) $x=2\sin t$ ، $y=\cos 2t$ در نقطهٔ نظیر به $t=\frac{\pi}{2}$

۲۰) $x=tg\, t$ ، $y=cotg\, t$ در نقطهٔ نظیر به $t=\frac{\pi}{4}$

۸۵- مختصات قطبی - زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس . - اگر معادلهٔ خمی در دستگاه قطبی

$$\rho=f(\theta) \qquad (1)$$

باشد ، نشان میدهیم که :

قضیه - اگر ψ زاویهٔ بین شعاع حامل OP و خط مماس در نقطهٔ P باشد ،

$$tg\,\psi=\frac{\rho}{\rho'} \qquad (H)$$

است $\left(\rho'=\frac{d\rho}{d\theta}\right)$.

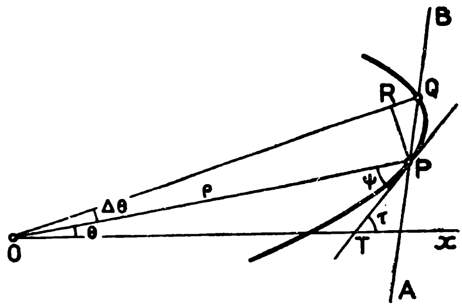
اثبات - خط قاطع ماربر P و نقطهٔ $Q(\rho+\Delta\rho \,,\, \theta+\Delta\theta)$ را که به فاصلهٔ کمی از نقطهٔ P روی خم قرار دارد ، رسم میکنیم و سپس PR را بر OQ عمود مینماییم . در این صورت :

$$OQ=\rho+\Delta\rho \quad , \quad \widehat{POQ}=\Delta\theta$$

$$PR=\rho\sin\Delta\theta \quad , \quad OR=\rho\cos\Delta\theta$$

ولذا
$$tg\,PQR=\frac{PR}{RQ}=\frac{PR}{OQ-OR}=\frac{\rho\,sin\,\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\,cos\,\Delta\theta} \qquad (۲)$$

زاویهٔ بین شعاع حامل OP و خط مماس PT را ψ مینامیم. اگر $\Delta\theta$ را بسمت صفر میل دهیم:



شکل ٦٤

(الف) نقطهٔ Q بسمت نقطهٔ P میل میکند و برآن منطبق میشود،

(ب) خط قاطع PQ حول نقطهٔ P میچرخد و درحد به صورت خط مماس PT در میاید،

(پ) زاویهٔ PQR بسمت حدش ψ میل میکند.

بنابراین
$$tg\,\psi=\lim_{\Delta\theta\to ۰}\frac{\rho\,sin\,\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\,cos\,\Delta\theta} \qquad (۳)$$

این کسر را کمی تغییر شکل میدهیم تا بتوانیم قضایای شمارهٔ ۱٦ را بکار ببریم.

$$\frac{\rho\,sin\,\Delta\theta}{\rho(۱-cos\,\Delta\theta)+\Delta\rho}=\frac{\rho\,sin\,\Delta\theta}{۲\rho\,sin^{۲}\frac{\Delta\theta}{۲}+\Delta\rho}$$

زیرا $\rho-\rho cos\,\Delta\theta=\rho(۱-cos\,\Delta\theta)=۲\rho\,sin^{۲}\frac{\Delta\theta}{۲}$ است.

صورت و مخرج را بر $\Delta\theta$ تقسیم میکنیم و فاکتور میگیریم:

$$\dots = \frac{\rho \cdot \dfrac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho \sin \dfrac{\Delta\theta}{۲} \cdot \dfrac{\sin \dfrac{\Delta\theta}{۲}}{\dfrac{\Delta\theta}{۲}} + \dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

وقتی $\Delta\theta \to ۰$ ، بنابر شمارهٔ ۶۸

$$\lim \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} = ۱ \quad و \quad \lim \frac{\sin \dfrac{\Delta\theta}{۲}}{\dfrac{\Delta\theta}{۲}} = ۱$$

و نیز

$$\lim \sin \frac{\Delta\theta}{۲} = ۰ \quad و \quad \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$$

بدین ترتیب حد صورت ρ و حد مخرج ρ' و لذا دستور (H) محقق است .

برای بدست آوردن شیب ($tg\,\tau$ درشکل ۶۴) ، محورهای قائم Ox و Oy را درنظر میگیریم . بین مختصات قائم و قطبی نقطهٔ $P(x , y)$ روابط

$$x = \rho \cos\theta \quad , \quad y = \rho \sin\theta \tag{۴}$$

برقرار است . اگر دراین معادلات بجای ρ مقدار آن‌را از رابطهٔ (۱) قرار دهیم ، معادلات پارامتری خم ، با پارامتر θ ، بدست میاید ومیتوان شیب خم را با دستور (A) تعیین کرد . اگر از دو طرف روابط (۴) نسبت به θ مشتق بگیریم :

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta$$

و از آنجا

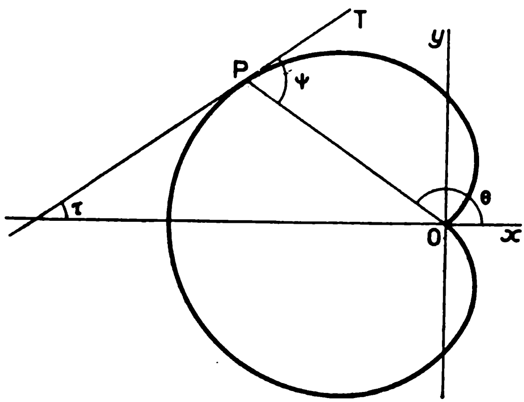
$$\text{شیب خط مماس} = tg\,\tau = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta} \tag{I}$$

صحت دستور (I) را میتوان با توجه به شکل ۶۴ بآسانی آزمورد . از مثلث OPT رابطهٔ $\tau = \theta + \psi$ نتیجه میشود و از رابطهٔ اخیر

$$tg\ \tau = tg(\theta+\psi) = \frac{tg\ \theta + tg\ \psi}{۱ - tg\ \theta\ tg\ \psi}$$

بدست میاید که اگر $tg\ \theta = \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}$ و $tg\ \psi = \frac{\rho}{\rho'}$ قرار دهیم و مختصر کنیم ، همان دستور (I) حاصل میشود .

مثال ۱- $tg\ \psi$ و شیب کار دیوئید $\rho = a(۱ - cos\ \theta)$ را پیدا کنید .



شکل ٦٥

حل- $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho' = a\ sin\ \theta$

این مقدار رادر دستورهای (H) و (I) میگذاریم :

$$tg\ \psi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(۱ - cos\ \theta)}{a\ sin\ \theta} = \frac{۲a\ sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}{۲a\ sin\frac{\theta}{۲}\ cos\frac{\theta}{۲}} = tg\ \frac{\theta}{۲}$$

$$tg\ \tau = \frac{a\ sin^{۲}\theta + a(۱ - cos\ \theta)cos\ \theta}{a\ sin\ \theta\ cos\ \theta - a(۱ - cos\ \theta)sin\ \theta}$$

$$= \frac{cos\ \theta - cos\ ۲\theta}{sin\ ۲\theta - sin\ \theta} = tg\ \frac{۳\theta}{۲}$$

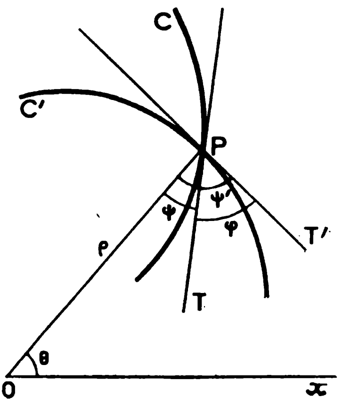
در نقطهٔ P (شکل ٦٥)
$$\psi=\widehat{OPT}=\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{۲}\widehat{xOP}$$

زاویه‌ای که خط مماس PT با محورOx میسازد τ است و

$$\widehat{xOP}=۱۸۰^{\circ}-\widehat{OPT}+\tau$$

پس
$$tg\,\tau=tg\frac{۳\theta}{۲} \quad و \quad \tau=\frac{۳\theta}{۲}-۱۸۰^{\circ}$$

یادداشت - دستور (H) را با توجه به شکل ٦٤ بدست آوردیم . برای بدست آوردن روابط بین زاویه های ψ ، τ و θ باید درهرمسئله به علامتهای خطوط مثلثاتی آنها و به شکل خم توجه و دقت نمود .



شکل ٦٦

برای پیدا کردن زاویهٔ φ ، یعنی **زاویهٔ تقاطع دو خم** C و C' که معادلات آنها در دستگاه مختصات قطبی در دست است ، مینویسیم (شکل ٦٦) :

$$\widehat{TPT'}=\widehat{OPT'}-\widehat{OPT} \implies \varphi=\psi'-\psi$$

بنابراین
$$tg\,\varphi=\frac{tg\,\psi'-tg\,\psi}{۱+tg\,\psi' tg\,\psi} \qquad (J)$$

دو مقدار $tg\,\psi'$ و $tg\,\psi$ را باید بادستور (H) ازمعادلات دو خم C' و C برای نقطهٔ تقاطع حساب کرد و در دستور اخیر قرار داد .

مثال ۲- زاویهٔ تقاطع دو خم $\rho=a\,sin\,۲\theta$ و $\rho=a\,cos\,۲\theta$ را پیدا کنید .

حل - اگر دو معادله را همزمان فرض کنیم و حل نماییم ، در نقطهٔ تقاطع

$$tg\,۲\theta=۱ \implies ۲\theta=٤۵^{\circ} \implies \theta=۲۲^{\circ}\,۳۰'$$

است . دستور (H) در خم اول

$$tg\ \psi' = \frac{۱}{۲}\ tg\ ۲\theta = \frac{۱}{۲}$$

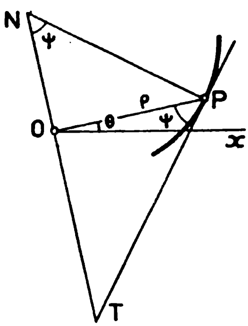
و در خم دوم
$$tg\ \psi = -\frac{۱}{۲}\ cotg\ ۲\theta = -\frac{۱}{۲}$$

را میدهد . این مقادیر را در دستور (J) میگذاریم :

$$tg\ \varphi = \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{٤}} = \frac{٤}{۳} \quad ==> \quad \varphi = arc\ tg\ \frac{٤}{۳}$$

(شکل این خمها را در فصل ۲٦ ببینید) .

۸٦- طول تحت مماس و طول تحت قائم در دستگاه مختصات قطبی . -



شکل ٦۷

خط راست NT را ماربر مبدأ مختصات و عمود بر شعاع حامل نقطهٔ P رسم میکنیم (شکل ٦۷) . اگر PT خط مماس و PN خط قائم به خم در نقطهٔ P باشد ، بنابر تعریف

OT = [**طول تحت مماس قطبی** درنقطهٔ P]

و

ON = [**طول تحت قائم قطبی** درنقطهٔ P]

است . در مثلث OPT ، $tg\ \psi = \frac{OT}{\rho}$ است و از آنجا

$$(۱) \qquad OT = \rho\ tg\ \psi = \rho^۲ \frac{d\theta}{d\rho} = \text{* طول تحت مماس قطبی}$$

* وقتی θ با ρ صعود میکند ، $\frac{d\theta}{d\rho}$ مثبت و ψ زاویه‌ای حاده است (مانند شکل ٦۷) . دراین صورت تحت مماس OT مثبت است و اگر بیننده‌ای در O بایستد و در امتداد OP نگاه کند ، OT در طرف راستش قرار میگیرد . وقتی $\frac{d\theta}{d\rho}$ منفی است ، تحت مماس منفی و در طرف چپ بیننده است .

در مثلث OPN ، $tg\,\psi = \frac{\rho}{ON}$ است و از آنجا

$$\text{طول تحت قائم قطبی} = ON = \frac{\rho}{tg\,\psi} = \frac{d\rho}{d\theta} \qquad (۲)$$

طول قطعهٔ مماس قطبی (PT) **وطول قطعهٔ قائم قطبی** (PN) را میتوان ازروی شکل بدست آورد. بدین منظور باید هریک از آنها را وتر یک مثلث قائم الزاویه درنظر گرفت.

مثال - طول تحت مماس و طول تحت قائم قطبی لمنیسکات $\rho^{۲} = a^{۲} cos\ ۲\theta$ را پیدا کنید (شکل خم را در فصل ۲٦ ببینید).

حل - از دو طرف معادلهٔ خم که به صورت یک تابع ضمنی است، نسبت به θ مشتق میگیریم :

$$۲\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -۲a^{۲} sin\ ۲\theta$$

یا

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^{۲} sin\ ۲\theta}{\rho}$$

این مقدار را در دستورهای (۱) و (۲) میگذاریم :

$$\text{طول تحت مماس قطبی} = -\frac{\rho^{۳}}{a^{۲} sin\ ۲\theta}$$

$$\text{طول تحت قائم قطبی} = -\frac{a^{۲} sin\ ۲\theta}{\rho}$$

اگر بخواهیم این نتایج به صورت تابعی از θ باشند، کافی است ρ را از معادلهٔ خم برحسب θ بدست آوریم و دراین دو کسر بگذاریم. مثلاً دراین مسئله $\rho = \pm a \sqrt{cos\ ۲\theta}$ و طول تحت مماس قطبی $\pm a\ cotg\ ۲\theta \sqrt{cos\ ۲\theta}$ است.

تمرین

۱) در دایرهٔ $\rho = a\ sin\ \theta$ ، ψ و τ را به صورت تابعی از θ پیدا کنید.

جواب : $\psi = \theta$ و $\tau = ۲\theta$

۲) نشان دهید که درسهمی $\rho=a\,sec^{۲}\frac{\theta}{۲}$ ، $\tau+\psi=\pi$ است .

۳) نشان دهید که در مارپیچ لگاریتمی $\rho=e^{a\theta}$ ، ψ مقدار ثابتی است (چون خط مماس به خم با شعاع حامل همواره زاویهٔ ثابتی میسازد ، این خم را «مارپیچ بازاویهٔ ثابت» نیز مینامند . شکل خم را در فصل ۲۶ ببینید) .

٤) نشان دهید که در مارپیچ ارشمیدس $\rho=a\theta$ ، $tg\,\psi=\theta$ است . مقادیر ψ را وقتی θ برابر ۲π و ٤π است ، پیدا کنید (شکل خم را در فصل ۲٦ ببینید) .

جواب : $\psi=۸۰^{\circ}\,۵۷'$ و $۸۵^{\circ}\,۲۷'$

شیب خمهای زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید :

٥) $\rho=a(۱-cos\,\theta)$ درنقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{۲}$ جواب : -۱

٦) $\rho=a\,sec^{۲}\theta$ در نقطهٔ نظیر به $\rho=۲a$ — ۳

۷) $\rho=a\,sin\,٤\theta$ درمبدأ مختصات — $۰,۱,\infty,-۱$

۸) $\rho^{۲}=a^{۲}sin\,٤\theta$ در مبدأ مختصات — $۰,۱,\infty,-۱$

۹) $\rho=a\,sin\,۳\theta$ درمبدأ مختصات — $۰,\sqrt{۳},-\sqrt{۳}$

۱۰) $\rho=a\,cos\,۳\theta$ در مبدأ مختصات

۱۱) $\rho=a\,cos\,۲\theta$ درمبدأ مختصات

۱۲) $\rho=a\,sin\,۲\theta$ درنقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{٤}$

۱۳) $\rho=a\,sin\,۳\theta$ درنقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{٦}$

۱٤) $\rho=a\theta$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{۲}$

۱٥) $\rho\theta=a$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=\frac{\pi}{۲}$

۱٦) $\rho=e^{\theta}$ در نقطهٔ نظیر به $\theta=۰$

زاویهٔ تقاطع هرزوج خم زیر را حساب کنید :

۱۷) $\rho \cos\theta = 2a$ ، $\rho = 5a \sin\theta$ جواب : $arc\ tg \frac{3}{4}$

۱۸) $\rho = a \sin\theta$ ، $\rho = a \sin 2\theta$ در مبدأ مختصات 0° و در دو نقطهٔ دیگر $arc\ tg\, 3\sqrt{3}$

۱۹) $\rho \sin\theta = 2a$ ، $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ 45°

۲۰) $\rho = 4\cos\theta$ ، $\rho = 4(1 - \cos\theta)$ 60°

۲۱) $\rho = 6\cos\theta$ ، $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ 30°

۲۲) $\rho = \sin\theta$ ، $\rho = \cos 2\theta$ 0° و $arc\ tg \frac{3\sqrt{3}}{5}$

۲۳) $\rho^2 \sin 2\theta = 4$ ، $\rho^2 = 16 \sin 2\theta$ 60°

۲۴) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ ، $\rho = b(1 - \cos\theta)$

۲۵) $\rho = \sin 2\theta$ ، $\rho = \cos 2\theta + 1$

۲۶) $\rho^2 \sin 2\theta = 8$ ، $\rho = 2\sec\theta$

نشان دهید که هرزوج خم زیر در نقاط تقاطعشان به یکدیگر عمودند :

۲۷) $\rho = 2\sin\theta$ ، $\rho = 2\cos\theta$

۲۸) $\rho = a\theta$ ، $\rho\theta = a$

۲۹) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ ، $\rho = a(1 - \cos\theta)$

۳۰) $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$ ، $\rho^2 \cos 2\theta = b^2$

۳۱) $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ ، $\rho = b\, cosec^2 \frac{\theta}{2}$

۳۲) در مارپیچ ارشمیدس $\rho = a\theta$ طول تحت مماس ، طول تحت قائم ، طول قطعهٔ مماس و طول قطعهٔ قائم قطبی را پیدا کنید .

جواب : طول تحت مماس $= \frac{\rho^{۲}}{a}$ ، طول تحت قائم $= a$

طول قطعهٔ مماس $= \frac{\rho}{a}\sqrt{a^{۲}+\rho^{۲}}$ ، طول قطعهٔ قائم $= \sqrt{a^{۲}+\rho^{۲}}$

چنانکه دیده میشود طول تحت قائم مقدار ثابتی است .

۲۳) درمارپیچ لگاریتمی $\rho = a^{\theta}$ طول تحت مماس ، طول‌تحت‌قائم ، طول‌قطعهٔ مماس و طول قطعهٔ قائم قطبی را پیدا کنید .

جواب : طول تحت مماس $= \frac{\rho}{ln\ a}$ ، طول تحت قائم $= \rho\ ln\ a$

طول قطعهٔ مماس $= \rho\sqrt{۱+\frac{۱}{ln^{۲}a}}$ ، طول قطعهٔ قائم $= \rho\sqrt{۱+ln^{۲}a}$

۲۴) نشان دهید که درمارپیچ معکوس $\rho\theta = a$ طول تحت مماس قطبی مقدار ثابتی است .

۸۷- ریشه‌های حقیقی معادلات - روشهای ترسیمی . - هرمقدار x را که در معادلهٔ

$$f(x) = ۰ \tag{۱}$$

صدق کند ، ریشهٔ این معادله [یا ریشهٔ f(x)] مینامند . ریشه‌های معادلهٔ (۱) اعدادی حقیقی یا موهومی (مختلط) میباشند . دراینجا چند روش برای بدست آوردن مقادیر تقریبی ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) بیان میکنیم .

تعداد ریشه‌ها و تعیین مکان آنها . - روش نخست . - اگر خم نمایش تابع

$$y = f(x) \tag{۲}$$

را به طریق مذکور در شمارهٔ ۵۸ رسم کنیم ، طول نقاط تقاطع آن با محور x ها ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) است و شکل خم تعداد ریشه‌های حقیقی و مقادیر تقریبی آنها را بدست میدهد .

مثال - مکان ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

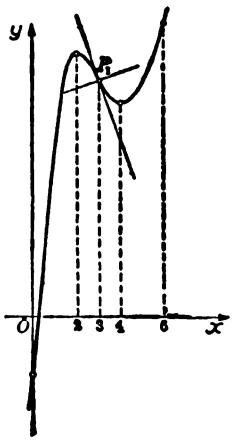
$$x^{۳}-۹x^{۲}+۲۴x-۷=۰ \qquad (۳)$$

را تعیین کنید .

حل - شکل خم در تمرین ۱ شمارهٔ ۵۸ رسم شده است و چنانکه دیده میشود محور x ها را بین ۰ و ۱ قطع میکند (شکل ۶۸) ، پس معادلهٔ (۳) یک ریشهٔ حقیقی بین ۰ و ۱ دارد و ریشهٔ حقیقی دیگری ندارد .

جدول مقابل نیز مختلف العلامه بودن f(۰) و f(۱) را نشان میدهد .

x	f(x)
۰	—۷
۱	۹



شکل ۶۸

x	y
a	f(a)
x_0	$f(x_0)=۰$
b	f(b)

گاهی ممکن است جدولی که شامل مقادیر نظیر x و y [برای تابع y=f(x)] است ، یک یا چند ریشهٔ دقیق معادله را بدست دهد و آن وقتی است که در مقابل یک یا چند مقدار x مقدار y صفر باشد. بطور کلی اگر برای دو مقدار متوالی x ، مثلاً x=a و x=b ، دو مقدار مختلف العلامه برای y بدست آید ، نقاط نظیر به آن مقادیر ، یعنی P[a , f(a)] و Q[b , f(b)] ، در دوطرف محور x ها واقعند و آن قطعه از خم نمایش (۲) که این دو نقطه را به یکدیگر وصل میکند ، محور x ها را قطع مینماید . بدین ترتیب بین a و b یک ریشهٔ حقیقی مانند x_0 وجود دارد .

بیان دقیق مطلب مذکور چنین است :

اگر تابع پیوستهٔ f(x) در فاصلهٔ a < x < b تغییر علامت دهد ، بدون آنکه علامت مشتق آن تغییر کند ، معادلهٔ f(x) = ۰ در بین a و b یک ریشه و تنها یک ریشه دارد .

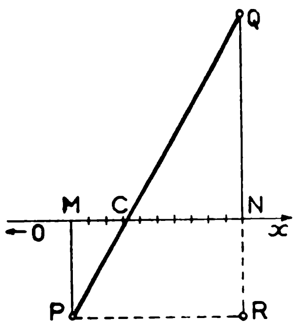
روش سادهٔ تعیین مکان ریشه ها برهمین قضیه متکی است. اگر تفاضل دوعدد a و b زیاد نباشد ، میتوان مقدار دقیقتر ریشه را با انترپلاسیون خطی بدست آورد . بدین منظور وتر PQ را در این فاصله جانشین خم میکنیم و محل تقاطع آنرا با محور x ها پیدا مینماییم .

مثال (دنبالهٔ مثال قبل) - جدول مقابل نشان‌میدهد که ریشهٔ بین ۰ و ۱ را میتوان بطور دقیقتر با دوعدد ۰٫۳ و ۰٫۴ جدا کرد . مقدار این ریشه را $z+$۰٫۳ فرض میکنیم و دستور انترپلاسیون خطی را بکار میبندیم :

$f(x)=y$	x
۱٫۲۲۴	۰٫۴
	$z+$۰٫۳ (ریشه)
۰٫۵۸۳ —	۰٫۳
۱٫۸۰۷	۰٫۱ اختلاف

$$\frac{z}{0.1}=\frac{0.583}{1.807} \implies z=0.032$$

$x=$۰٫۳۳۲ مقدار تقریبی ثانوی (دقیقتر) ریشه بدست میاید . این نقطه محل تقاطع محور x ها با خط مستقیمی است که نقاط Q (۰٫۴ , ۱٫۲۲۴) و P (۰٫۳ , ۰٫۵۸۳ —) را ، که روی خم نمایش (۳) قرار دارند ، به یکدیگر وصل میکند ، درشکل ۶۹، $MP=$ ۰٫۵۸۳ — و $NQ=$ ۱٫۲۲۴ وطول نقاط M و N بترتیب ۰٫۳ و ۰٫۴ است. بدین ترتیب $MC=z$ است واز تشابه دومثلث MPC و RQP تناسب بالا بدست میاید و z را میدهد .



شکل ۶۹

برای معادلات جبری مانند (۳) روش هرنر* که درکتابهای جبر مذکور است ، بهترین راه برای یافتن مقدار یک ریشه باتقریب دلخواه است .

۸۸ - دومین روش تعیین مکان ریشه های حقیقی . - در شمارهٔ ۸۰ روش مناسبی بـرای رسم سریع خم نمایش تابعی مانند $y=f(x)$ بیان شده است و خم نمایش تابع $y=f(x)$ تعداد ریشه های معادلهٔ $f(x)=0$ و مقدار تقریبی آنها را میدهد . در بسیاری از حالات میتوان همین نتیجه را با استفاده از رسم خمهای متقاطع سریعتر بدست آورد . مثال زیر نمونه‌ای ازاین روش است .

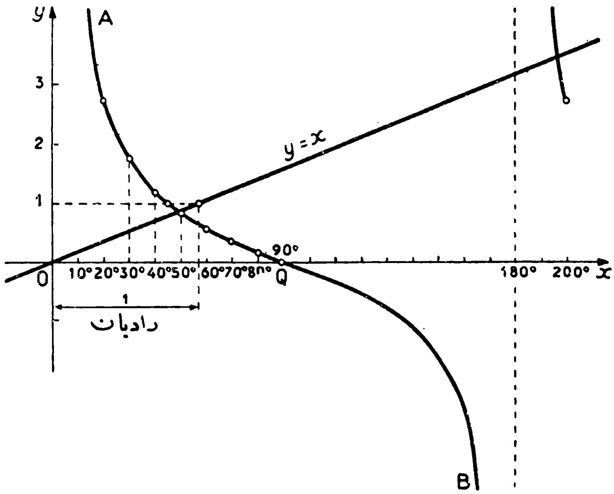
مثال - تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$\cot g\, x - x = 0 \qquad (1)$$

ومقدار تقریبی کوچکترین ریشهٔ آن را بدست آورید (x برحسب رادیان است) .

* Horner

حل - معادلهٔ (۱) را میتوان به صورت زیر نوشت :



شکل ۷۰

$$cotg\, x = x \qquad (۲)$$

اگر دریک دستگاه مختصات دوخم

$$y = cotg\, x$$
$$(۳)$$
و
$$y = x$$

را رسم کنیم، طولهای نقاط تقاطع آنها ریشه های معادلهٔ (۱) میباشند ، زیرا اگر دستگاه معادلات (۳) را درنظربگیریم و y را بین آنها حذف کنیم، معادلهٔ (۱) بدست میاید و روشن است که طولهای نقاط تقاطع دستگاه (۳) همان ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند .

به منظور دقت کافی خوب است که روی محور x ها هردو مقیاس درجه و رادیان گذاشته شود .

تعداد ریشه‌ها - خم نمایش $y = cotg\, x$ شامل بینهایت شاخه است که از انتقال شاخهٔ AQB بدست میاید (شمارهٔ ۷۰ را ببینید) . خط مستقیم $y = x$ هریک از این شاخه‌ها را یک‌بار میبرد وبدین ترتیب

$y = cotg\, x$		
y	x رادیان	x درجه
∞	۰	۰
۵٫۶۷	۰٫۱۷۵	۱۰
۲٫۷۵	۰٫۳۴۹	۲۰
۱٫۷۳	۰٫۵۲۴	۳۰
۱٫۱۹	۰٫۶۹۸	۴۰
۱٫۰۰۰	۰٫۷۸۵	۴۵
۰٫۸۳۹	۰٫۸۷۳	۵۰
۰٫۵۷۷	۱٫۰۴۷	۶۰
۰٫۳۶۴	۱٫۲۲۲	۷۰
۰٫۱۷۶	۱٫۳۹۶	۸۰
۰٫۰	۱٫۵۷۱	۹۰

معادلهٔ (۱) دارای بینهایت جواب است .

اگر ازجدولی که تبدیل درجه به رادیان را شامل است و مقادیر طبیعی کتانژانت

x درجه	x رادیان	$cotg\,x$	$cotg\,x - x$
۵۰	۰٫۸۷۳ ریشه	۰٫۸۳۹	—۰٫۰۳٤
٤۹	۰٫۸۵۵	۰٫۸٦۹	—۰٫۰۱٤
اختلاف	۰٫۰۱۸		—۰٫۰٤۸

زوایا را میدهد ، استفاده کنیم ، جدولی بدست میاید که جای کوچکترین ریشه را دقیقتراز شکل تعیین میکند و انترپلاسیون مقدار تقریبی کوچکترین ریشه را ، $x = ۰٫۸٦۰$ ، بدست میدهد .

روش دوم را میتوان به‌صورت زیر خلاصه کرد :

بعضی ازجملات $f(x) = ۰$ را انتخاب میکنیم و به طرف راست میبریم تا معادلهٔ

داده شده به‌صورت $$f_۱(x) = f_۲(x) \qquad (٤)$$

درآید . سپس خمهای $$y = f_۱(x) \text{ و } y = f_۲(x) \qquad (۵)$$

را دریک دستگاه مختصات ، باواحدهای مناسب ودرصورت لزوم نامساوی ، رسم‌میکنیم . عدهٔ نقاط تقاطع این‌دوخم برابرتعداد ریشه‌های‌حقیقی معادلهٔ $f(x) = ۰$ است وطولهای‌نقاط تقاطع ، مقادیر ریشه‌های این معادله‌اند .

اغلب میتوان جملات معادلهٔ $f(x) = ۰$ را طوری دسته‌بندی کرد و به صورت (٤) درآورد که یک یا هردوطرف آن ازخمهای شناخته شده باشد .

مثلاً برای تعیین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$x^۳ + ٤x - ۵ = ۰$$

میتوان نوشت : $$x^۳ = ۵ - ٤x$$

خمهای (۵) دراینجا خمهای شناخته شدهٔ

$$y=x^{۳} \quad \text{و} \quad y=۵-۴x$$

میباشند . اولی یک سهمی درجهٔ سوم و دومی یک خط مستقیم است .

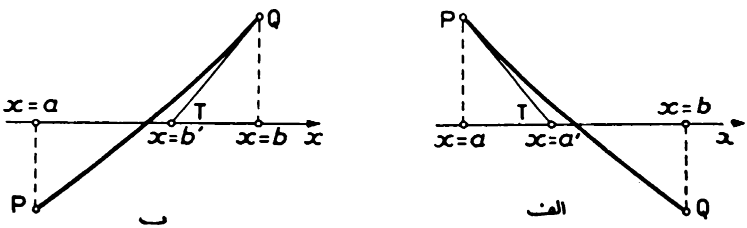
مثال دیگر ـ اگر $۲\ sin\ ۲x+۱-x^{۲}=۰$ باشد ، میتوان نوشت :

$$sin\ ۲x=\frac{۱}{۲}\ (x^{۲}-۱)$$

یکی ازخمهای (۵) سینوسوئید $y=sin\ ۲x$

ودیگری سهمی $y=\frac{۱}{۲}\ (x^{۲}-۱)$ است.

۸۹ـ روش نیوتن.ـ با روش نیوتن میتوان مقدار تقریبی یک ریشهٔ جدا شده را حساب کرد .



شکل ۷۱

شکلهای ۷۱ دونقطهٔ

$$P[a\ ,\ f(a)] \quad \text{و} \quad Q[b\ ,\ f(b)]$$

از خم را که در دوطرف محور x ها واقعند ، نشان میدهند . اگر PT خط مماس به خم درنقطهٔ P (شکل الف) باشد ، طول نقطهٔ T ، محل تقاطع مماس PT با محور x ها ، یک مقدار تقریبی ریشه است . روش نیوتن محل تقاطع مماس PT بامحور x ها را بدست میدهد .

مختصات P ، $x_{۱}=a$ و $y_{۱}=f(a)$ ، شیب‌خط PT ، $m_{۱}=f'(a)$ ولذامعادلهٔ خط مماس به خم درنقطهٔ P

[شمارهٔ ۴۲ ، (۱)] $$y-f(a)=f'(a)(x-a) \qquad (۱)$$

است. اگر بجای y صفر بگذاریم ، معادله‌را نسبت به x حل کنیم ومقداری راکه برای x پیدا میشود 'a بنامیم ، دستور نیوتن بدست میاید :

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (K)$$

پس ازتعیین 'a ، درطرف راست رابطهٔ (K) بجای a ، 'a میگذاریم :

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}$$

"a مقدار تقریبی ثانوی ریشه است . اگر این عمل‌را تکرار کنیم ، دنبالهٔ اعداد

$$a\ ,\ a'\ ,\ a''\ ,\ a'''\ ,\ \cdots\cdot$$

که بسمت مقدار دقیق ریشه میل میکند ، حاصل میگردد .

روشن است که خط مماس به خم درنقطهٔ Q را نیز میتوان رسم کرد (شکل ب) . دراین‌صورت باید دردستور (K) بجای a ، b گذاشت و 'b ، "b وغیره را پیدا کرد. دنبالهٔ اعداد

$$b\ ,\ b'\ ,\ b''\ ,\ b'''\ ,\ \cdots\cdot$$

نیز بسمت مقدار دقیق ریشه میل مینماید .

مثال - کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ $cotg\ x - x = ۰$ را باروش نیوتن حساب کنید.

حل - دراین مسئله $f(x) = cotg\ x - x$

وازآنجا $f'(x) = -cosec^۲ x - ۱ = -۲ - cotg^۲ x$ است .

بنابر محاسبه‌ای که در مثال شمارهٔ ۸۸ شده است ، a را ۰٫۸۵۵ میگیریم . بنا بر جدول شمارهٔ ۸۸

$$f(a) = ۰٫۰۱۴$$

و

$$f'(a) = -۲ - (۰٫۸۶۹)^۲ = -۲٫۷۶$$

این مقادیر را در دستور (K) قرار میدهیم :

جواب : $a' = ۰٫۸۵۵ + \frac{۰٫۰۱۴}{۲٫۷۶} = ۰٫۸۶۰$

اگر در دستور (K) مقدار $b = ۰٫۸۷۳$ را بگذاریم :

$$b' = ۰ر۸۷۳ - \frac{۰ر۰۳۴}{۲ر۷۰۴} = ۰ر۸۶۱$$

انترپلاسیون خطی نیز مقدار $x = ۰ر۸۶۰$ را داده است (صفحهٔ ۲۱۱) . هریک ازاین نتایج تا سه رقم اعشار دقیق است .

چنانکه درشکل ۷۱ می‌بینیم ، پاره خم موردنظر محور x ها را بین خط مماس درنقطهٔ P و وتر PQ قطع میکند . **پس مقدار دقیق ریشه بین دوعددی است که باروش نیوتن و انترپلاسیون بدست میایند** . این حکم وقتی صحیح است که معادلهٔ $f''(x) = ۰$ در بین a و b ریشه نداشته باشد (یعنی پاره خم PQ شامل نقطهٔ عطف نباشد) .

تمرین

درهریک ازمعادلات زیر تعداد ریشه‌ها ومقدار تقریبی آنها را با ترسیم بدست آورید وهر ریشه را تا دو رقم اعشار حساب کنید :

	معادله	جواب :
۱)	$x^۳ + ۲x - ۸ = ۰$	۱ر۶۷
۲)	$x^۳ - ۴x + ۲ = ۰$	۱ر۶۷ , ۰ر۵۴ , −۲ر۲۱
۳)	$x^۳ - ۸x - ۵ = ۰$	۳ر۱۰ , −۰ر۶۶ , −۲ر۴۴
۴)	$x^۳ - ۳x - ۱ = ۰$	۱ر۸۸ , −۰ر۳۵ , −۱ر۵۳
۵)	$x^۳ - ۳x^۲ + ۳ = ۰$	۲ر۵۳ , ۱ر۳۵ , −۰ر۸۸
۶)	$x^۳ + ۳x^۲ - ۱۰ = ۰$	۱ر۴۹
۷)	$x^۳ - ۳x^۲ - ۴x + ۷ = ۰$	۳ر۵۷ , ۱ر۱۴ , −۱ر۷۱
۸)	$x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۸ = ۰$	۲ر۱۲ , −۱ر۳۶ , −۲ر۷۶
۹)	$۲x^۳ - ۱۴x^۲ + ۲x + ۵ = ۰$	۶ر۸۰ , ۰ر۷۱ , −۰ر۵۱
۱۰)	$x^۴ + ۸x - ۱۲ = ۰$	۱ر۲۲ , −۲ر۳۶
۱۱)	$x^۴ - ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۲۰x + ۹ = ۰$	۴ر۱۶ , ۲ر۴۱ , −۰ر۴۱ , −۲ر۱۶
۱۲)	$x^۴ + ۴x^۳ - ۶x^۲ - ۲۰x - ۲۳ = ۰$	۲ر۶۰ , −۴ر۶۰

درهریک ازمعادلات زیر تعداد ریشه‌های حقیقی را باترسیم تعیین نمایید ومقدارتقریبی کوچکترین ریشهٔ غیر صفر را نخست با انترپلاسیون وسپس باروش نیوتن حساب کنید .

۱۳) $\cos x + x = ۰$ — جواب : یک ریشه ، $x = -۰٫۷۳۹$

۱۴) $tg\, x - x = ۰$ — بینهایت ریشه

۱۵) $\cos ۲x - x = ۰$ — یک ریشه ، $x = ۰٫۵۱۵$

۱۶) $۳\sin x - x = ۰$ — سه ریشه ، $x = ۲٫۲۷۹$

۱۷) $۲\sin x - x^۲ = ۰$ — دوریشه ، $x = ۱٫۴۰۴$

۱۸) $\cos x - ۲x^۲ = ۰$ — دوریشه ، $x = ۰٫۶۳۵$

۱۹) $cotg\, x + x^۲ = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۳٫۰۳۲$

۲۰) $۲\sin ۲x - x = ۰$ — سه ریشه ، $x = ۱٫۲۳۷$

۲۱) $\sin x + x - ۱ = ۰$ — یک ریشه ، $x = ۰٫۵۱۱$

۲۲) $\cos x + x - ۱ = ۰$ — یک ریشه ، $x = ۰$

۲۳) $e^{-x} - \cos x = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۱٫۲۹$

۲۴) $tg\, x - \log x = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۳٫۶۵$

۲۵) $e^x + x - ۳ = ۰$ — یک ریشه ، $x = ۰٫۷۹۲$

۲۶) $\sin ۳x - \cos ۲x = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۰٫۳۱۴$

۲۷) $۲\sin \frac{x}{۲} - \cos ۲x = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۰٫۵۱۷$

۲۸) $tg\, x - ۲e^x = ۰$ — بینهایت ریشه ، $x = ۱٫۴۴$

۲۹) محورانتقال نیروی یک کشتی توخالی وبه شکل استوانه است و نیرویی برابر H اسب را باسرعت N دور در دقیقه منتقل میکند . شعاع داخلی و خارجی محور بترتیب r و R وبین آنها رابطهٔ $R^۴ - r^۴ = \frac{۳۲ HR}{N\pi^۲}$ برقرار است . اگر $H = ۲۵۰۰$ ، $N = ۱۶۰$ و $r = ۶$ باشد ، R چقدر است ؟

۳۰) مخزنی عبارتست ازیک استوانه که به یک سر آن نیمکره‌ای لحیم شده است .

قطر استوانه d اینچ ، طول استوانه h اینچ وحجم مخزن V اینچ مکعب است . نشان دهید که $d^{3}+3hd^{2}=\frac{12V}{\pi}$ است . اگر $h=20$ و $V=800$ باشد ، d چقدر است ؟

جواب : $d=6.77$

۳۱) تعداد ریشه های حقیقی معادلهٔ $x+1-4\sin x=0$ را تعیین نمایید ومقدار تقریبی بزرگترین ریشهٔ آن را پیدا کنید .

جواب : سه ریشه ، $x=2.210$

۳۲) مقدارماکزیمم هریک ازتوابع زیر را ، وقتی x بین ۰ و π است، با سه رقم اعشار حساب کنید .

الف) $x\sin x$ جواب : ۱٫۸۲۰

ب) $x^{2}\cos x$ ۰٫۵٤۸

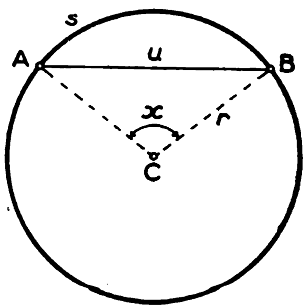
۳۳) میدانیم که اگر حجم یک پاوند گاز بسیارگرم در T درجهٔ فارنهایت وبا فشار P پاوند براینچ سربع V فوت مکعب باشد ، رابطهٔ

$$V=0.6490\frac{T}{P}-\frac{22.58}{P^{\frac{3}{4}}}$$

برقراراست . اگر $V=2.8$ و $T=4200$ باشد ، P چقدر است؟

۳٤) مقدارتقریبی طول وتر u نظیر به قوس s از دایرهٔ C بهشعاع r بادستور $u=s-\frac{s^{3}}{24r^{2}}$ تعیین میشود . اگر $r=4$ و $u=5.6$ باشد، s چقدر است ؟

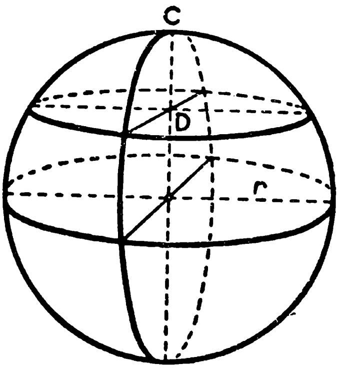
جواب : $s=6.23$



شکل ۷۲

۳۵) درهر دایرهٔ بهشعاع r ، S مساحت قطعه‌ای که زاویهٔمرکزیآن x (برحسبرادیان) است، بادستور $S=\frac{1}{2}r^{2}(x-\sin x)$ تعیین میشود. اگر $r=8$ و $S=64$ باشد ، مقدار x چقدر است ؟

جواب : رادیان $x=2.554$



شکل ۷۳

۳۶) V حجم یک قطعهٔ کره به ارتفاع $CD=h$ با دستور $V=\pi\left(rh^{۲}-\frac{h^{۳}}{۳}\right)$ تعیین میشود. اگر $r=۴$ و $V=۱۵۰$ باشد، h چقدر است؟ جواب: $h=۴٫۳۲$

۳۷) نشان دهید که V حجم هر تاج کروی* باشعاع خارجی R وضخامت t بادستور $V=۴\pi t\left(R^{۲}-Rt+\frac{t^{۲}}{۳}\right)$ تعیین میشود. اگر $R=۴$ و V برابر نصف حجم کره‌ای به‌شعاع R باشد، t چقدر است؟ جواب: $t=۰٫۸۲۷$

۳۸) یک کرهٔ چوبی توپر را که وزن مخصوص آن S وقطر آن d است در آب میندازیم، به اندازهٔ h در آب فرو میرود. $\frac{h}{d}$ را x مینامیم. نشان دهید که $۲x^{۳}-۳x^{۲}+S=۰$ است (مسئلهٔ ۳۶ را ببینید). اگر کره ازچوب افرا و وزن مخصوص آن $S=۰٫۷۸۶$ باشد، x چقدر است؟ جواب: ۰٫۷۰۲

۳۹) کوچکترین مقدار مثبتی از θ را پیدا کنید که به ازای آن دو خم $\rho=\cos\theta$ و $\rho=e^{-\theta}$ یکدیگر را قطع میکنند. زاویهٔ تقاطع این دوخم را دراین نقطه پیدا نمایید.
جواب: رادیان $\theta=۱٫۲۹$، زاویهٔ تقاطع دوخم $=۲۹^\circ$

تمرین اضافی

۱) زاویهٔ تقاطع دوخم $\rho=۲\cos\theta$ و $\rho=e^{\theta}$ را در دورترین نقطهٔ تقاطع دوخم ازمبدأ مختصات پیدا کنید.
جواب: مقدار θ درنقطهٔ تقاطع $=۰٫۵۴$ رادیان، زاویهٔ تقاطع $=۷۵^\circ\ ۵۶'$

۲) نشان دهید که خم $\rho=a\sin^{۴}\frac{\theta}{۴}$ خود را به‌زاویهٔ قائمه میبرد.

۳) OP یک شعاع حامل اختیاری از کاردیوئید $\rho=a(۱+\cos\theta)$ است. ازمرکز

* تاج کروی حجم بین دو کرهٔ متحدالمرکز است. مترجم

دایرهٔ C به معادلهٔ $\rho = a\cos\theta$ شعاع CQ را موازی OP ودرهمان سو رسم میکنیم . ثابت کنید که PQ به کاردیوئید مذکور عمود است .

۴) یکی از قطر های مربعی که بر کاردیوئید $\rho = a(1-\cos\theta)$ محیط است ، برمحور قطبی منطبق است . نشان دهید که مساحت این مربع برابر $\frac{27}{16}(2+\sqrt{3})a^2$ است .

۵) نقطهٔ متحرکی بیضی $\rho = \frac{ep}{1-e\cos\theta}$ را میپیماید و مساحتهایی که شعاع حامل آن جارو میکند متناسب بازمان است . نسبت سرعتهای نقطهٔ متحرك را در دو سر قطر بزرگتر حساب کنید. جواب : $\frac{1-e}{1+e}$

فصل نهم

دیفرانسیل

۹۰- مقدمه .- ما تاکنون مشتق تابع $y=f(x)$ را به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

نوشته‌ایم وبخصوص یادآور شده‌ایم که‌علامت

$$\frac{dy}{dx}$$

نباید به‌عنوان یک کسرعادی باصورت dy ومخرج dx درنظرگرفته شود، بلکه باید به‌عنوان حد نسبت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وقتی Δx بسمت صفر میل میکند ، تصورگردد .

اما در بسیاری از مسائل ، بخصوص در تعبیرات وموارد استعمال حساب انتگرال ، به dx وبه dy بطور جداگانه معنی و مفهوم خاصی میدهیم . این کار بسیار مهم و مفید است وما در زیر به بیان آن میپردازیم .

۹۱- چند تعریف.- اگر $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ به ازای مقدار خاصی از x و Δx نمو دلخواهی از x باشد ، دیفرانسیل تابع $f(x)$ که با علامت $df(x)$ نشان داده‌میشود ، بامعادلهٔ زیر تعریف‌میگردد :

$$df(x)=f'(x)\Delta x \qquad (A)$$

اگر $f(x)=x$ باشد ، $f'(x)=۱$ میشود ومعادلهٔ (A) به‌صورت

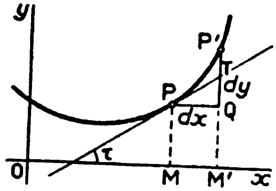
$$dx=\Delta x$$

درمیاید . این رابطه نشان میدهد که وقتی x متغیر مستقل است ، دیفرانسیل x ، یعنی

dx ، همان $\triangle x$ است . بنابراین اگر $y=f(x)$ باشد ، میتوانیم رابطهٔ (A) را بطورکلی به‌صورت زیر بنویسیم :

$$dy=f'(x)\,dx^{*}=\frac{dy}{dx}\,dx \qquad (B)$$

پس دیفرانسیل هرتابع برابراست باحاصل‌ضرب مشتق آن تابع در دیفرانسیل متغیر مستقل .



شکل ۷٤

اکنون معنی هندسی این تعریف‌را بیان‌میکنیم (شکل ۷٤) .

فرض میکنیم $f'(x)$ مشتق $y=f(x)$ درنقطهٔ P است . dx را برابر PQ میگیریم ، پس

$$dy=f'(x)dx=tg\,\tau\cdot PQ=\frac{QT}{PQ}\cdot PQ=QT$$

بنابراین dy یا df(x) مقدار نموی است (QT) که عرض خط مماس به خم درنقطهٔ P درفاصلهٔ dx پیدا میکند .

باتوجه به‌این مطلب میتوان برای مشتق تعبیر نوی در نظرگرفت و آن را یک کسر عادی دانست .

اگر در $$\frac{dy}{dx}=f'(x)=tg\,\tau$$

dx نمو دلخواهی ازمتغیرمستقل درنقطه‌ای مانند P(x , y) ازخم y=f(x) باشد ، dy نموی را نشان میدهد که عرض خط مماس به خم در نقطهٔ P در فاصلهٔ dx پیدا میکند .

بایدتوجه داشت‌که دیفرانسیل تابع ونمو تابع (یعنی dy و $\triangle y$)که نظیر به‌یک مقدار dx($=\triangle x$) هستند ، معمولاً مساوی نیستند . درشکل بالا دیده میشودکه $dy=QT$ است ، درصورتیکه $\triangle y=QP'$ است .

---

* به سبب جایی که $f'(x)$ در این رابطه اشغال میکند ، گاهی آن را ضریب دیفرانسیل مینامند .

۹۲- محاسبهٔ مقادیر تقریبی نموها بوسیلهٔ دیفرانسیل. - بنابرآنچه در شمارهٔ قبل گفته شد، روشن است که وقتی dx یعنی PQ کوچک است، مقادیر Δy یعنی QP' و dy یعنی QT تقریباً با هم برابرند. پس اگر در مسئله‌ای تنها مقدار تقریبی نمو تابع مورد احتیاج باشد، معمولاً بهتر است مقدار دیفرانسیل تابع نظیر به آن نمو را محاسبه کنیم وبکار بریم.

مثال ۱- مقدار تقریبی حجم یک‌تاج کروی راکه قطر خارجی‌آن ۱۰ اینچ وضخامت آن $\frac{۱}{۱۶}$ اینچ است، حساب کنید.

حل - حجم کره‌ای که قطر آن x است،

$$V=\frac{۱}{٦}\pi x^{۳} \qquad (۱)$$

است. روشن است که مقدار دقیق حجم تاج یعنی ΔV برابر تفاضل حجمهای دو کره به قطرهای ۱۰ اینچ و $\frac{۷}{۸}$ ۹ اینچ است. چون دراین مثال مقدار تقریبی ΔV خواسته شده است، ما dV را حساب میکنیم. از روابط (۱) و (B):

$$dV=\frac{۱}{۲}\pi x^{۲}dx \quad \text{چون} \quad \frac{dV}{dx}=\frac{۱}{۲}\pi x^{۲}$$

اگر $x=۱۰$ و $dx=-\frac{۱}{۸}$ قرار دهیم، dV تقریباً ۱۹٫٦۳ اینچ مکعب میشود. دراینجا ازعلامت — صرف‌نظر کرده‌ایم زیرا علامت — این را میرساند که با کم‌شدن x، یعنی با کوچکتر شدن قطر کره، ازحجم کره کاسته میشود. چون مقدار دقیق حجم تاج $\Delta V=۱۹٫٤$ است، دقت نتیجهٔ فوق نسبتاً کافی است و این بدان سبب است که نسبت dx به x کوچک است. اگر نسبت dx به x کوچک نباشد، بکار بستن این روش نتیجهٔ خوبی نمیدهد.

مثال ۲- میدانیم که یک درجه برابر ۰٫۰۱۷٤٥ رادیان، $sec\, ٤٥^\circ=\sqrt{۲}$ و $tg\, ٤٥^\circ=۱$ است. مقدار تقریبی $tg\, ٤٦^\circ$ را حساب کنید.

حل - مینویسیم $y=tg\,x$ ، پس بنابر رابطهٔ (B) :

$$dy=sec^{2}x\,dx \qquad (۱)$$

اگر به x مقدار $x+dx$ را نسبت دهیم ، مقدار y تقریباً برابر $y+dy$ میشود . دررابطهٔ (۱) بجای x ، $\frac{\pi}{4}$ وبجای dx ، ۰٫۰۱۷۵ میگذاریم ، برای dy مقدار ۰٫۰۳۵۰ بدست میاید. چون $y=tg\,45^\circ=1$ است ، $y+dy=1{,}0350=tg\,46^\circ$ میشود. جدول چهار رقمی $tg\,46^\circ=1{,}0355$ را میدهد .

۹۳- محاسبهٔ خطا . - یکی دیگر ازموارد استعمال دیفرانسیل تعیین خطایی است که هنگام محاسبه باچند مقدار تقریبی پیش میاید .

مثال ۱- مقدارتقریبی قطر دایره‌ای ۲٫۵ اینچ وحداکثر خطای‌آن ۰٫۰۵ اینچ‌است. اگر مساحت دایره را بادستور

$$A=\frac{1}{4}\pi x^{2} \qquad (x=\text{قطر}) \qquad (۱)$$

حساب کنیم ، حداکثر خطای مساحت دایره چقدر است؟

حل - روشن است که مقدار دقیق حداکثر خطا برابر تفاضل دو مقدار A است که به‌ازای $x=2{,}5$ و $x=2{,}55$ بدست میایند . ولی ما مقدار تقریبی این خطاراکه همان dA است ، حساب میکنیم :

جواب : $dA=\frac{1}{2}\pi x\,dx=\frac{1}{2}\pi\times 2{,}5\times 0{,}05=0{,}41$

خطای نسبی وخطای درصد - اگر du خطای مطلق u باشد :

$$\text{خطای نسبی}=\frac{du}{u} \qquad (۲)$$

$$\text{خطای درصد}=100\frac{du}{u} \qquad (۳)$$

خطای نسبی را میتوان مستقیماً بوسیلهٔ محاسبهٔ مشتق لگاریتمی بدست آورد (شمارهٔ ۶۶) .

مثال ۲ - درمثال ۱ خطای نسبی وخطای‌درصد چقدر است ؟

حل - از دوطرف رابطهٔ (۱) لگاریتم طبیعی میگیریم :

$$ln\, A = ln\, \frac{\pi}{٤} + ۲\, ln\, x$$

ازاین رابطه مشتق میگیریم :

$$\frac{۱}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = \frac{۲}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{۲\, dx}{x}$$

اگر درطرف راست رابطهٔ اخیر $x = ۲ر٥$ و $dx = ۰٫۰٥$ قرار دهیم :

جواب : خطای نسبی $A = ۰٫۰۱۹۲$ و خطای درصد $= ۱ر۹۲٪$

در اینجا خطاهای مورد نظر ناشی از تقریبی بودن داده های مسئاله و تقریبی بودن داده‌های مسئله ناشی ازکمی دقت اندازه‌گیری است . علل دیگری نیز ممکن است سبب خطا شود .

تمرین

۱) مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است A مینامیم ، dA چقدر است ؟ شکلی رسم کنید که مربع مذکور ، dA و $\triangle A$ را نشان دهد .

جواب : $dA = ۲x\, dx$

۲) دستوری بنویسید که مقدار تقریبی مساحت تاجی از دایره را بدهد که شعاع خارجی آن r وعرض آن dr است . دستور دقیق این مساحت چیست؟

جواب : $dA = ۲\pi r\, dr$ ، $\triangle A = \pi(۲r + \triangle r)\triangle r$

۳) طول یال مکعبی ٦ اینچ باحداکثر خطای ۰٫۰۲ اینچ است . مقدار تقریبی خطای مساحت وخطای حجم مکعب چقدر است ؟

جواب : خطای‌مساحت: $\pm ۱ر٤٤$ اینچ مربع ، خطای‌حجم: $\pm ۲ر۱٦$ اینچ مکعب

٤) مساحت وحجم کره‌ای‌به‌شعاع r رابادستورهای $S = ٤\pi r^۲$ و $V = \frac{٤}{۳}\pi r^۳$ حساب میکنیم . اگر شعاع کره ۳ اینچ و حداکثر خطای آن ۰٫۰۱ اینچ باشد ، مقدار تقریبی حداکثر خطای S و V وحداکثر خطاهای درصد آنها چقدر است؟

جواب : خطای S : π ۲٤ر۰ اینچ مربع ، $\frac{۲}{۳}$ ٪ وخطای V: π ۳٦ر۰ اینچ مکعب، ۱٪

٥) بوسیلهٔ حساب دیفرانسیل نشان دهید که

$$\frac{۱}{x+dx} \# \frac{۱}{x} - \frac{dx}{x^{۲}}$$

٦) دستوری بنویسید که مقدار تقریبی حجم بدنهٔ یک استوانهٔ سر و ته باز را که شعاع آن r ، طول آن h وضخامت آن t است ، بدست دهد جواب : $۲\pi rht$

۷) میخواهیم یک قوطی مکعب شکل بسازیم که حجم داخلی آن ۱۰۰۰ فوت مکعب باشد . هنگام ساختن ، دقت طول یال داخلی این مکعب چقدر باشد تا خطای حجم از ۳ فوت مکعب نگذرد . جواب : فوت ۰۱ر۰ $\leqslant$ خطا

۸) اگر $y=x^{\frac{۲}{۳}}$ وخطای اندازه گیری x ، وقتی ۲۷ $=x$ است، ۹ر۰ باشد، خطای y چقدر است ؟ بااستفاده ازمقدار اخیر مقدار تقریبی $(۲۷ر۹)^{\frac{۲}{۳}}$ و $(۲٦ر۱)^{\frac{۲}{۳}}$ را حساب کنید . جواب : ۲ر۰ ، ۹ر۲ ، ۸ر۸

با استفاده ازحساب دیفرانسیل مقادیر تقریبی اعداد زیر را حساب کنید :

۹) $\sqrt{٦٦}$	۱۱) $\sqrt[۳]{۱۲۰}$	۱۳) $\frac{۱}{۹٦}$	۱٥) $\sqrt[٥]{۳٥}$
۱۰) $\sqrt{۹۸}$	۱۲) $\sqrt[۳]{۱۰۱۰}$	۱٤) $\frac{۱}{\sqrt{٥۱}}$	۱٦) $\sqrt[٤]{۱٥}$

۱۷) میدانیم ۳۰۳ر۲ $=$ ۱۰ ln است. مقدارتقریبی ۲ر۱۰ ln راباحساب دیفرانسیل پیدا کنید . جواب : ۳۲۳ر۲

۱۸) میدانیم ۳۹ر۷ $=e^{۲}$ است . مقدار تقریبی $e^{۲ر۱}$ را با حساب دیفرانسیل پیدا کنید . جواب : ۱۳ر۸

۱۹) میدانیم $\sin ٦۰^{\circ} =$ ۸٦٦۰۳ر۰ ، $\cos ٦۰^{\circ} =$ ٥ر۰ و یک درجه برابر ۰۱۷٤٥ر۰ رادیان است . باحساب دیفرانسیل مقادیر تقریبی $\sin ٦۲^{\circ}$ ، $\cos ٦۱^{\circ}$ ، $\sin ٥۹^{\circ}$ و $\cos ٥۸^{\circ}$ را تا چهار رقم اعشار پیدا کنید .

جواب : ۸۸۳٥ر۰ ، ٤۸٤۹ر۰ ، ۸٥۷۳ر۰ ، ٥۳۰۲ر۰

۲۰) زمان یک نوسان آونگ ساده با دستور $T^{2}=\frac{\pi^{2}l}{g}$ تعیین میشود. T زمان یک نوسان برحسب ثانیه و l طول آونگ برحسب سانتیمتر است. اگر $g=981\ cm/s^{2}$ باشد، (الف) طول آونگی را پیدا کنید که زمان نوسان‌آن یک ثانیه است، (ب) اگر به طول آونگ مذکور ۰٫۳ سانتیمتر افزوده شود، تغییر T چقدر است؟ (پ) ساعتی که آونگ آن آونگ اخیر باشد، در یک شبانه روز چقدر عقب یا جلو میفتد؟

جواب: (الف) ۹۹٫۴ سانتیمتر، (ب) ۰٫۰۰۱۴۷ ثانیه،
(پ) ۲ دقیقه و ۷ ثانیه عقب میفتد.

۲۱) قطر دایره را با چه دقتی اندازه بگیریم تا دقت مساحت آن تا ۱٪ باشد.
جواب: ۰٫۵٪ $\geqslant$ خطا

۲۲) نشان دهید که خطای نسبی حجم کره که از خطای شعاع آن ناشی میشود، سه برابر خطای نسبی شعاع آن است.

۲۳) نشان دهید که خطای نسبی قوهٔ n ام هر عدد n برابر خطای نسبی آن عدد است.

۲۴) نشان دهید که خطای نسبی ریشهٔ n ام هرعدد $\frac{1}{n}$ خطای نسبی آن عدد است.

۲۵) طول یالهای یک مکعب‌فلزی که براثر حرارت درحال انبساط است، با ازدیاد هردرجه‌حرارت ۰٫۰۱٪ زیاد میشود. نشان دهید که باازدیاد هردرجه حرارت سطح مکعب ۰٫۰۲٪ و حجم آن ۰٫۰۳٪ زیاد میگردد.

۹۴- چند دستور برای پیداکردن دیفرانسیل توابع. - چون دیفرانسیل هرتابع برابر حاصل‌ضرب مشتق آن تابع در دیفرانسیل متغیر مستقل است، دستورهای محاسبهٔ دیفرانسیل همان دستورهای محاسبهٔ مشتق‌اند که در شماره‌های ۲۹ و ۶۰ داده شده‌اند بشرط آنکه هریک از آنها را در dx ضرب کنیم. بدین‌ترتیب:

I $\qquad d(c)=0$

II $\qquad d(x)=dx$

III $\qquad d(u+v-w)=du+dv-dw$

$$\text{IV} \qquad d(cv) = c\,dv$$

$$\text{V} \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\text{VI} \qquad d(v^n) = nv^{n-1}dv$$

$$\text{VIa} \qquad d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$\text{VII} \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$\text{VIIa} \qquad d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}$$

$$\text{X} \qquad d(\ln v) = \frac{dv}{v}$$

$$\text{XI} \qquad d(a^v) = a^v \ln a\,dv$$

$$\text{XIa} \qquad d(e^v) = e^v\,dv$$

$$\text{XII} \qquad d(u^v) = vu^{v-1}du + \ln u \cdot u^v\,dv$$

$$\text{XIII} \qquad d(\sin v) = \cos v\,dv$$

$$\text{XIV} \qquad d(\cos v) = -\sin v\,dv$$

$$\text{XV} \qquad d(tg\, v) = \sec^2 v\,dv$$

. . . .

$$\text{XX} \qquad d(\arcsin v) = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

. . . .

برای پیدا کردن دیفرانسیل یک تابع ساده‌ترین راه آن است که مشتق آن تابع را به طریق عادی پیدا کنیم و نتیجه را در dx ضرب نماییم .

مثال ۱ - دیفرانسیل تابع زیر را حساب کنید :

$$y = \frac{x+3}{x^2+3}$$

حل - $dy=d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right)=\frac{(x^2+3)d(x+3)-(x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$

جواب : $=\frac{(x^2+3)dx-(x+3)2x\,dx}{(x^2+3)^2}=\frac{3-6x-x^2}{(x^2+3)^2}dx$

مثال ۲ - معادلهٔ ضمنی $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ مفروض‌است ، dy را بدست‌آورید.

حل - از دو طرف معادلهٔ داده شده دیفرانسیل میگیریم :

$$2b^2x\,dx-2a^2y\,dy=0$$

جواب : $dy=\frac{b^2x}{a^2y}dx$

مثال ۳ - معادلهٔ $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ مفروض است ، $d\rho$ را بدست آورید .

حل - $2\rho\,d\rho=-a^2\sin 2\theta\cdot 2\,d\theta$

جواب : $d\rho=-\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho}d\theta$

مثال ٤ - $d[\arcsin(3t-4t^3)]$ را پیدا کنید .

حل - $d[\arcsin(3t-4t^3)]=\frac{d(3t-4t^3)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$

جواب : $=\frac{3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$

تمرین

درستی دیفرانسیلهای زیر را بیازمایید :

جواب

۱) $y=x^3-3x$ $\qquad$ $dy=3(x^2-1)dx$

جواب

۲) $y=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$ $\qquad$ $dy=\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}\right)dx$

۳) $y=\sqrt{ax+b}$ $\qquad$ $dy=\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax+b}}$

۴) $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad$ $dy=\frac{(a^2-2x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۵) $s=ae^{bt}$ $\qquad$ $ds=abe^{bt}dt$

۶) $u=\ln cv$ $\qquad$ $du=\frac{dv}{v}$

۷) $\rho=\sin a\theta$ $\qquad$ $d\rho=a\cos a\theta\,d\theta$

۸) $y=\ln\sin x$ $\qquad$ $dy=\cot g\,x\,dx$

۹) $\rho=\theta\cos\theta$ $\qquad$ $d\rho=(\cos\theta-\theta\sin\theta)d\theta$

۱۰) $s=e^t\cos\pi t$ $\qquad$ $ds=e^t(\cos\pi t-\pi\sin\pi t)dt$

دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید :

۱۱) $y=\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}$

۱۲) $u=\sqrt{e^v+1}$

۱۳) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۱۴) $y=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

۱۵) $\rho=2\sin\frac{\theta}{2}$

۱۶) $s=e^{-at}\sin bt$

۱۷) $\rho=\sqrt{\cot g\,\theta}$

۱۸) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{6x-5}{4-3x}}$

۱۹) $x^2+y^2=a^2$ است . نشان دهید که $dy=-\frac{x\,dx}{y}$ است .

در توابع زیر dy را به صورت تابعی از x ، y و dx پیدا کنید :

۲۰) $۲x^۲+۳xy+۴y^۲=۲۰$ $\qquad dy=-\frac{(۴x+۳y)dx}{۳x+۸y}$

۲۱) $x^۳+۶xy^۲+۲y^۳=۱۰$

۲۲) $x+۴\sqrt{xy}+۲y=a$

۲۳) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

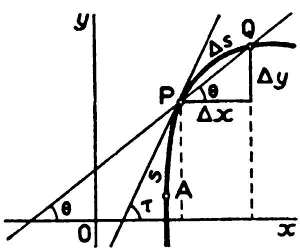
۲۴) $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$

۲۵) $x-y=e^{x+y}$

۲۶) $\sin(x-y)=\cos(x+y)$

۲۷) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه ۱۴ر۵ فوت و ۲۱ر۴ فوت و حداکثر خطای اندازه‌گیری در هریک از آنها ۰ر۱ $\pm$ فوت است . اگر اندازهٔ زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر را با دستور تانژانت آن زاویه حساب کنیم ، حداکثر خطای این زاویه برحسب درجه چقدر است ؟

۹۵- دیفرانسیل طول قوس در دستگاه مختصات قائم . ـ طول قوس AP را که از نقطهٔ معین و ثابت A اندازه گرفته شده است ، s و نمو آن یعنی طول قوس PQ را Δs مینامیم (شکل ۷۵) .



شکل ۷۵

تعریف طول قوس براین فرض متکی است که وقتی Q بسمت P میل میکند ،

$$\lim\left(\frac{\text{وتر } PQ}{\text{قوس } PQ}\right)=۱$$

است . با توجه به شکل ۷۵ روشن است که

$$(\text{وتر } PQ)^۲=(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲ \qquad (۱)$$

دو طرف این تساوی را بر $(\Delta x)^۲$ تقسیم و سپس صورت و مخرج طرف چپ را در $(\Delta s)^۲$ ضرب میکنیم ، تساوی

$$\left(\frac{\text{وتر } PQ}{\Delta s}\right)^{۲}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^{۲}=۱+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{۲} \qquad (۲)$$

بدست میاید . اکنون اگر Q را بسمت P میل دهیم ، Δx بسمت صفر میل میکند و

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^{۲}=۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} \qquad (۳)$$

میشود . دو طرف این معادله را در $dx^{۲}$ ضرب میکنیم ، نتیجهٔ زیر بدست میاید .

$$ds^{۲}=dx^{۲}+dy^{۲} \qquad (C)$$

اگر از دو طرف رابطهٔ (۳) جذر بگیریم و دو طرف معادلهٔ حاصل را در dx ضرب کنیم ، تساوی

$$ds=\left[۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}dx \qquad (D)$$

نتیجه میگردد . به همین ترتیب از رابطهٔ (C) رابطهٔ

$$ds=\left[۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}dy \qquad (E)$$

بدست میاید .

چون $۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}=۱+tg^{۲}\tau=sec^{۲}\tau$ است ، رابطهٔ (D) ، با فرض آن‌که زاویهٔ τ حاده است ، به صورت

$$ds=sec\,\tau\,dx$$

در میاید . از رابطهٔ اخیر میتوان بآسانی نشان داد که

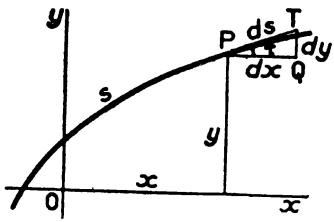
$$\frac{dx}{ds}=cos\,\tau \quad , \quad \frac{dy}{ds}=sin\,\tau \qquad (F)$$

زیرا $\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=tg\,\tau\,cos\,\tau=sin\,\tau$ است.

اگر بجای $\frac{dy}{dx}$ ، y' بگذاریم ، دستورهای

$$\cos\tau = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad \sin\tau = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(G)}$$

بدست میایند. اگرزاویهٔ τ منفرجه باشد($y' < 0$) ، باید جلو مخرجهای روابط (G) و جاو $\cos\tau$ در (F) علامت — گذاشت.



شکل ۷۶

در شکل ۷۶ ، $PQ = \Delta x = dx$ ، PT خط مماس به خم در نقطهٔ P ، τ حاده و زاویهٔ PQT قائمه است . بنابراین

(بنابر شمارهٔ ۹۱) $\qquad QT = tg\,\tau\, dx = dy$

و از آنجا [بنابر رابطهٔ (C)] $\qquad PT = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$

شکل ۷۶ میتواند در بخاطر سپردن و بخاطر آوردن روابط بالا کمک کند . فرضی را که در شروع این شماره بیان کردیم ، در شمارهٔ ۹۹ ثابت خواهیم کرد .

۹۶- دیفرانسیل طول قوس در دستگاه مختصات قطبی . - از روابط

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta \qquad (1)$$

که بین مختصات قائم و قطبی یک نقطه برقرار است ، برطبق دستورهای V و XIII و XIV ی شمارهٔ ۹۴ دیفرانسیل میگیریم:

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta \quad , \quad dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta \qquad (2)$$

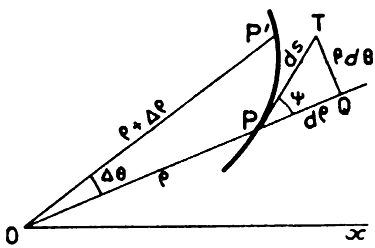
این مقادیررا در رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۹۵ میگذاریم ، پس‌ازاختصار و ریشه گرفتن داریم :

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} \qquad \text{(H)}$$

این رابطه را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$ds=\left[\rho^{2}+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad (I)$$

شکل ۷۷ حالتی رانشان میدهدکه‌زاویهٔ ψ ، یعنی زاویهٔ بین شعاع حامل OP و مماس PT ، حاده است(شمارهٔ ۸۰). بنابراین ρ ، $\triangle\theta$ و $\triangle\rho(=OP'-OP)$ مثبتند . ρ را متغیر مستقل میگیریم ، دراین‌صورت $\triangle\rho=d\rho$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PQT ، $PQ=d\rho$ گرفته‌ایم ، بنابراین $QT=tg\,\psi\, d\rho$ است . اما بنابر رابطهٔ (H) شمارهٔ ۸۰



شکل ۷۷

$$tg\,\psi=\rho\,\frac{d\theta}{d\rho}$$

پس بنابر (B)
$$QT=\rho\,\frac{d\theta}{d\rho}\,d\rho=\rho\, d\theta$$

ولذا بنابر (H)
$$PT=\sqrt{d\rho^{2}+\rho^{2}d\theta^{2}}=ds$$

مثال ۱ - دیفرانسیل طول قوس دایرهٔ $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ را پیدا کنید .

حل - ازدو طرف معادلهٔ دایره نسبت به x مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

برای آنکه ds را به صورت تابعی‌از x درآوریم ، این مقدار را در (D) میگذاریم :

$$ds=\left[1+\frac{x^{2}}{y^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{2}+y^{2}}{y^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{r^{2}}{y^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^{2}-x^{2}}}$$

و برای آنکه ds را به صورت تابعی از y درآوریم ، مقدار $\frac{dx}{dy}$ را در (E) میگذاریم :

$$ds=\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}}dy=\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}}dy=\left[\frac{r^2}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}}dy=\frac{r\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

مثال ۲- دیفرانسیل طول قوس سیکلوئید

$$x=a(\theta-\sin\theta) \quad , \quad y=a(1-\cos\theta)$$

را به صورت تابعی از θ و $d\theta$ پیدا کنید (مثال ۲ ی شمارهٔ ۸۱ را ببینید).

حل - از معادلات سیکلوئید دیفرانسیل میگیریم :

$$dx=a(1-\cos\theta)d\theta \quad , \quad dy=a\sin\theta\, d\theta$$

این مقادیر را در (C) میگذاریم :

$$ds^2=a^2(1-\cos\theta)^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta\, d\theta^2=2a^2(1-\cos\theta)d\theta^2=4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta^2$$

پس

$$ds=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

مثال ۳- دیفرانسیل طول قوس کاردیوئید $\rho=a(1-\cos\theta)$ را به صورت تابعی از θ پیدا کنید.

حل - از معادلهٔ خم نسبت به θ مشتق میگیریم :

$$\frac{d\rho}{d\theta}=a\sin\theta$$

این مقدار را در (I) میگذاریم :

$$ds=[a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta=a(2-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=a\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

تمرین

در خمهای زیر ds را به صورت تابعی از x و dx بدست آورید :

جواب

۱) $2y=x^2$ $\qquad ds=\sqrt{1+x^2}\,dx$

۲) $y^2=2px$ $\qquad ds=\sqrt{\dfrac{2x+p}{2x}}\,dx$

۳) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $\qquad ds=\sqrt{\dfrac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx$

٤) $6xy=x^4+3$ $\qquad ds=\dfrac{(x^4+1)dx}{2x^2}$

٥) $y=\ln\sec x$ $\qquad ds=\sec x\,dx$

٦) $a^2y=x^3$ $\qquad$ ۷) $ay^2=x^3$

۸) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $\qquad$ ۹) $2y=e^x+e^{-x}$

۱۰) $y=\sin x$ $\qquad$ ۱۱) $y=\cos^2 x$

در خمهای زیر ds را به صورت تابعی از y و dy بدست آورید :

جواب

۱۲) $y^2=2px$ $\qquad ds=\dfrac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}\,dy$

۱۳) $ay^2=x^3$ $\qquad ds=\dfrac{\sqrt{9y^{\frac{2}{3}}+4a^{\frac{2}{3}}}}{3y^{\frac{1}{3}}}\,dy$

۱٤) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\qquad ds=\sqrt[3]{\dfrac{a}{y}}\,dy$

۱٥) $a^2y=x^3$ $\qquad$ ۱٦) $y^2-2x-3y=0$

۱۷) $2xy^2-y^2-4=0$

درخمهای زیر ds ، $sin\,\tau$ و $cos\,\tau$ را به صورت تابعی از t و dt بدست آورید:

۱۸) $x=2t+3 \quad , \quad y=t^2-2$ ۱۹) $x=3t^2 \quad , \quad y=2t^3$

۲۰) $x=a\,sin\,t \quad , \quad y=a\,cos\,t$ ۲۱) $x=4cos\,t \quad , \quad y=3sin\,t$

درخمهای زیر ds را به صورت تابعی از θ و dθ بدست آورید :

جواب

۲۲) $\rho=a\,cos\,\theta$ $ds=a\,d\theta$

۲۳) $\rho=5cos\,\theta+12sin\,\theta$ $ds=13\,d\theta$

۲۴) $\rho=1-sin\,\theta$ $ds=\sqrt{2-2sin\,\theta}\;d\theta$

۲۵) $\rho=3sin\,\theta-4cos\,\theta$ ۲۶) $\rho=1+cos\,\theta$

۲۷) $\rho=sec^2\dfrac{\theta}{2}$ ۲۸) $\rho=2-cos\,\theta$

۲۹) $\rho=2+3sin\,\theta$ ۳۰) $\rho=a\,cos\,n\theta$

۳۱) $\rho=4sin^3\dfrac{\theta}{3}$ ۳۲) $\rho=\dfrac{4}{1+cos\,\theta}$

۳۳) $\rho=\dfrac{4}{3-cos\,\theta}$ ۳۴) $\rho=\dfrac{4}{1-3cos\,\theta}$

۹۷- سرعت به منزلهٔ نرخ تغییر طول قوس نسبت به زمان . ـ در بحث از حرکت منحنی‌الخط در شمارهٔ ۸۳ ، سرعت v با دستور (E) یعنی

$$v^2=v_x^2+v_y^2 \tag{1}$$

داده شده است . بنابر روابط (C) و (D) ی شمارهٔ ۸۳

$$v_x=\frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y=\frac{dy}{dt}$$

است. این مقادیر را در رابطهٔ (۱) میگذاریم وازرابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۹۰ استفاده میکنیم :

$$v^{2}=\frac{dx^{2}+dy^{2}}{dt^{2}}=\frac{ds^{2}}{dt^{2}} \qquad (۲)$$

از دو طرف این رابطه جذر میگیریم و علامت + را اختیار میکنیم :

$$v=\frac{ds}{dt}$$

پس در حرکت منحنی‌الخط ، سرعت نقطهٔ متحرك برابر است با نرخ تغییر طول قوس مسیر نسبت به زمان .

مقایسهٔ این دستور با تعریف سرعت در حرکت مستقیم که در شمارهٔ ٥١ به منزلهٔ نرخ تغییر فاصله نسبت به زمان ذکر شده است ، بسیارجالب‌است.

۹۸- دیفرانسیل به منزلهٔ بینهایت کوچك .- در ریاضیات عملی دیفرانسیل را اغلب به منزلهٔ بینهایت کوچك (شمارهٔ ۲۰) یعنی به منزلهٔ متغیری که بسمت صفر میل میکند ، درنظرمیگیرند. بعکس ، بجای‌بینهایت کوچکی که دریك رابطه موجود است، دیفرانسیل نظیر آن را میگذارند . این «اصل تعویض» در ریاضیات عملی موارد استعمال بسیار دارد .

اگر x متغیرمستقل باشد ، دیدیم که $\Delta x=dx$ است و میتوان درهرمعادله بجای Δx ، dx گذاشت . اگر Δx بسمت صفر میل کند ، dx نیز بسمت صفر میل میکند . از طرف‌دیگر مقادیر Δy و dy بطورکلی مساوی نیستند ، اما وقتی x مقدار معینی دارد و Δx (که مساوی dx است) بینهایت کوچك است ، Δy و بنابر رابطهٔ (B) ی شمارهٔ ۹۱ ، dy نیز بینهایت کوچك است . علاوه براین میتوان بآسانی نشان داد که

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1 \qquad (۱)$$

است زیرا :

اثبات - چون $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ است ، میتوان نوشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

دراین رابطه ε بینهایت کوچکی است که با Δx بسمت صفر میل میکند . دو طرف رابطهٔ اخیر را در Δx ضرب میکنیم ، بنابر رابطهٔ (B) داریم :

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$$

دو طرف این تساوی را بر Δy تقسیم میکنیم ، پس از جابجا کردن جملات داریم :

$$\frac{dy}{\Delta y} = ۱ - \varepsilon \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

پس
$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{dy}{\Delta y} = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{dy} = ۱$$

قضیهٔ زیر را بدون اثبات میپذیریم :

قضیهٔ تعویض - درمسائلی که تنها شامل نسبت بینهایت کوچك ها هستند ، اگر بینهایت کوچك ها همزمان بسمت صفر میل کنند ، میتوان بجای یك بینهایت کوچك بینهایت کوچك دیگری قرارداد بشرط آنکه حد نسبت این دو بینهایت کوچك برابر یك باشد .

بنابراین قضیه میتوان بجای Δy ، dy گذاشت وبطورکلی میتوان بجای هرنمو ، دیفرانسیل نظیر آن را قرار داد .

درمعادلاتی که نسبت به بینهایت کوچك ها همگن هستند ، بکاربستن این قضیه بسیار آسان است .

مثال ۱- بنابر روابط (٥) صفحهٔ ٦ ، اگر $x = \frac{i}{۲}$ باشد ، $۱ - \cos i = ۲\sin^۲ \frac{i}{۲}$ است. اگر i بینهایت کوچک باشد ، بنابررابطهٔ (B) ی شمارهٔ ٦٨ ، میتوان بجای $\sin i$ ، i و بجای $\sin^۲ \frac{i}{۲}$ ، $\frac{i^۲}{٤}$ و لذا بجای $۱ - \cos i$ ، $\frac{i^۲}{۲}$ گذاشت . بنابراین میتوان بجای $tg\, i \left(= \frac{\sin i}{\cos i}\right)$ ، i قرار داد.

مثال ۲- در رابطهٔ(۱) شمارهٔ ۹٥ ، وقتی Δx بسمت صفرمیل میکند ، تمام مقادیر بینهایت کوچک هستند و معادلهٔ مذکور یک معادلهٔ همگن درجهٔ دوم است . بنابر قضیهٔ بالا میتوانیم بینهایت کوچک ها را به ترتیب زیر بجای هم قرار دهیم :

قوس PQ را که مساوی Δs است بجای وتر PQ ، ds را بجای Δs ، dy را بجای Δy و dxرا بجای Δx .

دراین صورت رابطهٔ (۱) به صورت $ds^2 = dx^2 + dy^2$ که همان رابطهٔ (C) است ، در میاید .

۹۹- مرتبهٔ بینهایت کوچك‌ها - دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر .- فرض میکنیم که i و j دو بینهایت کوچك هستند و همزمان بسمت صفر میل میکنند و $lim \frac{j}{i} = L$ است .

اگر $L \neq 0$ باشد ، میگویند دو بینهایت کوچك i و j از یك مرتبه‌اند .

اگر $L = 0$ باشد ، میگویند مرتبهٔ j از مرتبهٔ i بالاتر است .

اگر $L \to \infty$ ، میگویند مرتبهٔ j از مرتبهٔ i پایین‌تر است .

سرانجام اگر $L = 1$ باشد ، مرتبهٔ $j-i$ از مرتبهٔ i بالاتر است ، زیرا :

$$lim\left(\frac{j-i}{i}\right) = lim\left(\frac{j}{i} - 1\right) = lim\frac{j}{i} - 1 = 0$$

عکس این مطلب نیزصحیح است . در حالت $L = 1$ میگویند تفاضل $j - i$ بینهایت کوچکی است از مرتبهٔ بالاتر از مرتبهٔ i .

مثلاً dy و Δx از یك مرتبه‌اند بشرط آنکه $f'(x)$ نه بسمت صفر و نه بسمت بینهایت میل کند. دراین حالت Δy و Δx ازیك مرتبه‌اند اما $\Delta y - dy$ از مرتبه‌ای بالاترازمرتبهٔ Δx است . درست به همین دلیل است که dy را «قسمت اصلی Δy» مینامند.

روشن است که مرتبهٔ قوه‌ای از i بالاتر از مرتبهٔ i است .

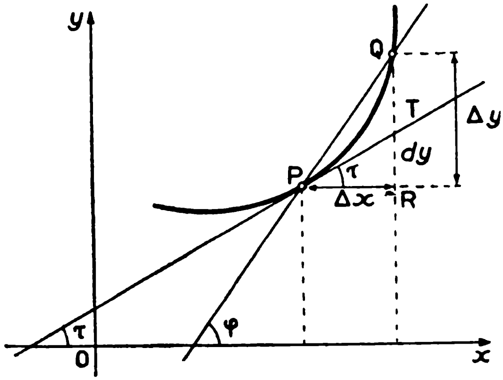
مثال - درستی تساوی $lim \frac{\text{وتر } PQ}{\text{قوس } PQ} = 1$ را که در شمارهٔ ۹۰ ذکر شده است ، نشان دهید .

حل - در شکل ۷۸ دیده میشود که

$$\text{وتر } PQ < \text{قوس } PQ < PT + TQ$$

پس
$$1 < \frac{\text{قوس } PQ}{\text{وتر } PQ} < \frac{PT}{\text{وتر } PQ} + \frac{TQ}{\text{وتر } PQ}$$

اما
$$\text{وتر } PQ = sec\,\varphi \cdot \Delta x$$



شکل ۷۸

$$PT = \sec\tau \cdot \Delta x$$

$$TQ = \Delta y - dy$$

و لذا $\dfrac{TQ}{\text{وتر}\ PQ} = \cos\varphi\,\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ ، $\dfrac{PT}{\text{وتر}\ PQ} = \dfrac{\sec\tau}{\sec\varphi}$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{PT}{\text{وتر}\ PQ}\right) = 1 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{TQ}{\text{وتر}\ PQ}\right) = 0$$

پس $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\text{قوس}\ PQ}{\text{وتر}\ PQ}\right) = 1$

دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر . - اگر $y=f(x)$ و x متغیر مستقل باشد ، دیفرانسیل مرتبهٔ دوم y با معادلهٔ زیر تعریف میشود :

$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2 = y''\,\Delta x^2$$

اگر $f''(x)$ نه صفر باشد ونه بسمت بینهایت میل کند ، d^2y از مرتبهٔ Δx^2 و لذا از مرتبهٔ بالاتری از dy است . d^3y ، ... ، d^ny نیز به طریق مشابهی تعریف میشوند .

مسئله

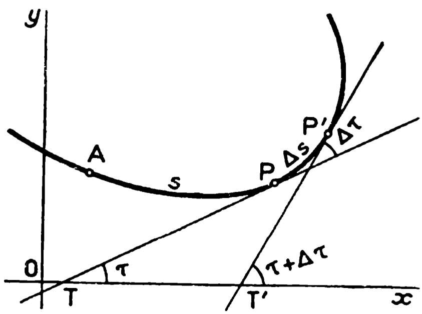
a و b و c ، اضلاع مثلث ABC ، همزمان بسمت صفر میل میکنند . میدانیم که مرتبهٔ c از مرتبهٔ b بالاتر است . نشان دهید که $\lim \frac{a}{b} = ۱$ است .

فصل دهم

انحنا ـ شعاع انحنا ـ دایرهٔ انحنا

۱۰۰ - انحنا یا خمیدگی . ـ در شمارهٔ ۵۵ دربارهٔ جهت تقعر یک خم صحبت کردیم . میزان انحنای یک خم (یعنی کمتر یا بیشتر خمیده بودن یک خم) در یک نقطه ، بستگی به میزان تغییر جهت خم در آن نقطه دارد . این میزان تغییر جهت در هر نقطه را انحنای خم در آن نقطه مینامند و با K نشان میدهند . ما در اینجا برای K یک تعریف ریاضی میکنیم .

فرض کنیم P و P′ دو نقطه از خم و نزدیک به یکدیگر باشند (شکل ۷۹) . مماس PT را در نظر میگیریم . وقتی نقطهٔ P قوس PP′ یعنی Δs را میپیماید ، خط مماس به اندازهٔ زاویهٔ $\Delta\tau$ میچرخد . $\Delta\tau$ مقدار تغییر میل خط مماس است . بنابر تعریف :



شکل ۷۹

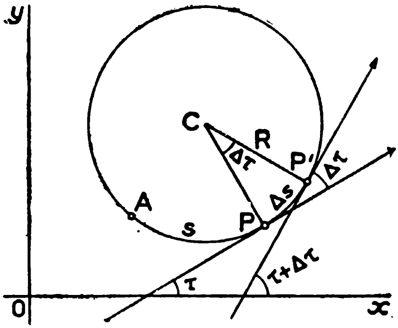
$$[\text{انحنای متوسط قوس } PP'] = \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

و حد انحنای متوسط PP′ ، وقتی P′ بسمت P میل کند ، انحنای خم در نقطهٔ P است ، یعنی :

$$[\text{انحنا درنقطهٔ } P] = K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} \qquad \text{(A)}$$

به عبارت دیگر خمیدگی یا انحنا نسبت تغییر میل به تغییر طول قوس است (شمارهٔ ۵۰ را ببینید) .

چون زاویهٔ $\Delta\tau$ را با رادیان و طول قوس Δs را با واحد طول اندازه میگیرند ، پس **واحد انحنادریك نقطه «یك رادیاندرواحد طول» است.**



شکل ۸۰

۱۰۱ - انحنای دایره . -

قضیه - انحنای‌دایره درجمیع نقاط آن مقداری‌ثا بت و برابر عکس شعاع است .

چون $\Delta\tau$ که زاویهٔ بین دو خط مماس به خم در دو نقطهٔ P و P' است ، با زاویهٔ بین دو شعاع CP و CP' ، یعنی زاویهٔ مرکزی PCP' ، برابر است (شکل ۸۰) و زاویهٔ PCP' برحسب رادیان است ، پس :

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{\widehat{PCP'}}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R}$$

لذا انحنای متوسط قوس PP' مقدار ثابتی است و به Δs بستگی ندارد . حال اگر Δs بسمت صفر میل کند ، حکم قضیهٔ مذکور بدست میاید .

ازنظرانحنا ، دایره ساده‌ترین خم است ، زیرا خمیدگی‌آن مقدار ثابتی است . درخط مستقیم نیز انحنا مقداری ثابت و همواره برابر صفر است .

۱۰۲ - دستور انحنا در دستگاه مختصات قائم . - قضیه - اگر معادلهٔ خمی در دستگاه مختصات قائم داده شده باشد ،

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{B}$$

است . y' و y'' مشتقهای اول و دوم y نسبت به x میباشند .

اثبات - میدانیم :

$$\left(y'=\frac{dy}{dx}\right) \qquad \tau = arc\ tg\ y'$$

از دو طرف این رابطه نسبت به x مشتق میگیریم :

بنابر دستور XXII ی شمارهٔ ٦٠
$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2} \qquad (1)$$

اما بنابر رابطهٔ (۳) ی شمارهٔ ۹۵
$$\frac{ds}{dx}=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

دو طرف (۱) را به دو طرف (۲) تقسیم میکنیم ، رابطهٔ (B) بدست میاید .

تمرین - اگر y متغیر مستقل و x تابعی از y باشد ، نشان دهید که

$$K=\frac{-x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (C)$$

است . x' و x'' مشتقهای اول و دوم x نسبت به y میباشند .

اگر محاسبهٔ مشتق x نسبت به y ساده‌تر از محاسبهٔ مشتق y نسبت به x باشد ، بجای دستور (B) ، دستور (C) را بکار میبریم . نیز اگر y' بینهایت شود ، یعنی اگر در نقطهٔ P خط مماس به خم عمودی باشد ، دستور (B) نتیجهٔ صحیح نمیدهد . دراین حالت $x'=0$ است و دستور (C) ، $K=-x''$ را میدهد .

علامت K . - بنابر قرارداد در مخرج (B) همواره علامت + را اختیار میکنیم . دراین‌صورت K و y'' دارای‌یک علامت‌اند ، یعنی انحنا مثبت یا منفی است بسته به‌آنکه تقعر خم بسمت بالا یا بسمت پایین باشد .

مثال ۱- انحنای سهمی $y^2=4x$ را نخست در نقطهٔ (۲ , ۱) و سپس در رأس سهمی پیدا کنید .

حل-
$$y'=\frac{2}{y} \quad \text{و} \quad y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{y}\right)=-\frac{2y'}{y^2}$$

درنقطه (۲ , ۱) ، $y'=1$ و $y''=-\frac{1}{2}$ است . این مقادیر را در دستور (B)

میگذاریم ، $K=-\frac{\sqrt{۲}}{۸}=-۰{,}۱۷۷$ میشود . پس درنقطهٔ (۲ , ۱) تقعر خم بسمت پایین است و میل خط مماس با نرخ ۱۷۷ر۰ رادیان در واحد قوس تغییر میکند . چون ۱۷۷ر۰ رادیان $۱۰^{\circ}\,۷'$ است ، زاویهٔ بین دوخط مماس به خم در دو نقطهٔ $P(۱ , ۲)$ و Q ، بشرط آنکه طول قوس PQ برابر ۱ر۰ باشد ، تقریباً °۱۰ است .

مختصات رأس منحنی (۰ , ۰) و y' در آن نقطه بینهایت است ، پس دستور (C) را بکار میبریم : $x'=\frac{y}{۲}$ ، $x''=\frac{۱}{۲}$ و لذا $K=-\frac{۱}{۲}$ است .

مثال ۲ - انحنای سیکلوئید $x=a(\theta-\sin\theta)$ ، $y=a(۱-\cos\theta)$ را پیدا کنید (شمارهٔ ۸۱ را ببینید) .

حل - درمثال ۲ ی شمارهٔ ۸۱ مقدار y' را حساب کرده‌ایم :

$$y'=\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}$$

پس

$$۱+y'^{۲}=\frac{۲}{۱-\cos\theta}$$

در مثال شمارهٔ ۸۲ نیز مقدار y'' را پیدا کرده‌ایم :

$$y''=-\frac{۱}{a(۱-\cos\theta)^{۲}}$$

این دو مقدار را در (B) میگذاریم :

جواب :

$$K=-\frac{۱}{۲a\sqrt{۲-۲\cos\theta}}=-\frac{۱}{٤a\sin\frac{\theta}{۲}}$$

۱۰۳- دستور انحنا در معادلات پارامتری . - از دوطرف معادلهٔ (A) ی شمارهٔ ۸۱ نسبت به t مشتق میگیریم :

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{۲}} \qquad (۱)$$

اکنون دستور (B) ی شمارهٔ ۸۲ را بکار میبریم ، حاصل را در دستور (B) ی شمارهٔ ۱۰۲ میگذاریم و مختصر میکنیم :

$$K=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{D}$$

دراین دستور ' و " نشانهٔ مشتقهای اول و دوم نسبت به t میباشند ، یعنی

$$x'=\frac{dx}{dt} \quad , \quad x''=\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad y'=\frac{dy}{dt} \quad , \quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}$$

گرچه دستور (D) دستور مناسبی است ، ولی اغلب بهتراست مانند مثال ۲ ی شمارهٔ ۱۰۲ عمل کنیم ، یعنی y' را مانند شمارهٔ ۸۱ و y'' را مانند شمارهٔ ۸۲ پیدا نماییم و مستقیماً در دستور (B) بگذاریم .

۱۰۴- دستور انحنا در دستگاه مختصات قطبی . - قضیه - اگر معادلهٔ خمی در دستگاه مختصات قطبی داده شده باشد ، انحنای آن در هر نقطه بادستور

$$K=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{E}$$

تعیین میشود . ρ' و ρ'' بترتیب مشتقهای اول و دوم ρ نسبت به θ هستند .

اثبات - در مثلث OPT ، شکل ۶۴ ، $\tau=\theta+\psi$ است ، پس :

$$\frac{d\tau}{d\theta}=1+\frac{d\psi}{d\theta} \tag{1}$$

بنابر رابطهٔ (H) شمارهٔ ۸۵ ، $\psi=arc\ tg\ \frac{\rho}{\rho'}$ است و لذا

$$\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2+\rho^2}$$

اگر این مقدار را در رابطهٔ (۱) بگذاریم :

$$(۲)\qquad \frac{d\tau}{d\theta}=\frac{\rho^۲+۲\rho'^۲-\rho\rho''}{\rho^۲+\rho'^۲}$$

بنابر رابطهٔ (I) ی شمارهٔ ۹٦

$$(۳)\qquad \frac{ds}{d\theta}=(\rho^۲+\rho'^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

اگر دو طرف رابطهٔ (۲) را بردوطرف رابطهٔ (۳) تقسیم کنیم ، رابطهٔ (E) بدست میاید .

مثال - انحنای مارپیچ لگاریتمی $\rho=e^{a\theta}$ را پیدا کنید .

حل - $\frac{d\rho}{d\theta}=ae^{a\theta}=a\rho \quad , \quad \frac{d^۲\rho}{d\theta^۲}=a^۲e^{a\theta}=a^۲\rho$

اگر این دو مقدار را در (E) بگذاریم :

$$K=\frac{۱}{\rho\sqrt{۱+a^۲}}$$

۱۰۵- شعاع انحنا - بنابر تعریف ، معکوس انحنای خم در یک نقطه ، یعنی $\frac{۱}{K}$ را شعاع انحنای خم در آن نقطه مینامند و آن را با R نشان میدهند . پس بنابر دستور (B) :

$$(F)\qquad R=\frac{۱}{K}=\frac{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{y''}$$

مثال - شعاع انحنای منحنی زنجیر $y=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ را تعیین کنید (شکل خم را در فصل ۲٦ ببینید) .

حل - $y'=\frac{۱}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad , \quad y''=\frac{۱}{۲a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{y}{a^۲}$

$$۱+y'^۲=۱+\frac{۱}{٤}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^۲=\frac{۱}{٤}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^۲=\frac{y^۲}{a^۲}$$

پس
$$R=\frac{y^2}{a}$$

۱۰٦- خم ترانزیسیون . - در ریل گذاری راههای آهن ، به سبب سرعت زیاد قطارها ، نمیتوان یک قسمت مستقیم راه را یکباره به یک قسمت منحنی آن وصل کرد . به منظور آن که جهت حرکت متدرجاً عوض شود و قسمت مستقیم راه با خم مناسبی به قسمت منحنی آن متصل گردد ، از خمهایی به نام خمهای ترانزیسیون استفاده میکنند . در بسیاری از موارد ، خمهای ترانزیسیون سهمیهای درجهٔ سوم‌اند .

مثال - خم‌ترانزیسیون راه‌آهنی به شکل پاره قوسی از سهمی درجهٔ سوم $y=\frac{1}{3}x^3$ است . میزان تغییر جهت قطاری که روی این خم ترانزیسیون در حرکت است ، در نقاط $A(3\,,\,9)$ و $B(2\,,\,\frac{8}{3})$ و $C(1\,,\,\frac{1}{3})$ چقدراست؟ (واحد طول کیلومتر است .)

حل -
$$\frac{dy}{dx}=x^2 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2x$$

این مقادیر را در (B) میگذاریم :

$$K=\frac{2x}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

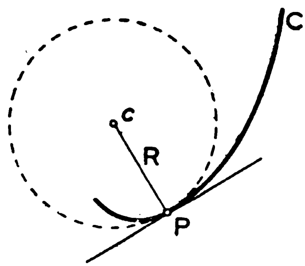
در نقطهٔ $A(3\,,\,9)$: $K=\frac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}}$ رادیان در کیلومتر $=$ ۲۸' درکیلومتر

در نقطهٔ $B(2\,,\,\frac{8}{3})$: $K=\frac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}}$ رادیان در کیلومتر $=$ ۳۰ ۱٦' درکیلومتر

در نقطهٔ $C(1\,,\,\frac{1}{3})$:

$K=\frac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ رادیان در کیلومتر $=$ ٤۰۰ ۳۰' درکیلومتر

۱۰۷- دایرهٔ انحنا - نقطهٔ دلخواه P را روی خم C درنظر میگیریم (شکل ۸۱) . میدانیم (شمارهٔ ۴۲) که شیب خط مماس به خم در نقطهٔ P همان شیب خم در نقطهٔ P است . به طریق مشابهی میتوان در هرنقطه از خم دایره‌ای به آن مماس کرد که انحنای آن همان انحنای منحنی در آن نقطه باشد . برای این کار خط قائم به خم در نقطهٔ P را در جهت تقعر خم رسم میکنیم . روی این خط قائم طول Pc رابه اندازهٔ R ، یعنی به اندازهٔ شعاع انحنای خم درنقطهٔ P جدا مینماییم وبه مرکز c دایره‌ای



شکل ۸۱

باشعاع Pc رسم میکنیم . دراین صورت انحنای این دایره ، $K=\frac{1}{R}$ ، همان انحنای منحنی در نقطهٔ P است و دایرهٔ رسم شده را **دایرهٔ انحنای** منحنی در نقطهٔ P مینامند .

بطورکلی دایرهٔ انحنای منحنی در یک نقطه ، چنانکه در شکل ۸۱ دیده میشود ، از خم عبور میکند . [با مماس در نقطهٔ عطف مقایسه کنید (شمارهٔ ۵۷) .]

همانطورکه خط مماس به منحنی درنقطهٔ P جهت خم را دراین نقطه نشان میدهد ، دایرهٔ انحنای خم در نقطهٔ P نیز ، چون مقدار تغییر جهت منحنی و دایرهٔ انحنا یکی است ، به استنباط هندسی انحنای منحنی در نقطهٔ P کمک میکند .

در شمارهٔ ۱۱۴ خواهیم دید که دایرهٔ انحنا نیزمانند خط مماس (شمارهٔ ۲۸) به منزلهٔ حد یک دایرهٔ قاطع تعریف میشود .

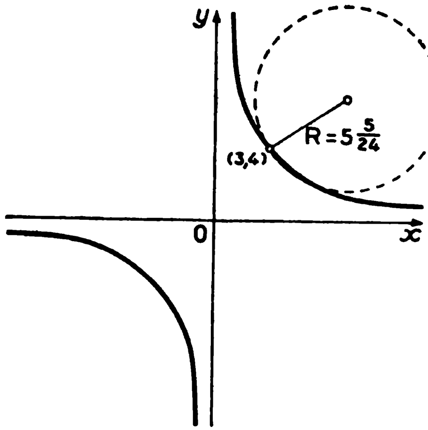
مثال ۱- هذلولی متساوی‌الساقین $xy=12$ را درنظر بگیرید ، شعاع انحنای آن را درنقطهٔ (۴ , ۳) پیدا کنید ودایرهٔ انحنای خم را درنقطهٔ مذکور رسم نمایید (شکل ۸۲) .

حل- $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

در نقطهٔ (۴ , ۳) : $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8}{9}$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$

پس
$$R=\frac{\left(۱+\frac{۱۶}{۹}\right)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۸}{۹}}=\frac{۱۲۵}{۲۴}=۵\frac{۵}{۲۴}$$

این دایرهٔ انحنا در دو نقطه ازمنحنی عبور میکند .



شکل ۸۲

مثال ۲- شعاع انحنای هذلولی $x^۲+۴xy-۲y^۲=۱۰$ را در نقطهٔ $(۲ , ۱)$ پیدا کنید .

حل - از تابع ضمنی مذکور نسبت به x مشتق میگیریم :

$$x+۲y+۲xy'-۲yy'=۰$$

y و y' را توابعی ضمنی از x درنظر میگیریم و مجدداً از تساوی اخیر نسبت به x مشتق میگیریم :

$$۱+۴y'-۲y'^۲+۲(x-y)y''=۰$$

در دو معادلهٔ اخیر بجای x ، ۲ و بجای y ، ۱ میگذاریم :

$$y'=-۲ \quad , \quad y''=\frac{۱۵}{۲}$$

پس بنابر دستور (F) $R=\frac{۲}{۳}\sqrt{۵}$

روشی راکه دراین مثال بکار بردیم (و y و y' را توابعی ضمنی درنظر گرفتیم) ، مواقعی بکار میرود که مقدار عددی y' و y'' مورداحتیاج باشد ، نه مواقعی که مقادیرآنها به صورت توابعی از x و y لازم است .

تمرین

خم نمایش هریک از معادلات زیر را رسم کنید ، شعاع انحنای هرخم را در نقطهٔ داده شده پیدا نمایید و دایرهٔ انحنای نظیر به نقطهٔ مذکور را رسم کنید :

۱) $۲y=x^۲$ در نقطهٔ $(۰ , ۰)$ ، جواب : $R=۱$

۲) $۶y=x^۳$ در نقطهٔ $(\frac{۴}{۳} , ۲)$ $R=\frac{۵}{۲}\sqrt{۵}$

۳) $y^۲=x^۳$ در نقطهٔ $(۱ , ۱)$ $R=\frac{۱۳}{۶}\sqrt{۱۳}$

۴) $y=\sin x$ در نقطهٔ $(۱ , \frac{\pi}{۲})$ $R=۱$

۵) $y=e^x$ در نقطهٔ $(۱ , ۰)$ $R=۲\sqrt{۲}$

۶) $x^۲-۴y^۲=۹$ در نقطهٔ $(۲ , ۵)$

۷) $y^۲=x^۳+۸$ در نقطهٔ $(۱ , ۳)$

۸) $y=۲\sin ۲x$ در نقطهٔ $(۲ , \frac{\pi}{۴})$

۹) $y=tg\, x$ در نقطهٔ $(۱ , \frac{\pi}{۴})$

شعاع انحنای هریک از خمهای زیر رادر نقطهٔ $(x_۱ , y_۱)$ حساب کنید :

۱۰) $y=x^۳$ جواب : $R=\dfrac{(۱+۹x_۱^۴)^{\frac{۳}{۲}}}{۶x_۱}$

۱۱) $y^۲=۲px$

۱۲) $b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲$ $R=\dfrac{(b^۴x_۱^۲+a^۴y_۱^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{a^۴b^۴}$

۱۳) $b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲$

۱۴) $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{۱}{۲}}$ $R=\dfrac{۲(x_۱+y_۱)^{\frac{۳}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۲}}}$

۱۵) $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ $R=۳(ax_۱y_۱)^{\frac{۱}{۳}}$

۱۶) $x=r\ arc\ vers\ \dfrac{y}{r}-\sqrt{۲ry-y^۲}$ $R=۲\sqrt{۲ry_۱}$

۱۷) $y=\ln \sec x$ $R=\sec x_۱$

۱۸) اگر نقطهٔ تماس خط مماس به سهمی $y^۲=۸x$ روی خم حرکت کند و از نقطهٔ(۴ , ۲) به‌اندازهٔ ۱ر۰ $=\Delta s$ دورشود ، خط مماس(تقریباً) به اندازهٔ چه زاویه‌ای میچرخد ؟ (از دیفرانسیل استفاده کنید.)

۱۹) میل خم $۲۷y=x^۳$ در نقطهٔ $A(۳ , ۱)$ ، ۴۵° است . با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی میل خم را در نقطهٔ B پیدا کنید. فاصلهٔ B از A ، روی خم ، برابر ۲ر۰ $=\Delta s$ است .

شعاع انحنای خمهای زیر را در نقطهٔ $(\theta_۱ , \rho_۱)$ پیدا کنید :

۲۰) دایرهٔ $\rho=a\sin\theta$ جواب : $R=\dfrac{a}{۲}$

۲۱) مارپیچ ارشمیدس $\rho=a\theta$ (شکل خمهای مربوط به مسائل ۲۱ تا ۲۴ را در فصل ۲۶ ببینید) .

جواب : $R=\dfrac{(\rho_1^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2+2a^2}$

۲۲) کاردیوئید $\rho=a(1-\cos\theta)$ $\qquad R=\dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho_1}$

۲۳) لمنیسکات $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ $\qquad R=\dfrac{a^2}{3\rho_1}$

۲۴) سهمی $\rho=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$ $\qquad R=2a\sec^3\dfrac{\theta_1}{2}$

۲۵) خم $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ $\qquad R=\dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta_1}{3}$

۲۶) تریسکتریس* $\rho=2a\cos\theta-a$ $\qquad R=\dfrac{a(5-4\cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}}{9-6\cos\theta_1}$

۲۷) هذلولی متساوی‌الساقین $\rho^2\cos 2\theta=a^2$ $\qquad R=\dfrac{\rho_1^3}{a^2}$

۲۸) مخروطی $\rho=\dfrac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$

$$R=\frac{a(1-e^2)(1-2e\cos\theta_1+e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos\theta_1)^3}$$

شعاع انحنای خمهای زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید . هریک از خمها ودایرهٔ انحنای نظیر به نقطهٔ مذکور را رسم نمایید :

۲۹) $x=2t$ ، $y=t^2-1$ در $t=1$ $\qquad$ جواب : $R=4\sqrt{2}$

۳۰) $x=3t^2$ ، $y=3t-t^3$ در $t=1$ $\qquad R=6$

* Trisectrix

۳۱) $x=۲e^{t}$ ، $y=۲e^{-t}$ در $t=۰$ — $R=۲\sqrt{۲}$

۳۲) $x=a\cos t$ ، $y=a\sin t$ در $t=t_۱$ — $R=a$

۳۳) $x=۲t$ ، $y=\frac{٤}{t}$ در $t=۱$

۳٤) $x=t^{۲}+۱$ ، $y=t^{۳}-۱$ در $t=۱$

۳۵) $x=٤\cos t$ ، $y=۲\sin t$ در $y=۱$

۳٦) $x=۲\sin t$ ، $y=\cos ۲t$ در $t=\frac{\pi}{٦}$

۳۷) $x=tg\, t$ ، $y=cotg\, t$ در $t=\frac{\pi}{٤}$

۳۸) $x=t-\sin t$ ، $y=۱-\cos t$ در $t=\pi$

۳۹) شعاع انحنای هیپوسیکلوئید $x=a\cos^{۳}t$ ، $y=a\sin^{۳}t$ را در نقطهٔ نظیر به $t=t_۱$ پیدا کنید. جواب: $R=۳a\sin t_۱\cos t_۱$

٤۰) معادلهٔ گسترندهٔ دایره عبارتست از

$$x=a(\cos t+t\sin t)$$

$$y=a(\sin t-t\cos t)$$

شعاع انحنای این خم را در نقطهٔ نظیر به $t=t_۱$ پیدا کنید. جواب: $R=at_۱$

٤۱) درکدام نقطه از خم $y=e^{x}$ انحنای خم حداکثر است؟

جواب: $x=-۰٫۳٤۷$

٤۲) درکدام نقطه از خم $۳y=x^{۳}-۲x$ انحنای خم حداکثر است؟

جواب: $x=\pm ۰٫۹۳۱$

٤۳) نشان دهید که شعاع انحنا در نقطهٔ عطف بینهایت است.

٤٤) خم $y=۳x-x^{۳}$ مفروض است:

الف ـ شعاع انحنای خم را در نقطهٔ ماکزیمم پیدا کنید و دایرهٔ انحنای آن نقطه را رسم نمایید.

ب ـ ثابت کنید که در نقطهٔ ماکزیمم انحنا حداکثر نیست .

پ ـ طول نقطه‌ای را که انحنا در آن حداکثر است با تقریب یک صدم واحد بدست آورید . جواب : $x=۰٫۰۱$

٤۵) خم نمایش $y=x^{٤}-۲x^{۲}$ را رسم نمایید ، شعاع انحنای آن را در نقاط ماکزیمم و مینیمم حساب کنید ، دوایر انحنای نظیر به این نقاط را رسم نمایید وسرانجام نقاطی از خم را پیدا کنید که شعاع انحنا در آنها حداقل است .

٤٦) نشان دهید که اگر در نقطهٔ P از خم $y=f(x)$ شعاع انحنا حداقل باشد ، در نقطهٔ مذکور رابطهٔ زیر برقرار است :

$$۳\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{۲}=\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\left[۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\right]$$

٤۷) نشان دهید که وقتی x از صفر تا $\frac{a}{۵}\sqrt[٤]{۱۲۵}$ صعود میکند ، انحنای سهمی درجهٔ سوم $۳a^{۲}y=x^{۳}$ از صفر تا «یک مقدار ماکزیمم» صعود مینماید. کمترین مقدار شعاع انحنا را بدست آورید . جواب : $۰٫۹۸۳a$

۱۰۸- مرکز انحنا ـ در نقطهٔ تماس ، منحنی و خط مماس دارای یک x و y و y' میباشند. دایرهٔ انحنا نیزدارای خاصیت مشابهی است . درنقطهٔ تماس ، منحنی و دایرهٔ انحنا دارای یک x و y و y' و y'' هستند .

تعریف - مرکز دایرهٔ انحنا در نقطهٔ $P(x , y)$ مرکز انحنای خم در نقطهٔ P است .

قضیه ـ (α , β) ، مختصات مرکز انحنا درنقطهٔ $P(x , y)$ عبارتنداز

$$\alpha=x-\frac{y'(۱+y'^{۲})}{y''} \quad , \quad \beta=y+\frac{۱+y'^{۲}}{y''} \qquad (G)$$

اثبات ـ معادلهٔ دایرهٔ انحنا در نقطهٔ $P(x , y)$

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲} \qquad (۱)$$

است (شکل ۸۳) . مقدار R با رابطهٔ (F) تعیین میگردد . از دو طرف (۱) نسبت به x مشتق میگیریم :

$$y'=-\frac{x-\alpha}{y-\beta} \quad , \quad y''=-\frac{R^{۲}}{(y-\beta)^{۳}} \qquad (۲)$$

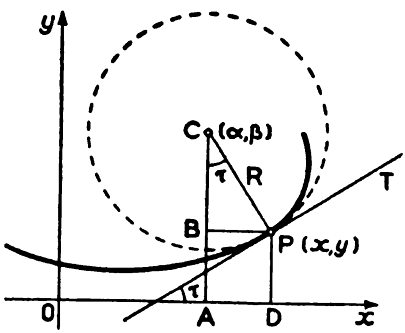
در معادلهٔ دوم سطر اخیر بجای R مقدارش را از رابطهٔ (F) میگذاریم ، پس از اختصار داریم :

$$(y-\beta)^{۳}=-\frac{(۱+y'^{۲})^{۳}}{y''^{۳}} \quad => \quad y-\beta=-\frac{۱+y'^{۲}}{y''} \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطهٔ اخیر و معادلهٔ اول (۲) داریم :

$$x-\alpha=-y'(y-\beta)=\frac{y'(۱+y'^{۲})}{y''} \qquad (٤)$$

α را از معادلهٔ (٤) و β را ازمعادلهٔ (۳) پیدا میکنیم ، دستورهای (G) بدست میایند .



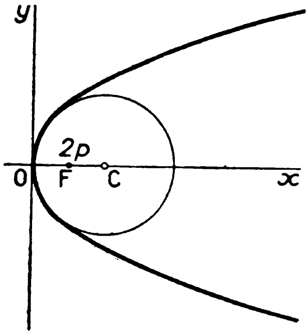
شکل ۸۳

تمرین ۱ـ دستورهای (G) را با کمک شکل ۸۳ و با استفاده ازدستورهای (G) ی شمارهٔ ۹۰ مستقیماً بدست آورید ($\alpha=x-R\sin\tau$ ، $\beta=y+R\cos\tau$ و غیره) .

تمرین ۲ـ نشان‌دهید که اگر x' و x'' بترتیب مشتقهای اول و دوم x نسبت به y باشند ، دستورهای (G) به صورت زیر درمیایند :

$$\alpha=x+\frac{۱+x'^{۲}}{x''} \quad , \quad \beta=y-\frac{x'(۱+x'^{۲})}{x''} \qquad (H)$$

دستورهای (H) موقعی بکار میروند که y' بینهایت شود و یا مشتق گیری نسبت به y آسانتر باشد .



شکل ۸٤

مثالـ مختصات مرکز انحنای سهمی $y^2 = 4px$ را : (الف) دریک نقطهٔ اختیاری و (ب) در رأس سهمی بدست آورید .

حل ـ دستورهای (H) را بکار میبریم .

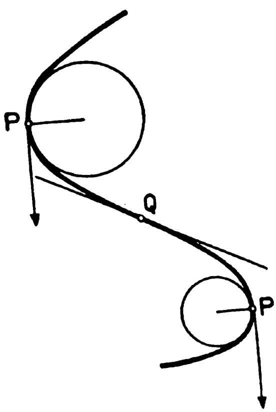
چون $x' = \frac{y}{2p}$ و $x'' = \frac{1}{2p}$ است ، پس

$$\alpha = x + \frac{y^2 + 4p^2}{2p} = 3x + 2p$$

$$\beta = y - \frac{y(y^2 + 4p^2)}{4p^2} = -\frac{y^3}{4p^2}$$

بنابراین (الف) مختصات مرکز انحنای خم در یک نقطهٔ اختیاری عبارتند از $\left(3x + 2p \; , \; -\frac{y^3}{4p^2}\right)$.

(ب) مختصات راس سهمی $(0 , 0)$ و لذا مختصات مرکز انحنای خم در آن نقطه $(2p , 0)$ است .



شکل ۸۵

بنابر شمارهٔ ۵۷ میدانیم که در نقطهٔ عطف (مانند نقطهٔ Q در شکل ۸۵)

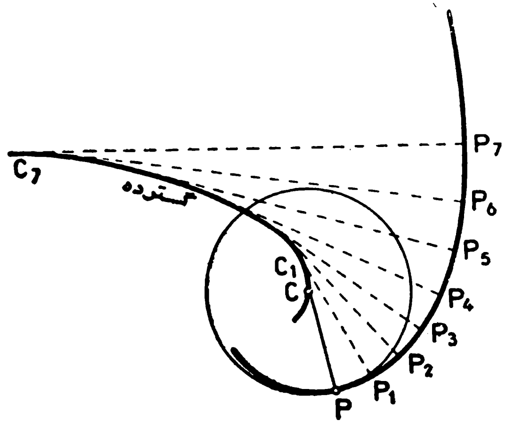
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

است. پس بنابررابطهٔ (B) ی شمارهٔ ۱۰۲ انحنا صفر است $(K = 0)$ و بنابر رابطهٔ (F) شمارهٔ ۱۰۵ وروابط (G) ی شمارهٔ ۱۰۸ ، وقتی مشتق دوم بسمت‌صفرمیل‌نماید ، مقادیر α و β و R بسمت‌بینهایت میل میکنند ، مگرآنکه خط مماس موازی محور y ها باشد . اکنون اگر نقطهٔ P بسمت نقطهٔ P' حرکت کند و در هرلحظه

مماس به خم در نقطهٔ P را درنظر بگیریم ، در نقطهٔ Q که یک نقطهٔ عطف است ، انحنا صفر است ، حرکت‌دورانی‌خط مماس موقتاًقطع میشود ، جهت‌دوران عوض میگردد ، مرکز انحنا بینهایت دور میشود و طول شعاع انحنا بسمت بینهایت میل میکند .

۱۰۹ - گسترده * . - مکان مراکز انحنای یک منحنی ، **گستردهٔ** آن منحنی است.

دایرهٔ انحنای نقطهٔ P را درنظر میگیریم (شکل ۸۶) . اگر نقطهٔ P روی خم حرکت کند ، میتوان فرض نمود که دایرهٔ انحنای منحنی نیز با P روی خم میغلتد . شعاع این دایره که مرتباً عوض میشود ، در هرلحظه برابر شعاع انحنای خم در نقطهٔ P است . خم CC_7 که با تغییرمکان مرکز دایره بوجود میاید ، گستردهٔ خم PP_7 است .



شکل ۸۶

دستورهای (G) و (H) شمارهٔ ۱۰۸ مختصات هرنقطهٔ گسترده ، (α , β) ، را برحسب توابعی‌ازمختصات نقطهٔ نظیر ازخم ، (x , y) ، میدهند . اما چون y تابعی از x است ، این دستورها معادلات پارامتری گسترده را میدهند (و x پارامتر آنهاست) .

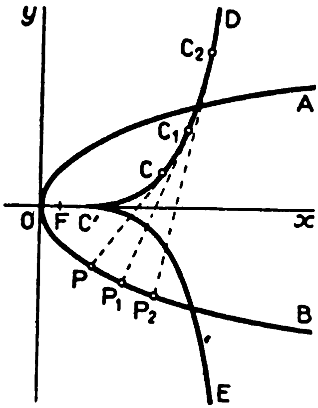
برای‌پیدا کردن معادلهٔ گسترده در دستگاه مختصات‌قائم ، x و y را بین‌این‌دودستور و معادلهٔ خم داده شده حذف میکنیم . برای حذف x و y روشی نیست که بتوان آن را در تمام حالات بکار برد . ما در زیر طریقی ارائه میکنیم که اغلب نتیجه بخش است.

دستورالعمل کلی برای تشکیل معادلهٔ گسترده دردستگاه مختصات قائم .

* Evolute

عمل اول : با استفاده از دستورهای (G) یا (H) شمارهٔ ۱۰۸ ، α و β را پیدا میکنیم .

عمل دوم : دو معادلهٔ بدست آمده را حل میکنیم و x و y را برحسب α و β بدست میاوریم .



شکل ۸۷

عمل سوم : این مقادیر x و y را در معادلهٔ داده شده میگذاریم و خلاصه میکنیم ، رابطه‌ای بین متغیرهای α و β بدست میاید که همان معادلهٔ گسترده است.

مثال ۱ - معادلهٔ گستردهٔ سهمی $y^2=4px$ را پیداکنید (شکل ۸۷) .

حل -

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}\quad,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4p^2}{y^3}$$

عمل اول - $\alpha=3x+2p\quad,\quad \beta=-\dfrac{y^3}{4p^2}$

عمل دوم - $x=\dfrac{\alpha-2p}{3}\quad,\quad y=-(4p^2\beta)^{\frac{1}{3}}$

عمل سوم - $(4p^2\beta)^{\frac{2}{3}}=4p\left(\dfrac{\alpha-2p}{3}\right)$

یا

$$p\beta^2=\frac{4}{27}(\alpha-2p)^3$$

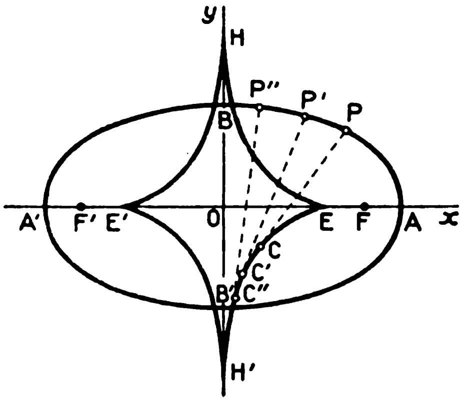
میدانیم که α طول و β عرض نقاط گسترده در یک دستگاه قائم است . ضمناً می‌بینیم که گستردهٔ سهمی AOB ، سهمی سمی‌کوبیک * DC'E و مراکز انحنای نقاط O ، P ، P_1 ، P_2 بترتیب C' ، C ، C_1 ، C_2 هستند .

* Semicubical parabola

مثال ۲- معادلهٔ گستردهٔ بیضی

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

را پیدا کنید .



شکل ۸۸

حل - $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$

عمل اول - $\alpha=\dfrac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}$, $\beta=-\dfrac{(a^2-b^2)y^3}{b^4}$

عمل دوم - $x=\left(\dfrac{a^4\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y=-\left(\dfrac{b^4\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

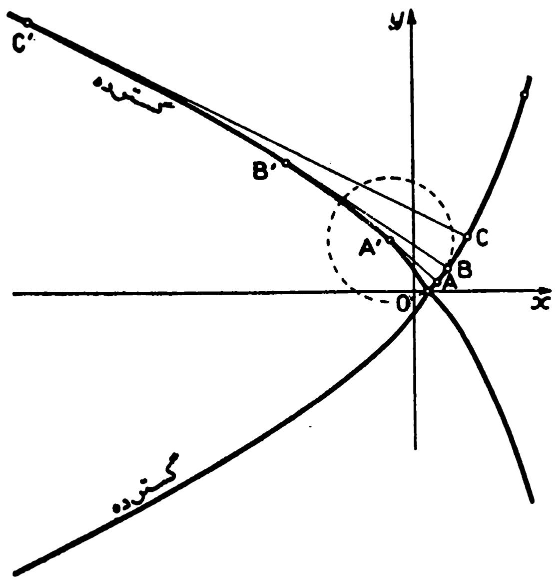
عمل سوم - $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$

رابطهٔ اخیر معادلهٔ خم EHE'H' یعنی معادلهٔ گستردهٔ بیضی ABA'B' است . نقاط E ، E' ، H' ، H بترتیب مراکز انحنای نظیر به‌نقاط A ، A' ، B ، B' ونقاط C ، C' ، C" بترتیب نظیر به نقاط P ، P' ، P" میباشند .

مثال ۳- معادلات پارامتری خمی عبارتند از

$$x=\frac{t^۲+۱}{۴} \quad , \quad y=\frac{t^۳}{۶} \qquad (۱)$$

معادلهٔ پارامتری گستردهٔ آن‌را پیدا کنید ، منحنی و گستردهٔ آن را رسم نمایید ، شعاع انحنای خم را در نقطهٔ نظیر به $t=۱$ بدست آورید و دایرهٔ انحنای این نقطه را رسم کنید .



شکل ۸۹

حل - $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{۲} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\frac{t^۲}{۲} \quad \Longrightarrow \quad y'=t$

بنابر رابطهٔ (B) ی شمارهٔ ۸۲ $\quad \frac{dy'}{dt}=۱ \quad \Longrightarrow \quad y''=\frac{۲}{t}$

این مقادیر را در دستورهای (G) میگذاریم :

$$\alpha=\frac{۱-t^۲-۲t^۴}{۴} \quad , \quad \beta=\frac{۴t^۳+۳t}{۶} \qquad (۲)$$

اینها معادلات پارامتری گستردهاند . به t مقادیر مختلف میدهیم و مقادیر x و y را از روابطه (۱) و α و β را از روابط (۲) پیدا میکنیم و در جدولی مینویسیم (جدول زیر) ، سپس منحنی و گستردهٔ آن را رسم مینماییم (شکل ۸۹) .

t	x	y	α	β
-۳	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۹}{۲}$		
-۲	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۳۵}{۴}$	$-\frac{۱۹}{۳}$
$-\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱۳}{۱۶}$	$-\frac{۹}{۱۶}$	$-\frac{۹۱}{۳۲}$	-۳
-۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۷}{۶}$
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰
۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۶}$
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱۳}{۱۶}$	$\frac{۹}{۱۶}$	$-\frac{۹۱}{۳۲}$	۳
۲	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۳۵}{۴}$	$\frac{۱۹}{۳}$
۳	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$		

نقطهٔ $(۰ \ , \ \frac{۱}{۴})$ هم روی منحنی و هم‌روی گستردهٔآن است. خم‌داده شده(سهمی سمی کوبیک) تماماً درطرف راست وگستردهٔ آن تماماً در طرف چپ خط $x=\frac{۱}{۴}$ قراردارد.

دایرهٔ انحنای نقطهٔ $A(\frac{۱}{۲} \ , \ \frac{۱}{۶})$ که‌نظیربه $t=۱$ است،به‌مرکز $A'(-\frac{۱}{۲} \ , \ \frac{۷}{۶})$ و به شعاع AA' است . نقطهٔ A روی منحنی و نقطهٔ A' روی گسترده است . برای

آزمودن درستی این نتایج شعاع انحنای نقطهٔ A را حساب میکنیم . بنابر رابطهٔ (F) شمارهٔ ۱۰۵ داریم :

$$R=\frac{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2} \qquad (t=1)$$

این مقدار همان فاصلهٔ AA' است :

$$AA'=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{7}{6}\right)^2}=\sqrt{2}$$

مثال ٤ - معادلات پارامتری گستردهٔ سیکلوئید زیر را پیدا کنید :

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (3)$$

حل - مانند مثال مذکور در شمارهٔ ۸۲ داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

این مقادیر را در روابط (G) ی شمارهٔ ۱۰۸ میگذاریم ، داریم :

جواب : .
$$\begin{cases} \alpha=a(t+\sin t) \\ \beta=-a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (4)$$

یادداشت - اگر t را بین روابط (٤) حذف کنیم ، معادلهٔ قائم گسترده (یعنی معادلهٔ قائم $OO'Q^7$) نسبت‌به محورهای $O'\alpha$ و $O'\beta$ بدست میاید . مختصات نقطهٔ O نسبت به این محورها عبارتند از $(-\pi a , -2a)$. تغییر دستگاه مختصات میدهیم و صورت معادلات (٤) را در دستگاه جدید xOy پیدا میکنیم ، داریم :

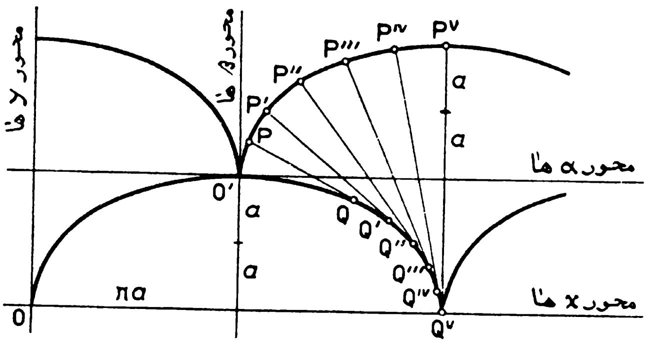
$$\alpha=x-\pi a \quad , \quad \beta=y-2a$$

نیز تغییر متغیر
$$t=t'-\pi$$

میدهیم . این مقادیر را در معادلات (٤) میگذاریم و ساده میکنیم ، معادلات گسترده به صورت زیر در میاید :

$$\begin{cases} x=a(t'-\sin t') \\ y=a(1-\cos t') \end{cases} \quad (5)$$

چون شکل معادلات (٥) و (٣) کاملاً یکی است ، میتوان گفت که : **گستردهٔ یك سیکلوئید سیکلوئیدی‌است که دایرهٔ مولدش همان‌دایرهٔ مولد سیکلوئید داده شده است .**



شکل ۹۰

۱۱۰- خواص گسترده - گستردهٔ هر خم دارای دو خاصیت جالب توجه است .

قضیهٔ ۱ ـ اگر $C(\alpha, \beta)$ مرکز انحنای نقطهٔ $P(x, y)$ باشد ، قائم به خم در نقطهٔ P ، در نقطهٔ C به گسترده مماس است (شکلهای شمارهٔ قبل را ببینید) .

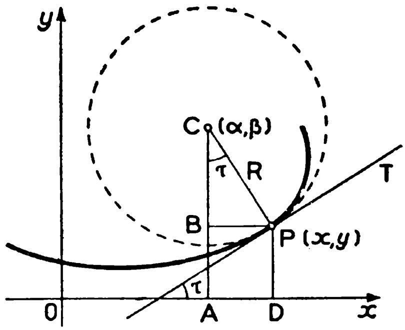
اثبات - با توجه به شکل ۹۱

$$\begin{aligned} \alpha &= x - R\sin\tau \\ \beta &= y + R\cos\tau \end{aligned} \quad (1)$$

خط PC واقع برامتداد قائم به خم است و

$$[\text{شیب قائم به خم در } P] = -\frac{1}{tg\,\tau} = \frac{y-\beta}{x-\alpha} = \text{شیب خط } PC \quad (2)$$

اکنون نشان میدهیم که شیب گسترده در نقطهٔ C همان شیب PC است . روشن است که



شکل ۹۱

$$\text{شیب گسترده} = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

زیرا α و β مختصات نقاط گسترده در دستگاه مختصات قائم است . طول قوس خم داده شده را متغیر مستقل فرض میکنیم . در این صورت x ، y ، R ، τ ، α و β توابعی از s میشوند . از روابط (۱) نسبت به s مشتق میگیریم :

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{dx}{ds}-R\cos\tau\,\frac{d\tau}{ds}-\sin\tau\,\frac{dR}{ds} \qquad (۳)$$

$$\frac{d\beta}{ds}=\frac{dy}{ds}-R\sin\tau\,\frac{d\tau}{ds}+\cos\tau\,\frac{dR}{ds} \qquad (٤)$$

اما بنابرشمارهٔ ۹۵ ، $\frac{dx}{ds}=\cos\tau$ ، $\frac{dy}{ds}=\sin\tau$ و نیز $\frac{d\tau}{ds}=\frac{۱}{R}$. این مقادیر را در روابط (۳) و (٤) میگذاریم و خلاصه میکنیم :

$$\frac{d\alpha}{ds}=-\sin\tau\,\frac{dR}{ds} \quad , \quad \frac{d\beta}{ds}=\cos\tau\,\frac{dR}{ds} \qquad (۵)$$

دوطرف رابطهٔ سمت راست را به دو طرف رابطهٔ سمت چپ تقسیم میکنیم :

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\cot g\,\tau=-\frac{۱}{tg\,\tau}=[\text{شیب خط PC}] \qquad (٦)$$

قضیهٔ ۲- طول هرپاره قوس ازگسترده برابر است با تفاضل شعاعهای انحنایی از خم داده شده که دردوانتهای این قوس به‌گسترده مماسند بشرط آنکه‌شعاع انحنادر امتداد قوس خم‌داده شده همواره در یك جهت تغییر کند .

اثبات - دو طرف معادلات (٥) را مجذور و سپس باهم جمع میکنیم :

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^{2}+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^{2}=\left(\frac{dR}{ds}\right)^{2} \qquad (٧)$$

اما اگر s' طول قوس گسترده باشد ، بنابررابطهٔ (C) ی شمارهٔ ٩٥

$$ds'^{2}=d\alpha^{2}+d\beta^{2}$$

$$[s=s' \ , \ x=\alpha \ , \ y=\beta]$$

با توجه به تساوی اخیر رابطهٔ (٧) به صورت زیر در میاید :

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^{2}=\left(\frac{dR}{ds}\right)^{2} \quad \text{یا} \quad \frac{ds'}{ds}=\pm\frac{dR}{ds} \qquad (٨)$$

اگر پاره قوسی از خم داده شده را درنظر بگیریم که در طول آن علامت طرف راست معادلهٔ بالا عوض نشود ، داریم :

$$\frac{ds'}{dR}=+1 \quad \text{یا} \quad \frac{ds'}{dR}=-1 \qquad (٩)$$

بنابراین نرخ تغییر طول قوس گسترده نسبت به R برابر ۱+ یا ۱− است
و بنابر شمارهٔ ٥٠ ، قدر مطلق نموهای نظیر s' و R باهم برابرند . بدین‌ترتیب :

$$s'-s_0'=\pm(R-R_0) \qquad (١٠)$$

یا (شکل ٨٦ را ببینید) $\quad CC_1$ طول قوس $=\pm(P_1C_1-PC)$

و حکم قضیه محقق است .

منجمله درمثال ٤ شمارهٔ ١٠٩ ، درنقطهٔ O' ، $R=0$ ودرنقطهٔ P^{v} ، $R=4a$
و لذا طول قوس $O'QQ^{v}$ برابر $4a$ است و میتوان گفت که :

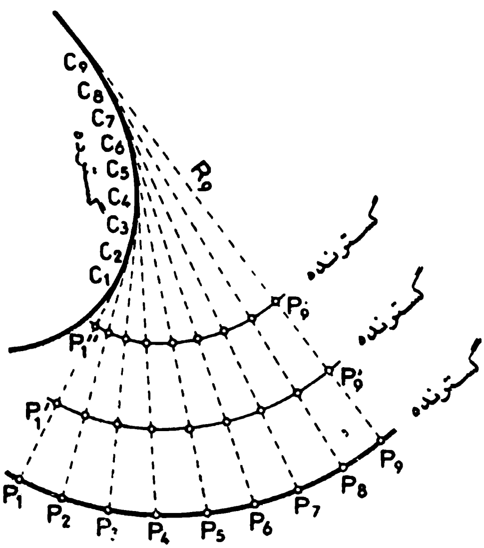
طول یك طاق نمای سیکلوئید (مانند $OO'Q^{v}$) هشت برابر طول شعاع دایرهٔ مولد آن است .

١١١- گسترنده * و روش عملی ترسیم آن . - اگر یک خط‌کش نرم فلزی

---

* Involute

را به شکل خم C_1C_9 که گستردهٔ خم P_1P_9 است در آورده باشیم ویک سرنخی را که به طول R_9 است در نقطهٔ C_9 محکم کرده باشیم و سر دیگر آن را که P_9 است محکم بکشیم وبسمت نقطهٔ P_1 حرکت دهیم بطوریکه قسمتی از نخ دور خط کش بپیچد (یعنی روی خم C_1C_9 قرارگیرد) ، بنابر شمارهٔ اخیر روشن است که وقتی نخ بازمیشود ، سرآزاد آن خمی مانند P_1P_9 میپیماید که C_1C_9 گستردهٔآن است. انتخاب نام **گسترده** نیز به همین سبب است .



شکل ۹۲

خم P_1P_9 گسترندهٔ خم C_1C_9 است. روشن است که هرنقطهٔ نخ یک گسترنده رسم میکند بطوریکه هرخم دارای بینهایت گسترنده و تنها دارای یک گسترده است .

گسترنده‌های P_1P_9 ، $P'_1P'_9$ ، $P''_1P''_9$ موازی یکدیگرند زیرا فاصلهٔ بین آنها که روی قائم مشترکشان اندازه گرفته میشود ، مقدار ثابتی است .

به سهمی و بیضی صفحه‌های ۲۵۸ و ۲۵۹ توجه کنید و ببینید که این سهمی وبیضی به چه ترتیب ازگسترده‌هایشان بدست میایند .

تمرین

درهریک ازخمهای زیر شعاع ومرکز انحنا را در نقطهٔ داده شده پیدا کنید. درستی نتایجتان را به این ترتیب بیازمایید که : (الف) مرکز انحنای خم درهرنقطه ، واقع برقائم به خم درآن نقطه است . (ب) فاصلهٔ هرنقطهٔ خم تا مرکز انحنای نظیرش برابر شعاع انحنای خم درآن نقطه است .

۱) $2py=x^2$ در نقطهٔ $(0 , 0)$ جواب : $(0 , p)$

۲) $x^2+4y^2=25$ در نقطهٔ $(3 , 2)$ $\left(\frac{81}{100} , -\frac{96}{25}\right)$

۳) $x^3-y^3=19$ در نقطهٔ $(3 , 2)$ $\left(\frac{519}{76} , \frac{17}{57}\right)$

۴) $xy=6$ در نقطهٔ $(2 , 3)$ $\left(\frac{63}{12} , \frac{31}{6}\right)$

۵) $y=e^x$ در نقطهٔ $(0 , 1)$ $(-2 , 3)$

۶) $y=\cos x$ در نقطهٔ $(0 , 1)$ $(0 , 0)$

۷) $y=\ln x$ در نقطهٔ $(1 , 0)$ $(3 , -2)$

۸) $y=2\sin 2x$ در نقطهٔ $\left(\frac{\pi}{4} , 2\right)$ $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{15}{8}\right)$

۹) $(x+6)^3+xy^2=0$ در نقطهٔ $(-3 , 3)$ $(-13 , 8)$

۱۰) $2y=x^2-4$ در نقطهٔ $(0 , -2)$

۱۱) $xy=x^2+2$ در نقطهٔ $(2 , 3)$

۱۲) $y=\sin \pi x$ در نقطهٔ $\left(\frac{1}{2} , 1\right)$

۱۳) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$ در نقطهٔ $\left(\frac{\pi}{8} , \frac{1}{2}\right)$

در خمهای زیر مختصات مرکز انحنا را در نقطهٔ دلخواه (x, y) پیدا کنید :

۱۴) $y^2=2px$ جواب : $\beta=-\frac{y^3}{p^2}$, $\alpha=\frac{3y^2+2p^2}{2p}$

۱۵) $y^3=a^2x$ $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$, $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$

۱۶) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$, $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$

۱۷) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

۱۸) خم $xy=4$ مفروض است . دو نقطهٔ $(4, 1)$ و $(2, 2)$ را درنظر بگیرید ، شعاع و مرکز انحنای خم را دراین دو نقطه پیدا کنید ، گستردهٔ نظیر به پاره خم محدود به این دو نقطه را رسم نمایید و طول پاره خم اخیر را بدست آورید .

جواب : در نقطهٔ $(4, 1)$: $\beta=\frac{49}{8}$, $\alpha=\frac{19}{2}$, $R_1=\frac{17\sqrt{17}}{8}$

در نقطهٔ $(2, 2)$: $\beta=4$, $\alpha=4$, $R_2=2\sqrt{2}$

$R_1-R_2=5{,}933$

معادلات پارامتری گستردهٔ هریک ازخمهای زیر را برحسب پارامتر t پیدا کنید ، خم وگستردهٔ آن را رسم نمایید و اقلاً یکی از دایره‌های انحنایش را بکشید :

جواب

۱۹) $x=3t^2$ ، $y=3t-t^3$ $\beta=-4t^3$, $\alpha=\frac{3}{2}(1+2t^2-t^4)$

۲۰) $x=3t$ ، $y=t^2-6$ $\beta=3t^2-\frac{3}{2}$, $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$

۲۱) $x=6-t^2$ ، $y=2t$ $\beta=-2t^3$, $\alpha=4-3t^2$

۲۲) $x=۲t$ ، $y=t^{۲}-۲$ جواب : $\beta=۳t^{۲}$, $\alpha=-۲t^{۳}$

۲۳) $x=۴t$ ، $y=۳+t^{۲}$ $\beta=۱۱+۳t^{۲}$, $\alpha=-t^{۳}$

۲۴) $x=۹-t^{۲}$ ، $y=۲t$ $\beta=-۲t^{۳}$, $\alpha=۷-۳t^{۲}$

۲۵) $x=۲t$ ، $y=\frac{۳}{t}$ $\beta=\frac{۲۷+۴t^{۴}}{۶t}$, $\alpha=\frac{۱۲t^{۴}+۹}{۴t^{۳}}$

۲۶) $x=a\cos t$ ، $y=b\sin t$

$$\alpha=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a}\cos^{۳}t \quad , \quad \beta=\frac{b^{۲}-a^{۲}}{b}\sin^{۳}t$$

۲۷) $x=a\cos^{۳}t$ ، $y=a\sin^{۳}t$

$$\alpha=a\cos^{۳}t+۳a\cos t\sin^{۲}t \quad , \quad \beta=۳a\cos^{۲}t\sin t+a\sin^{۳}t$$

۲۸) $x=a(\cos t+t\sin t)$ ، $y=a(\sin t-t\cos t)$

$$\alpha=a\cos t \quad , \quad \beta=a\sin t$$

۲۹) $x=۴-t^{۲}$ ، $y=۲t$ ۳۰) $x=۲t$ ، $y=۱۶-t^{۲}$

۳۱) $x=t^{۲}$ ، $y=\frac{۱}{۹}t^{۳}$

۳۲) $x=۱-\cos t$ ، $y=t-\sin t$

۳۳) $x=\cos^{۴}t$ ، $y=\sin^{۴}t$ ۳۴) $x=a\sec t$ ، $y=b\,tg\,t$

۳۵) $x=\cos t$ ، $y=t$ ۳۶) $x=۶\sin t$ ، $y=۳\cos t$

۳۷) $x=۳\,cosec\,t$ ، $y=۴\,cotg\,t$

۳۸) $x=a(t+\sin t)$ ، $y=a(۱-\cos t)$

۳۹) $x=۲\cos t+\cos ۲t$ ، $y=۲\sin t+\sin ۲t$

۴۰) نشان دهید که درسهمی $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{۱}{۲}}$ رابطهٔ $\alpha+\beta=۳(x+y)$ برقرار است .

۴۱) هذلولی متساوی‌الساقین $2xy=a^2$ مفروض است. نشان دهید که :

$$\alpha+\beta=\frac{(y+x)^3}{a^2} \quad , \quad \alpha-\beta=\frac{(y-x)^3}{a^2}$$

از دو رابطهٔ اخیر معادلهٔ گستردهٔ هذلولی مذکور را نتیجه بگیرید :

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}-(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$$

۱۱۲- تغییر متغیر در مشتق . - بعضی ازدستورها را که تا کنون مستقیماً بدست آورده‌ایم ، میتوانیم بااستفاده ازروابط موجود بین مشتقها از دستورهای دیگر بدست آوریم. دو مثال زیر نمونه‌ای از آن است .

تعویض متغیر مستقل و تابع . - اگر

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad , \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2} \quad , \ldots$$

و

$$x'=\frac{dx}{dy} \quad , \quad x''=\frac{dx'}{dy}=\frac{d^2x}{dy^2} \quad , \ldots$$

باشد ، بنابر رابطهٔ IX شمارهٔ ۲۹

$$y'=\frac{1}{x'} \qquad \text{(I)}$$

اما

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dy}}{x'}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) داریم :

$$\frac{dy'}{dy}=-\frac{x''}{x'^2}$$

پس

$$y''=-\frac{x''}{x'^3} \qquad \text{(J)}$$

به همین ترتیب

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{\frac{dy''}{dy}}{x'}$$

با استفاده از رابطهٔ (J)
$$\frac{dy''}{dy}=-\frac{x'x'''-3x''^{2}}{x'^{4}}$$

پس
$$y'''=-\frac{x'x'''-3x''^{2}}{x'^{5}} \qquad (K)$$

به همین ترتیب میتوان مشتقهای مراتب بالاتر را پیدا کرد و با استفاده از این دستورها میتوان معادلاتی را که برحسب y' ، y'' ، y''' ، ... هستند ، به صورت معادلاتی برحسب x' ، x'' ، x''' ، ... درآورد .

مثال - دستور(B) ی شمارهٔ ۱۰۲ را به صورت‌دستور(C) ی همان شماره درآورید.

حل - روابط (I) و (J) ی بالا را بکار میبریم :

جواب :
$$K=\frac{y''}{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\frac{x''}{x'^{3}}}{\left(1+\frac{1}{x'^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x''}{(1+x'^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

تبدیل مختصات قائم به مختصات قطبی . - بین مختصات قائم و مختصات قطبی یک نقطه روابط زیر برقرار است :

$$x=\rho\cos\theta \quad , \quad y=\rho\sin\theta \qquad (1)$$

اگر $\rho=f(\theta)$ معادلهٔ قطبی یک خم باشد ، معادلات (۱) معادلات پارامتری آن خم و θ پارامتر آنهاست .

θ را متغیر مستقل فرض میکنیم و مشتقهای اول و دوم x و y و ρ را نسبت به θ بترتیب با x' ، x'' ، y' ، y'' ، ρ' و ρ'' نشان میدهیم .

از دو طرف رابطهٔ (۱) نسبت به θ مشتق میگیریم :

$$x'=-\rho\sin\theta+\rho'\cos\theta \quad , \quad y'=\rho\cos\theta+\rho'\sin\theta \qquad (2)$$

$$x''=-2\rho'\sin\theta+(\rho''-\rho)\cos\theta \quad , \quad y''=2\rho'\cos\theta+(\rho''-\rho)\sin\theta \qquad (3)$$

با کمک‌روابط (۱) و (۲) و (۳) میتوان معادلاتی‌را که برحسب x ، y ، x' ، y' ، x'' و y'' هستند ، به معادلاتی از θ ، ρ ، ρ' و ρ'' تبدیل کرد .

مثال - دستور (E) ی شمارهٔ ۱۰۴ را مستقیماً از دستور (D) ی شمارهٔ ۱۰۳ بدست آورید .

حل - صورت و مخرج (D) را جداگانه درنظر میگیریم ، روابط (۲) و (۳) را بکار میبریم ، پس‌از اختصار داریم :

$$x'y''-y'x''=\rho^{۲}+۲\rho'^{۲}-\rho\rho'' \quad , \quad x'^{۲}+y'^{۲}=\rho^{۲}+\rho'^{۲}$$

این مقادیر را در (D) میگذاریم ، (E) بدست میاید .

تمرین

معادلات ۱ تا ۵ را به صورت معادلاتی از y و x و مشتقهای متوالی x نسبت به y در آورید :

جواب

۱) $x\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+y\dfrac{dy}{dx}=۰$ $\qquad x\dfrac{d^{۲}x}{dy^{۲}}-y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{۲}=۰$

۲) $\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{۳}+(y-۲)\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۰$

$$۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}-(y-۲)\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}=۰$$

۳) $(y-۴)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{۳}+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۰$

$$\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}+y-۴=۰$$

۴) $xy\dfrac{d^{۳}y}{dx^{۳}}+y^{۲}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{۴}$

۵) $\left(\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)\left(\dfrac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\right)=y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{۴}$

۶) با تغییر متغیر $x=\rho\cos\theta$ ، $y=\rho\sin\theta$ کسر

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$ به چه صورتی درمیاید ؟ جواب : $$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$$

۷) با تغییر متغیر $x=\cos t$ معادلهٔ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0$$

به چه صورتی در میاید ؟ جواب : $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$

۸) با تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ معادلهٔ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^2}y=0$

به چه صورتی درمیاید ؟ جواب : $\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$

تمرین اضافی

۱) خم $x=3\cos t+\cos 3t$ ، $y=3\sin t-\sin 3t$ مفروض است . معادلات پارامتری گسترده ومرکز انحنای خم را در نقطهٔ نظیر به $t=0$ پیدا کنید . نشان دهید که این نقطه و نقطهٔ نظیرش از خم برهم منطبقند .

جواب : $\alpha=6\cos t-2\cos 3t$, $\beta=6\sin t+2\sin 3t$

۲) شعاع انحنای یک نقطهٔ دلخواه از بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را R و فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط مماس به بیضی در آن نقطه را D مینامیم . نشان دهید که $RD^3=a^2b^2$ است .

۳) x را پارامتر فرض کنید و معادلات گستردهٔ سهمی $y^2=4x$ را پیدا کنید . نقاطی از سهمی را تعیین نمایید که مراکز انحنایشان نیز نقاطی از سهمی باشد . طول پاره خمی ازگسترده را که داخل سهمی است حساب کنید .

جواب : $(2\ ,\ \pm 2\sqrt{2})$ ، $4(\sqrt{27}-1)$

۴) (الف) خمی است که ازنقطهٔ $(2,0)$ میگذرد و شیب آن در هر نقطه به مختصات (x,y)

برابر $\dfrac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$ است . نشان‌دهید که معادلهٔ این خم $ln(1+y)=1-\sqrt{5-x^2}$ است .

(ب) انحنای خم را در نقطهٔ مذکور حساب کنید و در نزدیکی این نقطه پاره قوس کوچکی از منحنی را رسم نمایید . جواب : $K=\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$

(پ) دایرهٔ انحنای خم را دراین نقطه رسم کنید .

جواب : $\beta=\dfrac{5}{9}$, $\alpha=\dfrac{8}{9}$

۵) شیب خط مماس‌به خم C درنقطهٔ اختیاری P با رابطهٔ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{s}{a}$ داده شده است . دراین رابطه a مقداری ثابت و s طول قوس منحنی است (که از نقطهٔ ثابتی اندازه گرفته شده است) . اگر P' مرکز انحنای خم C در نقطهٔ P ، R شعاع انحنای خم C دراین نقطه و R' شعاع انحنای گسترده در نقطهٔ P' باشد ، نشان دهید که

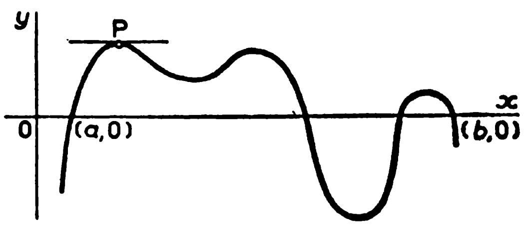
(الف) $R=\dfrac{s^2+a^2}{a}$ و (ب) $R'=\dfrac{2s(s^2+a^2)}{a^2}$ است.

فصل یازدهم

دستور میانه و موارد استعمال آن

۱۱۳ - قضیهٔ رل*. - اکنون به بیان قضیه‌ای میپردازیم که یکی از پایه های گسترش نظری حساب دیفرانسیل و انتگرال است .

اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ یکسان و متصل باشد (شمارهٔ ۷) و مقدار آن به ازای دو انتهای فاصله صفر شود [یعنی $f(a)=0$ و $f(b)=0$] ، و نیز $f(x)$ درهرنقطه از این فاصله $(a < x < b)$ مشتقی مانند $f'(x)$ داشته باشد ، خم نمایش تابع $y=f(x)$ به شکل خم پیوسته‌ای مانند شکل ۹۳ است . از این شکل چنین برمیاید که اقلاً دریک نقطه بین a و b (مثلاً در نقطهٔ P) سماس به خم موازی محور x هاست.



شکل ۹۳

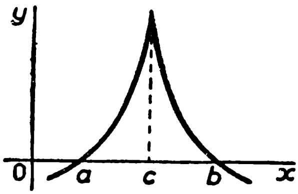
قضیهٔ رل - اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد و به ازای دو انتهای فاصله صفر شود و نیز در هر نقطه از این فاصله دارای مشتق باشد ، مشتق تابع ، یعنی $f'(x)$ ، اقلاً به ازای یك مقدار x بین a و b صفر میشود.

اثبات این قضیه ساده است. چون تابع $f(x)$ در تمام نقاط فاصلهٔ $[a , b]$ صفرنیست (اگر چنین باشد قضیه بدیهی است) ، در یک قسمت از این فاصله مثبت یا منفی است . اگر $f(x)$ درقسمتی از فاصله مثبت باشد ، مقدار $f(x)$ در یک یا چند نقطه‌از فاصله ماکزیمم است. به همین ترتیب اگر $f(x)$ منفی باشد ، مقدار آن در یک یا چند نقطه از فاصله مینیمم

---

* Rolle

است. اما اگر $f(X)$ ، $(a < X < b)$ ، ماکزیمم یا مینیمم باشد ، $f'(X) = \cdot$ است. در جز آن صورت $f(x)$ ، وقتی x از X عبور میکند ، صعودی یا نزولی است (شمارهٔ ۵۱) .

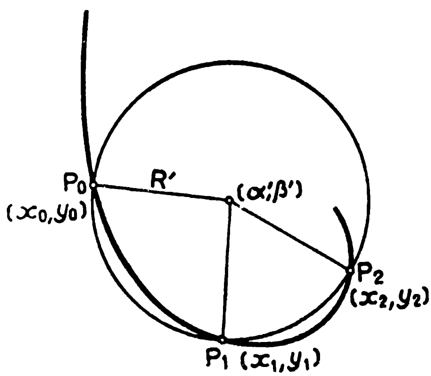


شکل ۹٤

شکل ۹٤ حالتی را نشان میدهد که قضیهٔ رل درآن صادق نیست. $f(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته است ولی $f'(x)$ به ازای $x = c$ وجود ندارد (بینهایت است) . مماس به خم در هیچیک از نقاط فاصلهٔ $[a , b]$ موازی محور x ها نیست .

اکنون به ذکر دو مورد استعمال قضیهٔ رل در هندسه میپردازیم .

۱۱٤- دایرهٔ بوسان * . ـ برسه نقطهٔ یک خم مسطح مانند P_0 و P_1 و P_2 دایره‌ای مرور میدهیم (شکل ۹۵) . اگر نقاط P_1 و P_2 همزمان روی خم حرکت کنند و به نقطهٔ P_0 نزدیک شوند ، دایرهٔ مار برسه نقطهٔ P_0 و P_1 و P_2 بطورکلی بسمت دایرهٔ معینی که حددایرهٔ متغیر است میل میکند. این دایره را **دایرهٔ بوسان خم در نقطهٔ** P_0 مینامند .



شکل ۹۵

قضیه - دایرهٔ بوسان همان دایرهٔ انحناست .

اثبات ـ اگر معادلهٔ خم به صورت

* Osculating circle

$$y=f(x) \qquad (۱)$$

و طول نقاط P_0 و P_1 و P_2 بترتیب x_0 و x_1 و x_2، مختصات مرکز دایرهٔ ماربر سه نقطهٔ مذکور (α', β') و شعاع آن R' باشد، معادلهٔ آن به صورت

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=R'^2$$

است. چون این دایره از نقاط P_0 و P_1 و P_2 میگذرد، داریم:

$$\begin{cases} (x_0-\alpha')^2+(y_0-\beta')^2-R'^2=0 \\ (x_1-\alpha')^2+(y_1-\beta')^2-R'^2=0 \\ (x_2-\alpha')^2+(y_2-\beta')^2-R'^2=0 \end{cases} \qquad (۲)$$

اکنون تابعی از x به صورت

$$F(x)=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2$$

که در آن y با رابطهٔ (۱) تعریف شده است، درنظر میگیریم. با توجه به روابط (۲) داریم:

$$F(x_0)=0 \quad , \quad F(x_1)=0 \quad , \quad P(x_2)=0$$

بنابراین $F'(x)$ باید (بنابر قضیهٔ رل) اقلاً به ازای یک مقدار مانند x' بین x_0 و x_1 و اقلاً به ازای یک مقدار دیگر مانند x'' بین x_1 و x_2 صفر شود:

$$F'(x')=0 \quad , \quad F'(x'')=0$$

با توجه به دورابطهٔاخیر، $F''(x)$ نیز باید اقلاً به ازای یک مقدار مانند x_3 بین x' و x'' صفر شود:

$$F''(x_3)=0$$

پس مقادیر α' و β' و R'، یعنی مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ ماربر سه نقطهٔ P_0 و P_1 و P_2، باید در سه معادلهٔ

$$F(x_0)=0 \quad , \quad F'(x')=0 \quad , \quad F''(x_3)=0$$

صدق کنند. اکنون اگر نقاط P_1 و P_2 بسمت P_0 میل کنند، x_1، x_2، x'، x'' و x_3

بسمت x_0 میل مینمایند. بنابراین مختصات مرکزوشعاع دایرهٔ بوسان ، یعنی α و β و R ، با سه معادلهٔ زیر تعیین میشوند :

$$F(x_0)=\cdot \quad , \quad F'(x_0)=\cdot \quad , \quad F''(x_0)=\cdot$$

این معادلات ، پس‌از حذف اندیس‌ها ، بترتیب عبارتند از :

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲} \tag{۳}$$

$$(x-\alpha)+(y-\beta)y'=\cdot \tag{۴}$$ [مشتق معادلهٔ (۳)]

$$۱+y'^{۲}+(y-\beta)y''=\cdot \tag{۵}$$ [مشتق معادلهٔ (۴)]

y'' را مخالف صفر فرض میکنیم ودومقدار $x-\alpha$ و $y-\beta$ را از دو معادلهٔ (۴) و (۵) بدست میاوریم :

$$x-\alpha=\frac{y'(۱+y'^{۲})}{y''} \quad , \quad y-\beta=-\frac{۱+y'^{۲}}{y''} \tag{۶}$$

اکنون اگر α و β را ازاین دو معادله بدست آوریم ، همان دستورهای (G) ی شمارهٔ ۱۰۸ بدست میایند واگرمقادیر $x-\alpha$ و $y-\beta$ رادر رابطهٔ (۳) بگذاریم ونسبت به R حل کنیم ، دستور (F) شمارهٔ ۱۰۵ حاصل میشود . پس دایرهٔ بوسان همان دایرهٔ انحناست .

بنابرتعریف شمارهٔ ۲۸ ، خط مماس به خم درنقطهٔ P حد خط قاطعی‌است که ازنقطهٔ P و نقطهٔ Q که مجاور P و روی خم است ، میگذرد . با درنظرگرفتن تعریف دایرهٔ بوسان و قضیهٔ اخیر میتوان دایرهٔ انحنا در نقطهٔ P را نیزحد دایره‌ای دانست که از نقطهٔ P و دو نقطهٔ Q و R که نزدیک P و روی خم میباشند ، میگذرد .

۱۱۵- حد نقطهٔ تقاطع دوقائم نزدیك بهم .- قضیه - C ، مرکز انحنای يك‌خم‌درنقطهٔ P ، حد نقطهٔ تقاطع قائم به خم در نقطهٔ P ويك قائم نزديك به آن است .

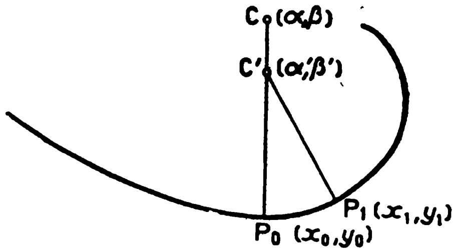
اثبات - اگر معادلهٔ خم به صورت

$$y=f(x) \tag{۱}$$

باشد ، معادلات قائمهای به خم در دو نقطهٔ P_0 و P_1 ، که نزدیک یکدیگرند ، عبارت میشوند از :

$$(x_0-x)+(y_0-y)f'(x_0)=0$$

$$(x_1-x)+(y_1-y)f'(x_1)=0$$



شکل ۹۶

و اگر محل تقاطع این دو قائم را $C'(\alpha', \beta')$ بنامیم ، مختصات آن در معادلات اخیر صدق میکنند :

$$(۲)\qquad \begin{cases} (x_0-\alpha')+(y_0-\beta')f'(x_0)=0 \\ (x_1-\alpha')+(y_1-\beta')f'(x_1)=0 \end{cases}$$

اکنون تابعی از x به صورت

$$\varphi(x)=(x-\alpha')+(y-\beta')y'$$

که در آن y با رابطهٔ (۱) تعریف شده است ، درنظر میگیریم . معادلات (۲) نشان میدهند که

$$\varphi(x_0)=0 \quad و \quad \varphi(x_1)=0$$

پس بنابر قضیهٔ رل ، $\varphi'(x)$ به ازای مقداری از x بین x_0 و x_1 ، مانند x' ، صفر میشود و لذا α' و β' با دو معادلهٔ

$$\varphi(x_0)=0 \quad , \quad \varphi'(x')=0$$

تعیین میگردند . اکنون اگر P_1 بسمت P_0 میل کند ، x' بسمت x_0 میل‌میکندو داریم :

$$\varphi(x_0)=0 \quad , \quad \varphi'(x_0)=0$$

دراین‌صورت $C'(\alpha', \beta')$ بسمت حدش که‌نقطه‌ای مانند $C(\alpha, \beta)$ است و روی قائم

به خم درنقطهٔ P_0 قراردارد میل میکند . اگرپریم‌ها واندیس‌ها را حذف کنیم ، دومعادلهٔ اخیر به صورت

$$\begin{cases} (x-\alpha)+(y-\beta)y'=0 \\ 1+y'^2+(y-\beta)y''=0 \end{cases}$$

درمیایند . اگر این معادلات را نسبت به α و β حل کنیم ، همان دستورهای (G) ی شمارهٔ ۱۰۸ بدست میایند .

۱۱۶ـ دستور میانه (قضیهٔ نموهای محدود) .

قضیه - اگر $f(x)$ و $F(x)$ و مشتقهای مرتبهٔ اول آنها درفاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته باشند وعلاوه بر آن $F'(x)$ درهیچیك از نقاط این فاصله صفر نشود ، به‌ازای یك مقدار از x بین a و b ، مانند x_1 ، تساوی زیر برقرار است :

$$\text{(A)} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \qquad (a<x_1<b)$$

اثبات - تابع زیر را در نظر میگیریم :

$$(1) \qquad \varphi(x) \equiv \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)]-[f(x)-f(a)]$$

روشن است که $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ است و میتوان قضیهٔ رل را بکار برد . مشتق $\varphi(x)$ عبارتست از :

$$(2) \qquad \varphi'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(x)-f'(x)$$

این مشتق به ازای مقداری از x (مانند x_1) بین a و b صفر است :

$$(3) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(x_1)-f'(x_1)=0$$

دوطرف این تساوی‌را بر $F'(x_1)$ که بنابر فرض صفر نیست ، تقسیم میکنیم ، رابطهٔ (A) بدست میاید .

درحالت خاص $F(x)=x$ دستور (A) به صورت زیر درمیاید :

$$\text{(B)} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1) \qquad (a<x_1<b)$$

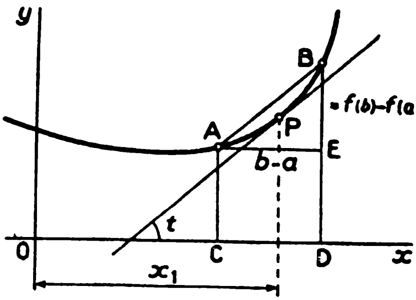
قضیه دراین‌حالت‌تعبیرهندسی‌ساده‌ای دارد . شکل ۹۷ خم نمایش تابع $y=f(x)$ را نشان میدهد .

$$OC=a \quad , \quad CA=f(a)$$

$$OD=b \quad , \quad DB=f(b)$$

بنابراین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ [شیب وتر AB]

چون $a < x_1 < b$ است ، $f'(x_1)$ شیب خط مماس به‌خم‌دریک‌نقطه‌ازقوس AB (مانند P) است . پس دستور (B) نشان میدهد که شیب خط مماس درنقطهٔ P برابر شیب وتر AB است . بنابراین **اقلاً در یك نقطه از قوس AB ، خط مماس به خم موازی وتر AB است .**



شکل ۹۷

هنگام بکار بردن دستورمیانه باید شکل خم را رسم کرد (مانند شکل ۹۳) و توجه نمود که آیا درفاصلهٔ مورد نظر یک نقطه یا بیش‌از یک نقطه از نوع P وجود دارد . از طرف دیگر اگر $f(x)$ یا $f'(x)$ به ازای یک مقدار از فاصلهٔ $[a , b]$ منفصل باشد ، ممکن است نقطه‌ای مانند P وجود نداشته باشد (شکل ۹٤) .

با ضرب دو طرف دستور (B) در $b-a$ میتوان حکم قضیه را به صورت زیر نوشت :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1) \qquad \text{(C)}$$

اگر $b=a+\Delta a$ بگیریم ، $b-a=\Delta a$ میشود وچون x_1 عددی‌بین a و b است ، میتوان آن را به صورت $x_1=a+\theta\,\Delta a$

نوشت (θ عددی است بین ۰ و ۱) . اگر این مقادیر را در (C) بگذاریم ، صورت **دیگری از دستور میانه** بدست میاید :

$$f(a+\Delta a)-f(a)=\Delta a\, f'(a+\theta\,\Delta a) \qquad (۰<\theta<۱) \qquad (D)$$

تمرین

۱) در هریک از توابع زیر با تعیین مقادیری از x که $f(x)$ و $f'(x)$ را صفر میکنند ، موضوع قضیهٔ رل را مطالعه کنید :

a) $f(x)=x^3-3x$ b) $f(x)=6x^2-x^3$

c) $f(x)=a+bx+cx^2$ d) $f(x)=\sin x$

e) $f(x)=\sin \pi x-\cos \pi x$ f) $f(x)=tg\, x-x$

g) $f(x)=x \ln x$ h) $f(x)=xe^x$

۲) تابع $f(x)=tg\,x$ مفروض‌است. میدانیم که $f(0)=0$ و $f(\pi)=0$ است. آیا میتوان دراین تابع با استفاده ازقضیهٔ رل این نتیجه را گرفت که $f'(x)$ به ازای یک مقدار بین ۰ و π صفر میشود ؟ دلیل جوابتان چیست ؟

۳) تابع‌ضمنی $x^2=(y+1)^3$ مفروض‌است. وقتی $x=-1$ و $x=+1$ است ، $y=0$ است. آیا میتوان با استفاده از قضیهٔ رل این نتیجه راگرفت که y' به ازای یک مقدار از x بین ۱ — و ۱ + صفر میشود ؟ دلیل جوابتان چیست ؟

۴) در هریک از توابع زیر x_1 را طوری تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1)$$

الف) $f(x)=x^2$ ، $a=1$ ، $b=2$ جواب : $x_1=1{,}5$

ب) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=1$ ، $b=4$ $x_1=2{,}25$

پ) $f(x)=e^x$ ، $a=0$ ، $b=1$ $x_1=\ln(e-1)=0{,}54$

ت) $f(x)=\frac{2}{x}$ ، $a=1$ ، $b=2$

ث) $f(x)=\ln x$ ، $a=۰٫۵$ ، $b=۱٫۵$

ج) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{۲}$ ، $a=۰$ ، $b=۱$

۵) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، $a=-۱$ و $b=۱$ است. $x_۱$ را طوری پیدا کنید (اگر چنین عددی وجود دارد) که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_۱)$$

۶) $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$ ، $a=-۱$ و $b=۱$ است. $x_۱$ را طوری پیدا کنید (اگر چنین عددی وجود دارد) که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_۱)$$

۱۱۷- صور مبهم . - وقتی به ازای مقدار خاصی ازمتغیر مستقل ، تابع به یکی از صورتهای

$$\frac{۰}{۰}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ ۰\times\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ ۰^۰\ ,\ \infty^۰\ ,\ ۱^\infty$$

درآید ، میگویند تابع **نامعین** است و یا میگویند تابع برای این مقدار از متغیر مستقل با عبارت تحلیلی داده شده تعریف نشده است .

مثلاً اگر

$$y=\frac{f(x)}{F(x)}$$

باشد و به ازای مقدار معینی از متغیر مانند $x=a$

$$f(a)=۰ \quad و \quad F(a)=۰$$

بشود ، تابع y به‌ازای $x=a$ معین نیست‌ومیتوان به‌آن هرمقدار دلخواهی را نسبت داد . روشن است که اگر بتوان به تابع y مقداری را نسبت داد که تابع به ازای $x=a$ متصل باشد (حالت دوم شمارهٔ ۱۷) ، بسیار مناسب است .

۱۱۸- رفع ابهام صور مبهم . - اگر تابع $f(x)$ به ازای $x=a$ نامعین باشد و اگر

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

وجود داشته باشد ومحدود باشد ، برای $x=a$ ، همین مقداراخیر را به تابع نسبت میدهیم تا تابع به ازای $x=a$ پیوسته باشد (شمارهٔ ۱۷) .

گاهی میتوان حد تابع را با عملیات سادهای بدست آورد ، مانند :

مثال ۱- تابع $f(x)=\frac{x^۲-٤}{x-۲}$ مفروض است. نشان دهید که $\lim_{x\to ۲} f(x)=٤$ است .

حل - $f(۲)$ نامعین است اما اگر صورت را به مخرج تقسیم کنیم ، $f(x)=x+۲$ و از آنجا $\lim_{x\to ۲}(x+۲)=٤$ میشود .

مثال ۲- تابع $f(x)=sec\,x-tg\,x$ مفروض است . نشان دهید که $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} f(x)=\cdot$ است .

حل - $f\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ نامعین است $(\infty-\infty)$. اگر شکل تابع را به ترتیب زیر تغییر دهیم :

$$sec\,x-tg\,x=\frac{۱-sin\,x}{cos\,x}=\frac{۱-sin\,x}{cos\,x}\cdot\frac{۱+sin\,x}{۱+sin\,x}=\frac{cos\,x}{۱+sin\,x}$$

حد کسر اخیر به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ صفر است .

شمارهٔ ۱۸ را نیز ببینید . روشهای کلی رفع ابهام صور مذکور در شمارهٔ ۱۱۷ جزئی از حساب دیفرانسیل است .

۱۱۹- رفع ابهام صورت $\frac{\cdot}{\cdot}$ - تابع $\frac{f(x)}{F(x)}$ مفروض است . ضمناً $f(a)=\cdot$ و $F(a)=\cdot$ است و بدین ترتیب تابع به ازای $x=a$ نامعین است . میخواهیم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ را پیدا کنیم . نشان میدهیم که دراین صورت :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \qquad (E)$$

اثبات ـ اگر در تساوی (A) ی شمارهٔ ۱۱۶ بجای x ، b بگذاریم و درنظر بگیریم که $f(a)=F(a)=0$ است ، داریم :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \qquad (a < x_1 < x) \qquad (۱)$$

اگر x بسمت a میل کند ، x_1 نیزبسمت a میل میکند. پس اگرطرف راست تساوی(۱) ، وقتی x_1 بسمت a میل میکند ، بسمت‌حد معینی میل‌نماید ، طرف چپ آن نیز بسمت همان حد میل میکند و دستور (E) محقق است .

از دستور (E) این نتیجه را میگیریم که اگر $f'(a)$ و $F'(a)$ هردو باهم صفر نباشند :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} \qquad (۲)$$

دستورالعمل برای رفع ابهام صورت $\frac{0}{0}$ - کسر نوی درنظر میگیریم که صورتش مشتق صورت کسر داده شده و مخرجش مشتق مخرج کسر داده شده باشد. مقدار کسر جدید ، به ازای مقدار مورد نظر ازمتغیر ، حد کسر داده شده است .

اگر درحالتی $f'(a)=0$ و $F'(a)=0$ باشد ، یعنی مشتقهای اول صورت و مخرج نیز به ازای $x=a$ هردو باهم صفر باشند ، دستور (E) را یک بار دیگر برای کسر

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

بکار میبندیم ، دراین صورت :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$$

گاهی لازم است این عمل را چندین بار تکرار کنیم .

یادآور میشویم که دراینجا نباید مشتق کسر را بنابر قاعدهٔ VII حساب کرد ، بلکه باید مشتق صورت را جدا و مشتق مخرج را جدا حساب نمود .

اگر $a=\infty$ باشد ، تغییرمتغیر $x=\frac{۱}{z}$ میدهیم ، مسئله به صورت حد کسر به‌ازای $z=۰$ درمیاید. بدین ترتیب :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{z\to ۰}\frac{-f'\left(\frac{۱}{z}\right)\frac{۱}{z^۲}}{-F'\left(\frac{۱}{z}\right)\frac{۱}{z^۲}}=\lim_{z\to ۰}\frac{f'\left(\frac{۱}{z}\right)}{F'\left(\frac{۱}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

پس دستور (E) دراین حالت نیز صحیح است .

مثال ۱- نشان دهید که $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin nx}{x}=n$ است .

حل - دراین‌مثال $f(x)=\sin nx$ ، $F(x)=x$ ، $f(۰)=۰$ و $F(۰)=۰$ است ، بنابر دستور (E)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{n\cos nx}{۱}=n$$

مثال ۲- نشان دهید که $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x+۲}{x^۳-x^۲-x+۱}=\frac{۳}{۲}$ است .

حل - در این مثال $f(x)=x^۳-۳x+۲$ ، $F(x)=x^۳-x^۲-x+۱$ ، $f(۱)=۰$ و $F(۱)=۰$ است ، بنابر دستور (E)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲-۳}{۳x^۲-۲x-۱}=\frac{۰}{۰}\implies \text{مبهم}$$

جواب :

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۶x}{۶x-۲}=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۳- نشان دهید که $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{e^x-e^{-x}-۲x}{x-\sin x}=۲$ است .

حل ـ دراین مثال $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ ، $F(x)=x-\sin x$ ، $f(0)=0$ و $F(0)=0$ است ، بنابر دستور (E)

مبهم $\Leftarrow$ $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$$

مبهم $\Leftarrow$ $$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

جواب : $$=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{F'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

تمرین

از صور مبهم زیر ، با استفاده از دستور مذکور ، رفع ابهام کنید* :

	جواب
۱) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$	$\frac{8}{9}$
۲) $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}$	$\frac{1}{na^{n-1}}$
۳) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$	۱
۴) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$	۲
۵) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-\sin x}$	۲

* بهتر است در هرمسئله پس‌از مشتق‌گیری ابتدا صورت و مخرج را حتی‌الامکان مختصر کنید و بعداً بجای متغیر مقدار مورد نظر را قرار دهید .

جواب

٦) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - ۲x)^{۲}}$ $\qquad -\dfrac{۱}{۸}$

۷) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{a^{x} - b^{x}}{x}$ $\qquad \ln \dfrac{a}{b}$

۸) $\lim\limits_{\theta \to ۰} \dfrac{\theta - \arcsin \theta}{\sin^{۳}\theta}$ $\qquad -\dfrac{۱}{٦}$

۹) $\lim\limits_{x \to \theta} \dfrac{\sin x - \sin \theta}{x - \theta}$ $\qquad \cos \theta$

۱۰) $\lim\limits_{y \to ۰} \dfrac{e^{y} + \sin y - ۱}{\ln(۱ + y)}$ $\qquad ۲$

۱۱) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\sec^{۲}\theta - ۲ tg\, \theta}{۱ + \cos ٤\theta}$ $\qquad \dfrac{۱}{۲}$

۱۲) $\lim\limits_{r \to a} \dfrac{r^{۳} - ar^{۲} - a^{۲}r + a^{۳}}{r^{۲} - a^{۲}}$

۱۳) $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{\sqrt{۳x} - \sqrt{۱۲ - x}}{۲x - ۳\sqrt{۱۹ - ٥x}}$

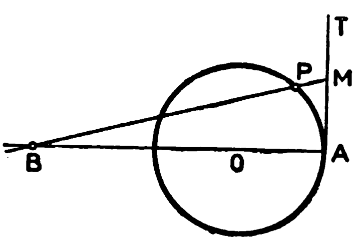
۱٤) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{\sqrt{۱٦x - x^{٤}} - ۲\sqrt[۳]{٤x}}{۲ - \sqrt[٤]{۲x^{۳}}}$

۱٥) $\lim\limits_{\theta \to ۰} \dfrac{tg\, \theta + \sec \theta - ۱}{tg\, \theta - \sec \theta + ۱}$

۱٦) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{x - \sin x}{x^{۳}}$

۱۷) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{tg\, x - \sin x}{\sin^{۳} x}$

۱۸) دایرهٔ O به شعاع r مفروض است . مماس AT را درنظر میگیریم و روی آن پاره خط AM را به اندازهٔ طول قوس AP جدا میکنیم. M را به P وصل پینماییم‌وامتداد میدهیم تا قطر ماربر A را در نقطهٔ B قطع کند (شکل ۹۸). وقتی P روی دایره بسمت A میل میکند و سرانجام برآن منطبق میشود ، B درکجا قرار میگیرد ؟ جواب : OB = ۲r



شکل ۹۸

۱۲۰- رفع ابهام صورت $\frac{\infty}{\infty}$ - اگر دوتابع $f(x)$ و $F(x)$ به ازای $x \to a$ هردو بینهایت شوند ، برای پیدا کردن حد نسبت آنها یعنی

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$$

همان قاعدهٔ مذکوردر شمارهٔ ۱۱۹ راکه برای رفع ابهام صورت $\frac{0}{0}$ بیان شده است ، بکار میبریم .

دستورالعمل برای رفع ابهام صورت $\frac{\infty}{\infty}$ - از صورت و مخرج کسر داده شده مشتق میگیریم تا صورت ومخرج کسر جدیدی بدست آیند . مقدار کسر اخیر ، به ازای مقدار مورد نظر از متغیر ، حدکسر داده شده است .

اثبات دقیق این قاعده از سطح این کتاب بالاتر است .

مثال - نشان دهید که $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{cosec\, x} = 0$ است .

حل - در این مثال $f(x) = \ln x$ ، $F(x) = cosec\, x$ ، $f(0) = -\infty$ و $F(0) = \infty$ است ، پس بنابر دستورالعمل مذکور

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-cosec\, x\, cotg\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

و بنابر دستور (E)
$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = 0$$

۱۲۱- رفع ابهام صورت $0 \times \infty$ - اگر تابع $f(x) \cdot \varphi(x)$ به ازای $x = a$ به صورت مبهم $0 \times \infty$ درآید ، تابع مذکور را به شکل زیر مینویسیم :

$$f(x) \cdot \varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \quad \left[\text{یا} \quad = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right]$$

تا به یکی ازدو صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ در آید. سپس دستورالعمل شمارهٔ ۱۱۹ یا دستورالعمل شمارهٔ ۱۲۰ را بکار میبندیم .

بنابراین حاصل‌ضرب $f(x) \cdot \varphi(x)$ را به یکی‌از دوصورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درمیاوریم. معمولاً یکی ازاین دوصورت مناسب‌تر است وانتخاب آن بسته به شکل تحلیلی مسئلهٔ داده شده است .

مثال - نشان دهید که $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec 3x \cos 5x) = -\frac{5}{3}$ است .

حل - چون $\sec\frac{3\pi}{2} = \infty$ و $\cos\frac{5\pi}{2} = 0$ است ، مینویسیم :

$$\sec 3x \cos 5x = \frac{1}{\cos 3x} \cdot \cos 5x = \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

اکنون $f(x) = \cos 5x$ ، $F(x) = \cos 3x$ ، $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ و $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ است و بنابر دستور (E)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x} = -\frac{5}{3}$$

۱۲۲ - رفع ابهام صورت $\infty - \infty$ - صورت مبهم $\infty - \infty$ را معمولاً میتوان به یکی ازدوصورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد .

مثال - نشان دهید که $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - tg\, x) = 0$ است .

حل - مقدار $\sec\frac{\pi}{2} - tg\frac{\pi}{2} = \infty - \infty$ نامعین است . اما

$$\sec x - tg\, x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

اکنون $f(x)=1-\sin x$ ، $F(x)=\cos x$ ، $f(\frac{\pi}{2})=0$ و $F(\frac{\pi}{2})=0$
است و بنابر دستور (E)

جواب : $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

تمرین

از صور مبهم زیر رفع ابهام کنید :

	جواب
۱) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$	0
۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 2x}$	2
۳) $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3\theta}{\tan\theta}$	$\frac{1}{3}$
٤) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$	0
٥) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln x}$	∞
٦) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\ln x}$	$-\infty$
۷) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$	1
۸) $\lim_{x\to 0} x\ln\sin x$	0

جواب

۹) $\lim\limits_{\theta\to ۰} \frac{\pi}{\theta} tg \frac{\pi\theta}{۲}$ — $\frac{۱}{۲}\pi^{۲}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{a}{x}$ — a

۱۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} (\pi - ۲x) tg\, x$ — ۲

۱۲) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{٤}} (۱ - tg\,\theta) \sec ۲\theta$ — ۱

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۱} \left[\frac{۲}{x^{۲}-۱} - \frac{۱}{x-۱}\right]$ — $-\frac{۱}{۲}$

۱٤) $\lim\limits_{x\to ۱} \left[\frac{۱}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right]$ — -۱

۱۵) $\lim\limits_{\theta\to ۰} \left[\frac{۲}{\sin^{۲}\theta} - \frac{۱}{۱-\cos\theta}\right]$ — $\frac{۱}{۲}$

۱٦) $\lim\limits_{y\to ۱} \left[\frac{y}{y-۱} - \frac{۱}{\ln y}\right]$ — $\frac{۱}{۲}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۰} \left[\frac{۱}{\sin^{۲}x} - \frac{۱}{x^{۲}}\right]$ — $\frac{۱}{۳}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\ln x}{x \ln x}$

۱۹) $\lim\limits_{\theta\to ۰} \theta \operatorname{cosec} ۲\theta$

۲۰) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\cot g\, ۲x}{\cot g\, ۳x}$

۲۱) $\lim\limits_{\theta\to a} (a^{۲}-\theta^{۲}) tg \frac{\pi\theta}{۲a}$

۲۲) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{۲}} (\sec ۵\theta - tg\,\theta)$

۲۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \left[\frac{\pi}{٤x} - \frac{\pi}{۲x(e^{\pi x}+۱)}\right]$

۲٤) $\lim\limits_{x\to ۰} \left[\frac{۱}{x^{۲}} - \frac{۱}{x\, tg\, x}\right]$

۲۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[x \, tg \, x - \frac{\pi}{2} \sec x \right]$ ۲۶) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \, tg \frac{\pi x}{4}$

۲۷) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$ ۲۸) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$

۱۲۳- رفع ابهام صور 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 - اگر تابعی به شکل

$$f(x)^{\varphi(x)}$$

باشد و نیز به ازای مقدار معینی از x :

$f(x)=0$ و $\varphi(x)=0$ باشد ، تابع به صورت 0^0 درمیاید ،

و اگر $f(x)=1$ و $\varphi(x)=\infty$ باشد ، تابع به صورت 1^∞ درمیاید ،

و اگر $f(x)=\infty$ و $\varphi(x)=0$ باشد ، تابع به صورت ∞^0 درمیاید.

تابع داده شده را y مینامیم : $y=f(x)^{\varphi(x)}$

از دو طرف این تساوی لگاریتم طبیعی میگیریم :

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$$

در هریک از حالات بالا لگاریتم طبیعی y به صورت مبهم

$$0 \times \infty$$

درمیاید . رفع ابهام صورت مبهم اخیر ، به طریقی که درشمارهٔ ۱۲۱ ذکر شده است ، حد لگاریتم تابع را میدهد . چون این مقدار لگاریتم حد تابع است ، پس حد تابع نیز در دست است ، زیرا اگر حد لگاریتم y ، a باشد ، $\lim y=e^a$ است .

مثال ۱- نشان دهید که $\lim\limits_{x \to 0} x^x=1$ است .

حل - تابع به ازای $x=0$ به صورت مبهم 0^0 درمیاید ، مینویسیم :

$$y=x^x$$

از دو طرف این تساوی لگاریتم میگیریم :

$$\ln y=x\ln x=0 \times (-\infty) \qquad (x=0)$$

بنابر شمارهٔ ۱۲۱
$$\ln y=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

بنابر شمارهٔ ۱۲۰
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

پس
$$\lim_{x\to 0}\ln y=0 \implies \lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}x^x=e^0=1$$

مثال ۲- نشان دهید که $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$ است .

حل - تابع به ازای $x=1$ به صورت مبهم 1^∞ در میاید ، مینویسیم :

$$y=(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$$

$$\ln y=tg\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\infty\times 0 \qquad (x=1)$$

بنابر شمارهٔ ۱۲۱
$$\ln y=\frac{\ln(2-x)}{cotg\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}$$

بنابر شمارهٔ ۱۱۹
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{cotg\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}cosec^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

پس
$$\lim_{x\to 1}\ln y=\frac{2}{\pi} \implies \lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

مثال ۳- نشان دهید که $\lim_{x\to 0}(cotg x)^{\sin x}=1$ است .

حل - تابع به ازی $x=0$ به صورت مبهم ∞^0 در میاید ، مینویسیم :

$$y=(\cot g\, x)^{\sin x}$$

$$\ln y=\sin x \ln \cot g\, x = 0 \times \infty \qquad (x=0)$$

بنابر شمارهٔ ۱۲۱

$$\ln y=\frac{\ln \cot g\, x}{\operatorname{cosec} x}=\frac{\infty}{\infty}$$

بنابر شمارهٔ ۱۲۰

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln \cot g\, x}{\operatorname{cosec} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot g\, x}}{-\operatorname{cosec} x \cot g\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0$$

پس $\lim_{x\to 0}\ln y=0 \implies \lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}(\cot g\, x)^{\sin x}=e^0=1$

تمرین

از صور مبهم زیر رفع ابهام کنید :

	جواب
۱) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$	۱
۲) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}$	e^2
۳) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$	$\frac{1}{e}$
۴) $\lim_{y\to \infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^{y}$	e^a
۵) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot g\, x}$	e
۶) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$	e^2

جواب

$$\text{v)}\quad \lim_{t\to \cdot} (\text{۱}+nt)^{\frac{\text{۱}}{t}} \qquad\qquad e^n$$

$$\text{۸)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\text{۲}}{x}\right)^{x} \qquad\qquad \text{۹)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\text{۲}}{x}\right)^{x^{\text{۲}}}$$

$$\text{۱۰)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\text{۲}}{x}\right)^{x^{\text{۳}}} \qquad\qquad \text{۱۱)}\quad \lim_{x\to\cdot}(e^{\text{۲}x}+\text{۲}x)^{\frac{\text{۱}}{\text{٤}x}}$$

$$\text{۱۲)}\quad \lim_{x\to\cdot}(x+\text{۱})^{\cot g\, x} \qquad\qquad \text{۱۳)}\text{-}\quad \lim_{x\to\cdot}\left(\frac{\text{۱}}{x}\right)^{\sin x}$$

$$\text{۱٤)}\quad \lim_{x\to\cdot}(\text{۱}+x)^{\ln x}$$

۱۲٤- بسط دستور میانه (بسط قضیهٔ نموهای محدود) .- مقدار ثابت R را با معادلهٔ زیر تعریف میکنیم :

$$(\text{۱})\qquad f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(b-a)^{\text{۲}}R=\cdot$$

در طرف چپ این معادله بجای b ، x میگذاریم ، تابعی از x بدست میاید ، آن را F(x) مینامیم :

$$(\text{۲})\qquad F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(x-a)^{\text{۲}}R$$

بنابر معادلهٔ (۱) ، $F(b)=\cdot$ وبنابررابطهٔ (۲) ، $F(a)=\cdot$ است. پس بنابر قضیهٔ رل (شماره۱۱۳) ، $F'(x)$ اقلاً به‌ازای یک مقدارازx مانند $x_{\text{۱}}$ بین a و b صفرمیشود. اما

$$F'(x)=f'(x)-f'(a)-(x-a)R$$

است ، پس

$$F'(x_{\text{۱}})=f'(x_{\text{۱}})-f'(a)-(x_{\text{۱}}-a)R=\cdot$$

اکنون‌چون $F'(x_{\text{۱}})=\cdot$ و $F'(a)=\cdot$ است ، $F'(x)$نیزدارای‌شرایط قضیهٔ رل است‌و باید مشتق آن ، یعنی $F''(x)$ ، اقلاً به ازای یک مقدار از x مانند $x_{\text{۲}}$ بین a و $x_{\text{۱}}$ صفر شود . روشن است‌که $x_{\text{۲}}$ نیز بین a و b است . اما

$$F''(x) = f''(x) - R$$

است ، پس

$$F''(x_2) = f''(x_2) - R = 0$$

و

$$R = f''(x_2)$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ (۱) بگذاریم ، داریم :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(x_2) \quad (a < x_2 < b) \tag{F}$$

این عمل را تکرار میکنیم ، نتیجهٔ کلی زیر بدست میاید :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \tag{G}$$

$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_1) \quad (a < x_1 < b)$$

معادلهٔ (G) را **بسط دستورمیانه** یا **بسط قضیهٔ نموهای محدود** مینامند .

۱۲۵- ماکزیمم و مینیمم .- اکنون میتوانیم با توجه به شمارهٔ ۱۱۶ و نتایج قسمت اخیر به بحث دربارهٔ **ماکزیمم و مینیمم توابع یك متغیر مستقل** بپردازیم .

تابع $f(x)$ را درنظرمیگیریم . اگر h عددی مثبت، کوچك‌واختیاری باشد ، میتوانیم تعریفهای مذکور در شمارهٔ ۴۶ را به صورت زیر خلاصه کنیم :

اگر به ازای هرمقدار از فاصلهٔ $[a-h \; , \; a+h]$ غیراز خود a

(۱) $f(x) - f(a) =$ عددی منفی

باشد ، میگویند $f(x)$ به ازای $x=a$ ماکزیمم است .

بعکس اگر

(۲) $f(x) - f(a) =$ عددی مثبت

باشد ، میگویند $f(x)$ به ازای $x=a$ مینیمم است .

اکنون به اثبات تحلیلی حکمی میپردازیم که درصفحهٔ ۷۸ ذکر شده است .

هرگاه مشتق تابع مثبت‌باشد ، تابع صعودی وهرگاه مشتق تابع منفی باشد ، تابع نزولی است .

تابع $y=f(x)$ را درنظر میگیریم . وقتی $|\Delta x|$ کوچک است ، $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و $f'(x)$ دارای یک علامت‌اند (شمارهٔ ۲٤) . فرض کنیم $f'(x) > 0$ است . در این صورت وقتی Δx مثبت است ، Δy نیز مثبت است و وقتی Δx منفی است ، Δy نیز منفی است ، پس تابع صعودی است. درحالتی نیز که مشتق منفی‌است ، استدلال به همین شکل است.

اکنون میتوان درستی حکم زیر را بآسانی نتیجه گرفت :

اگر $f(a)$ ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x)$ باشد ، $f'(a)=0$ است .

زیرا اگر $f'(a)$ صفر نباشد ، وقتی x هنگام زیاد شدن از a عبور میکند ، تابع $f(x)$ صعود یا نزول مینماید و دراین صورت $f(a)$ نه ماکزیمم و نه مینیمم است .

برای تعیین شرایط کافی برای ماکزیمم یا مینیمم بودن یک تابع حالات زیر را در نظر میگیریم :

I . ـ فرض میکنیم $f'(a)=0$ و $f''(a)\neq 0$ است .

در رابطهٔ (F) شمارهٔ ۱۲٤ بجای b ، x میگذاریم و $f(a)$ را به طرف چپ میبریم ، داریم :

$$(a < x_2 < x) \qquad f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^2}{2!}f''(x_2) \qquad (3)$$

$f''(a)$ مخالف‌صفرو $f''(x)$ متصل‌فرض شده است. پس میتوان‌فاصلهٔ $[a-h\ ,\ a+h]$ رابقدری کوچک‌اختیار کرد که $f''(x)$ همان علامت $f''(a)$ را داشته باشد. چون $(x-a)^2$ به ازای هرمقدار x مثبت است ، طرف راست رابطهٔ (۳) تغییر علامت نمیدهد و تفاضل

$$f(x)-f(a)$$

به ازای جمیع مقادیر x در فاصلهٔ $[a-h\ ,\ a+h]$ دارای یک علامت است ، یعنی همان علامت $f''(a)$ را دارد .

بنابراین از تعریفهای (۱) و (۲) این دو نتیجه بدست میایند که :

اگر $f'(a)=0$ و $f''(a)<0$ باشد ، $f(a)$ ماکزیمم است ، (٤)

اگر $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ باشد ، $f(a)$ مینیمم‌است . (٥)

این شرایط همان شرایط مذکور در شمارهٔ ٥٦ است.

II . ـ اکنون فرض میکنیم $f'(a)=f''(a)=0$ و $f'''(a)\neq 0$ است .
در رابطهٔ (G) ی شمارهٔ ۱۲۴ ، n را ۳ میگیریم ، بجای b ، x میگذاریم و f(a) را به طرف چپ میبریم ، داریم :

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{3!}(x-a)^3f'''(x_3) \qquad (a<x_3<x) \tag{6}$$

مانند قبل $f'''(x)$ همان علامت $f'''(a)$ را دارد . اما $(x-a)^3$ تغییر علامت میدهد و علامت آن ، وقتی x کوچکتر از a است ، منفی است و وقتی x بزرگتر از a است ، مثبت است.
پس تفاضل

$$f(x)-f(a)$$

تغییر علامت میدهد و f(a) نه ماکزیمم و نه مینیمم است .

III . ـ سرانجام فرض میکنیم $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ و $f^{(n)}(a)\neq 0$ است .
بنابر دلایلی مانند I و II ، اگر نخستین مشتق f(x) که به ازای x=a مخالف صفر است ، از مرتبهٔ زوج باشد (n زوج) ، میتوان گفت که :

اگر $f^{(n)}(a)$ منفی است ، f(a) ماکزیمم است، (H)

و اگر $f^{(n)}(a)$ مثبت است ، f(a) مینیمم است . * (I)

اگر نخستین مشتق f(x) که به ازای x=a مخالف صفر است ، از مرتبهٔ فرد باشد (n فرد) ، f(a) نه ماکزیمم و نه مینیمم است.

مثال ۱- ماکزیمم و مینیمم تابع $x^3-9x^2+24x-7$ را پیدا کنید.

حل -

$$f(x)=x^3-9x^2+24x-7$$

$$f'(x)=3x^2-18x+24$$

جوابهای معادلهٔ

$$3x^2-18x+24=0$$

عبارتند از

$$x=4 \quad \text{و} \quad x=2$$

پس

$$f'(4)=0 \quad \text{و} \quad f'(2)=0$$

---

* چنانکه در شمارهٔ ٤٦ ذکر شده است ، مقدار بحرانی x=a بدین ترتیب بدست میاید که مشتق مرتبهٔ اول را مساوی صفر قرار دهیم و جوابهای حقیقی معادلهٔ حاصل را بدست آوریم .

یک بار دیگر مشتق میگیریم $f''(x)=6x-18$

چون $f''(2)=-6$ است ، پس بنابر (H) ، $f(2)=13$ یک ماکزیمم است .

چون $f''(4)=+6$ است ، پس بنابر (I) ، $f(4)=9$ یک مینیمم است .

مثال ۴- ماکزیمم و مینیمم تابع $e^x+2\cos x+e^{-x}$ را پیدا کنید .

حل - $f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$

$f'(x)=e^x-2\sin x-e^{-x}=0$ به‌ازای* $x=0$

$f''(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}=0$ به ازای $x=0$

$f'''(x)=e^x+2\sin x-e^{-x}=0$ به ازای $x=0$

$f^{iv}(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}=4$ به ازای $x=0$

پس بنابر (I) ، $f(0)=4$ یک مینیمم است .

تمرین

بااستفاده از روش مذکور درشمارهٔ اخیر در ماکزیمم ومینیمم بودن توابع زیر به‌ازای مقادیر بحرانی آنها بحث کنید :

۱) x^4-4x^3+5 جواب : تابع به ازای $x=0$ نه ماکزیمم و نه مینیمم و به‌ازای $x=3$ مینیممی برابر -22 دارد .

۲) x^3+3x^2+3x تابع به ازای $x=-1$ نه ماکزیمم و نه مینیمم دارد .

۳) $x^3(x-2)^2$ تابع به‌ازای $x=0$ نه ماکزیمم ونه مینیمم ، به ازای $x=\frac{6}{5}$ ماکزیممی برابر ۱۱ را ، و به ازای $x=2$ مینیممی برابر ۰ دارد .

* $x=0$ تنها ریشهٔ معادلهٔ $e^x-2\sin x-e^{-x}=0$ است .

۴) $x(x-۱)^۲(x+۱)^۳$

۵) $sin^۳x$ در فاصلهٔ $-\pi < x < \pi$

جواب : تابع به ازای $x=-\frac{\pi}{۲}$ مینیممی برابر ۱— ، به ازای $x=۰$ نه ماکزیمم و نه مینیمم و به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ ماکزیممی برابر ۱ دارد .

۶) $x^۴e^x$ جواب : تابع به ازای $x=-۴$ ماکزیممی برابر ۴٫۶۹ و به‌ازای $x=۰$ مینیممی برابر ۰ دارد .

۷) $e^{-x}cos^۲x$ در فاصلهٔ $۰ < x < \pi$

جواب : تابع به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ مینیممی برابر ۰ و به‌ازای $x=۲٫۶۸$ ماکزیممی برابر ۰٫۰۵۵ دارد .

۸) وضع تابع $۴x^۵-۱۵x^۴+۲۰x^۳-۱۰x^۲$ را در نقطهٔ $x=۱$ تعیین کنید .

۹) وضع تابع $x^۲sin\,x$ را در نقطهٔ $x=۰$ تعیین کنید. نشان دهید که به‌ازای $x_۱$ ، که جواب معادلهٔ $۲tg\,x_۱+x_۱=۰$ است ، تابع مذکور یک اکسترمم دارد (تابع به ازای $x=۲٫۲۹$ ماکزیممی برابر ۳٫۹۶ دارد) .

۱۰) وضع تابع $x\,sin^۲x$ را درنقطهٔ $x=۰$ تعیین کنید. نشان دهید که به‌ازای $x_۱$ ، که جواب معادلهٔ $tg\,x_۱+۲x_۱=۰$ است ، تابع مذکور یک اکسترمم دارد (تابع به ازای $x=۱٫۸۴$ ماکزیممی برابر ۱٫۷۱ دارد) .

۱۱) نشان دهید که اگر درنقطهٔ $x=a$ نخستین مشتق مخالف صفر $f(x)$ از مرتبهٔ فرد باشد (n فرد) ، $f(x)$ درنقطهٔ $x=a$ ، بسته به‌آن که $f^{(n)}(a)$ مثبت یا منفی باشد ، صعودی یا نزولی است .

تمرین اضافی

۱) تابع $y=e^x+e^{-x}$ مفروض است . dx را برحسب تابعی از y و dy بدست آورید .

جواب : $dx=\frac{\pm dy}{\sqrt{y^۲-۴}}$

۲) نشان دهید که :

$$\frac{d}{dx}\, ln(۳x+۲+\sqrt{۹x^۲+۱۲x})=\frac{۳}{\sqrt{۹x^۲+۱۲x}}$$

۳) نشان دهید که :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{٤}(x^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{x}{۸}\sqrt{x^۲+۱}-\frac{۱}{۸}\, ln\,(x+\sqrt{x^۲+۱})\right]=x^۲\sqrt{x^۲+۱}$$

٤) نشان دهید که خم $x=t^۳+۲t^۲$ ، $y=۳t^۲+٤t$ نقطهٔ عطف ندارد .

٥) نشان دهید که نقاط تقاطع دو خم $۲y=x\, sin\, x$ و $y=cos\, x$ نقاط عطف خم اول است . هردو خم را در یک دستگاه مختصات رسم کنید .

٦) حرکت همساز کاهشیاب

$$s=ae^{-bt}\, sin\, ct$$

را درنظر میگیریم . a و b و c مقادیر ثابت و مثبتند . نشان دهید که مقادیر متوالی t که به ازای آنها سرعت صفر است $(v=۰)$ ، یک تصاعد حسابی و مقادیر s نظیر آنها یک تصاعد هندسی نزولی تشکیل میدهند .

۷) بهطول نقطهٔ متحرك P که روی سهمی $y=ax^۲$ حرکت میکند ، درهرثانیه یک واحد اضافه میشود . O مبدأ مختصات و T محل تقاطع خط مماس به سهمی درنقطهٔ P با محور xهاست. نشان دهید کهسرعت افزایش طول قوس OP برابر قدر مطلق نسبت $\frac{TP}{OT}$ است .

۸) M تصویر قائم نقطهٔ اختیاری P از منحنی زنجیر $y=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ بر محور x ها (شکل خم را در فصل ۲۶ ببینید) و A تصویرقائم نقطهٔ M برخط مماس به خم در نقطهٔ P است . نشان دهید که طول MA برابر مقدار ثابت a است .

۹) خم $x^۲y+۱۲y=۱٤٤$ یک نقطهٔ ماکزیمم و دو نقطهٔ عطف دارد . مساحت مثلثی را حساب کنید که اضلاع آن مماسهای به خم در این سه نقطهاند .

جواب : ۱

۱۰) میدانیم که $ln\,6 = 1.792$ و $ln\,7 = 1.946$ است . مقدار $ln\,6.15$ را نخست با انترپلاسیون و سپس با دیفرانسیل حساب کنید و سرانجام با ترسیم نشان دهید که مقدار دقیق آن بین این دو مقدار است .

۱۱) بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ مفروض است . طول کوتاهترین پاره خط واقع برمماس به بیضی و محدود به محورهای مختصات را پیدا کنید . جواب : $a+b$

۱۲) سطح محدود به خمهای $y^2 = x$ و $y^2 = x^3$ و واقع درناحیهٔ اول مختصات را درنظر میگیریم. دراین سطح مستطیلی چنان رسم میکنیم که اضلاع آن موازی محورها ، دوانتهای یک قطرآن واقع بردو خم داده شده وطول هریک ازدو ضلع موازی محور xها برابر $\frac{1}{3}$ باشد . مساحت بزرگترین مستطیلی را پیدا کنید که بدین ترتیب بدست میاید . جواب : ۰٫۰۱۹

۱۳) یک ضلع مستطیلی واقع برمحور x ها ، یک ضلع دیگر آن واقع برخط $x = \frac{1}{2}$ و یکی از رئوس آن واقع برخم $y = e^{-x^2}$ است. مساحت بزرگترین مستطیلی‌را که به‌این طریق بدست میاید ، پیدا کنید . جواب : $e^{-0.25} = 0.7788$

۱۴) ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ae^{\frac{x}{a}} - 3x - 2ae^{-\frac{x}{a}}$ را پیدا کنید .

جواب : ماکزیمم تابع برابر $-a$ ومینیمم‌آن برابر $a(1 - 3ln\,2)$ است.

۱۵) تابع $x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 6y + 5 = 0$ مفروض‌است. ماکزیمم‌و مینیمم y را پیدا کنید . جواب : ماکزیمم y برابر ۱ و مینیمم آن برابر ۵ است

حساب انتگرال

فصل دوازدهم

انتگرال گیری ـ چند قاعده برای پیدا کردن انتگرال صورتهای نمونهٔ مقدماتی

۱۲۶- انتگرال گیری . ـ تا کنون عملهای معکوس «جمع و تفریق ، ضرب و تقسیم ، به قوه رساندن و ریشه گرفتن» را شناخته ایم . در مثالهای زیر نیز طرفهای دوم ستون سمت راست ، نظیر به نظیر ، معکوسهای طرف دوم ستون سمت چپ‌اند.

$$y=x^{۲}+۱ \quad , \quad x=+\sqrt{y-۱}$$

$$y=a^{x} \quad , \quad x=log_{a}y$$

$$y=sin\,x \quad , \quad x=arc\ sin\,y$$

درحساب‌دیفرانسیل پیدا کردن $f'(x)$ یعنی‌پیدا کردن مشتق تابع $f(x)$ را آموخته‌ایم و این عمل را با علامت

$$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

نشان میدهیم . اگر ضریب دیفرانسیل بکار بریم ، مینویسیم :

$$df(x)=f'(x)dx$$

انتگرال گیری **عمل معکوس** مشتق گیری است ، یعنی :
باید تابع $f(x)$ راکه مشتق آن

$$f'(x)=\varphi(x) \qquad (۱)$$

در دست است ، پیدا کرد .

چون در حساب انتگرال معمولاً دیفرانسیل بکار میبریم ، میتوانیم رابطهٔ

$$df(x)=f'(x)dx=\varphi(x)dx \qquad (۲)$$

را بنویسیم و مسئله را به صورت زیر بیان کنیم :

دیفرانسیل تابعی دردست است ، میخواهیم‌خودآن تابع را پیدا کنیم .

تابع $f(x)$ که بدین ترتیب بدست میاید یک **انتگرال** دیفرانسیل داده شده است و عملی که برای پیدا کردن آن انجام میگیرد ، **انتگرال‌گیری** نام دارد . برای نوشتن آن ، علامت $\int$ را جلو دیفرانسیل داده شده میگذاریم* :

$$\int f'(x)dx = f(x) \tag{۳}$$

و میخوانیم : انتگرال $f'(x)dx$ برابر است با $f(x)$.

دیفرانسیل dx نشان میدهد که x **متغیر مستقل** است . مثلاً

(الف) اگر $f(x)=x^{۳}$ باشد ، $f'(x)dx=۳x^{۲}dx$ است و :

$$\int ۳x^{۲}dx = x^{۳}$$

(ب) اگر $f(x)=\sin x$ باشد ، $f'(x)dx=\cos x\, dx$ است و :

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

(پ) اگر $f(x)=\mathrm{arc\,tg}\, x$ باشد ، $f'(x)dx=\dfrac{dx}{۱+x^{۲}}$ است و :

$$\int \frac{dx}{۱+x^{۲}} = \mathrm{arc\,tg}\, x$$

از آنچه گذشت این نتیجه حاصل میگردد که

محاسبهٔ دیفرانسیل و محاسبهٔ انتگرال دو عمل معکوس یکدیگرند .

از دو طرف تساوی (۳) دیفرانسیل میگیریم :

$$d\int f'(x)dx = f'(x)dx \tag{٤}$$

---

* این علامت ، از نظر تاریخی ، همان S حرف اول کلمهٔ sum انگلیسی و یا somme فرانسوی است که تغییر شکل پیدا کرده است . شمارهٔ ۱۵۵ را ببینید .

اگر در تساوی (۳) بجای $f'(x)dx$ مقدار آن را از تساوی (۲) ، یعنی $df(x)$ ، قرار دهیم ، داریم :

$$\int df(x)=f(x) \qquad (5)$$

پس دو علامت $\frac{d}{dx}$ و $\int \dots dx$ یا دو علامت d و $\int$ نشانهٔ عملهای معکوس یکدیگرند . وقتی d جلوی $\int$ است [مانند (۴)] ، دو علامت یکدیگر را خنثی میکنند ، ولی وقتی $\int$ جلوی d است [مانند (۵)] ، دو علامت یکدیگر را در همهٔ حالات خنثی نمیکنند .

دلیل این مطلب پس از مطالعهٔ شمارهٔ بعد و شناختن ثابت انتگرال گیری روشن میشود .

۱۲۷- مقدار ثابت انتگرال گیری - انتگرال نامعین . - بنابر شمارهٔ اخیر چون $d(x^3)=3x^2dx$ است ، پس $\int 3x^2dx=x^3$ است ،

و چون $d(x^3+2)=3x^2dx$ است ، پس $\int 3x^2dx=x^3+2$ است ،

و چون $d(x^3-7)=3x^2dx$ است ، پس $\int 3x^2dx=x^3-7$ است. بطور کلی چون $d(x^3+C)=3x^2dx$ است [C مقداری ثابت و اختیاری است] ، پس

$$\int 3x^2dx=x^3+C$$

است. این مقدار C را که به متغیر مستقل بستگی ندارد ، مقدار ثابت انتگرال گیری مینامند. چون میتوان بجای C مقدار دلخواهی گذاشت ، پس اگر دیفرانسیلی دارای یک انتگرال باشد ، دارای بینهایت انتگرال است و اختلاف این انتگرالها فقط در مقدار ثابت آنهاست . بنابراین

$$\int f'(x)dx=f(x)+C$$

است . چون مقدار ثابت C نامعین است ، عبارت

$$f(x)+C$$

را **انتگرال نامعین** $f'(x)dx$ مینامند .

روشن است که اگر مشتق تابع $\varphi(x)$ ، $f(x)$ باشد ، مشتق تابع $\varphi(x)+C$ ، که در آن C مقدار ثابت و دلخواهی است ، همان $f(x)$ است . پس میتوان گفت :

قضیه - اگر تفاضل دو تابع مقدار ثابتی باشد ، مشتق آنها یکی است .

اکنون میخواهیم بدانیم که اگر مشتق تابع $\varphi(x)$ ، $f(x)$ باشد ، آیا تمام توابعی که مشتق آنها همان $f(x)$ است ، به صورت $\varphi(x)+C$ هستند (C مقدار ثابتی است) ؟

قضیهٔ عکس - اگر مشتق دو تابع یکی باشد ، تفاضل آن دو تابع مقدار ثابتی است .

اثبات ـ فرض میکنیم مشتق دو تابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ ، $f(x)$ است . تابعی به صورت زیر درنظر میگیریم :

$$F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

بنابر فرض داریم :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[\varphi(x)-\psi(x)]=f(x)-f(x)=0 \qquad (1)$$

اما بنابر دستور میانه ، رابطهٔ (D) ی شمارهٔ ۱۱۶ ، داریم :

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta x\, F'(x+\theta\Delta x) \qquad (0<\theta<1)$$

چون بنابر رابطهٔ (۱) مشتق تابع $F(x)$ به ازای جمیع مقادیر x صفر است ، پس :

$$F(x+\Delta x)-F(x)=0$$

و

$$F(x+\Delta x)=F(x)$$

این تساوی نشان میدهد که وقتی به x نموی مانند Δx میدهیم ، مقدار تابع

$$F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

تغییر نمیکند ، یعنی تفاضل دو تابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ مقدار ثابتی است .

در فصل بعد با چند مثال نشان خواهیم داد که وقتی مقدار انتگرال به ازای یک مقدار از متغیر معلوم است ، مقدار ثابت C را نیز میتوان بدست آورد . دراین فصل به محاسبهٔ انتگرال نامعین چند دیفرانسیل ساده میپردازیم و بدین منظور این قضیه را بدون اثبات میپذیریم که **هر تابع متصل دارای یك انتگرال نامعین است** . اثبات دقیق

این قضیه از سطح این کتاب بالاتر است ، ولی صحت آن برای توابع ساده دراین فصل ودر فصلهای بعد آشکار خواهد شد .

پس ازمحاسبهٔ انتگرال نامعین ، درستی نتیجه را میتوان بآسانی آزمود زیرا **دیفرانسیل انتگرال باید برابر دیفرانسیل داده شده باشد .**

۱۲۸ - چندقاعده برای پیدا کردن انتگرال صورتهای نمونهٔ مقدماتی. - در حساب دیفرانسیل یک قاعدهٔ کلی وجود دارد که برای محاسبهٔ دیفرانسیل هرتابعی بکار میرود (شمارهٔ ۲۷) ولی در حساب انتگرال هیچ قاعدهٔ کلی که بتوان آن را در تمام حالات بکاربرد ، وجود ندارد * . در هر مسئله باید راه خاصی را رفت و با توجه به نتایج حساب دیفرانسیل به انتگرال یک دیفرانسیل رسید ، یعنی باید این مسئله را حل کرد که :

دیفرانسیل داده شده دیفرانسیل کدام تابع است ؟

پس محاسبهٔ انتگرال اساساً یک روش آزمایشی است و به همین سبب برای آسانی کار جدولهایی تنظیم کرده‌اند و انتگرالهای حل شده را به نام **انتگرالهای نمونه** در آنها درج نموده‌اند . برای محاسبهٔ هرانتگرال آن را با این انتگرالها مقایسه میکنند ، اگر همانند یکی از آنها باشد ، انتگرال حل شده است . اگر همانند هیچیک از آنها نباشد ، باید آن را با تغییر شکل یا تغییر متغیر به صورت یکی از آنها درآورد . این کار جز با تمرین زیاد میسر نیست. به همین سبب است که بخش بزرگی ازاین کتاب به بیان روشهای گوناگون محاسبهٔ انتگرالهایی اختصاص داده شده است که اغلب درحل مسائل عملی پیش میایند .

همواره میتوان از نتیجهٔ هرمشتق گیری یک دستور برای انتگرال گیری استنتاج کرد . در تبدیل انتگرالها به انتگرالهای نمونه دو قاعدهٔ زیر را بکار میبرند :

الف - انتگرال مجموع جبری چنددیفرانسیل برابراست با مجموع جبری انتگرالهای تک تک آن دیفرانسیلها .

اثبات - از $\int du+\int dv-\int dw$

---

* گرچه بدانیم که دیفرانسیل داده شده دارای انتگرال است ، بازهم ممکن است پیدا کردن جواب آن به صورت ترکیبی از توابع معلوم غیر ممکن باشد .

که در آن u و v و w توابعی از یک متغیرند ، دیفرانسیل میگیریم ، داریم :

$$du+dv-dw$$

پس
$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw \qquad (۱)$$

ب - ضریب ثابت را میتوان قبل یا بعد از علامت انتگرال گذاشت .

اثبات - از
$$a\int dv$$

دیفرانسیل میگیریم ، داریم :
$$a\,dv$$

پس
$$\int a\,dv=a\int dv \qquad (۲)$$

به سبب اهمیتی که این دو قاعده دارند ، آنها را به صورت دو دستور در آغاز صورت زیر مینویسیم .

انتگرالهای نمونهٔ مقدماتی

$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw \qquad (۱)$$

$$\int a\,dv=a\int dv \qquad (۲)$$

$$\int dx=x+C \qquad (۳)$$

$$\int v^n\,dv=\frac{v^{n+۱}}{n+۱}+C \qquad (n\neq -۱) \qquad (٤)$$

$$\int \frac{dv}{v}=ln\,v+C \qquad (٥)$$

$$=ln\,v+ln\,c=ln\,cv$$

بجای C ، $ln\,c$ گذاشته‌ایم .

$$\int a^v\,dv=\frac{a^v}{ln\,a}+C \qquad (٦)$$

(۷) $$\int e^v\,dv = e^v + C$$

(۸) $$\int \sin v\,dv = -\cos v + C$$

(۹) $$\int \cos v\,dv = \sin v + C$$

(۱۰) $$\int \sec^2 v\,dv = tg\,v + C$$

(۱۱) $$\int cosec^2 v\,dv = -cotg\,v + C$$

(۱۲) $$\int \sec v\,tg\,v\,dv = \sec v + C$$

(۱۳) $$\int cosec\,v\,cotg\,v\,dv = -cosec\,v + C$$

(۱٤) $$\int tg\,v\,dv = -\ln\cos v + C = \ln\sec v + C$$

(۱٥) $$\int cotg\,v\,dv = \ln\sin v + C$$

(۱٦) $$\int \sec v\,dv = \ln(\sec v + tg\,v) + C$$

(۱۷) $$\int cosec\,v\,dv = \ln(cosec\,v - cotg\,v) + C$$

(۱۸) $$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,arc\,tg\,\frac{v}{a} + C$$

(۱۹) $$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{v-a}{v+a} + C \qquad (v^2 > a^2)$$

(۱۹a) $$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} + C \qquad (v^2 < a^2)$$

(۲۰) $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\,sin\,\frac{v}{a} + C$$

$$(۲۱)\qquad \int \frac{dv}{\sqrt{v^۲ \pm a^۲}} = ln\,(v + \sqrt{v^۲ \pm a^۲}) + C$$

$$(۲۲)\qquad \int \sqrt{a^۲ - v^۲}\,dv = \frac{v}{۲}\sqrt{a^۲ - v^۲} + \frac{a^۲}{۲}\,arc\,sin\,\frac{v}{a} + C$$

$$(۲۳)\qquad \int \sqrt{v^۲ \pm a^۲}\,dv = \frac{v}{۲}\sqrt{v^۲ \pm a^۲} \pm \frac{a^۲}{۲}\,ln\,(v + \sqrt{v^۲ \pm a^۲}) + C$$

۱۲۹ـ دستورهای (۳) ، (٤) ، (۵) . ـ این دستورها بآسانی ثابت میشوند

اثبات دستور (۳) ـ چون $d(x+C) = dx$ است ، پس :

$$\int dx = x + C$$

اثبات دستور (٤) ـ چون $d\left(\frac{v^{n+۱}}{n+۱} + C\right) = v^n\,dv$ است، پس :

$$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+۱}}{n+۱} + C$$

این دستور به ازای جمیع مقادیر n درست است جز به ازای $n = -۱$. در حالت $n = -۱$ دستور (٤) مقدار

$$\int v^{-۱}dv = \frac{v^{-۱+۱}}{-۱+۱} + C = \frac{۱}{۰} + C$$

را میدهد که شامل تقسیم به صفر است. حالت $n = -۱$ در دستور (۵) ذکر شده است.

اثبات دستور (۵) ـ چون $d(ln\ v + C) = \frac{dv}{v}$ است ، پس :

$$\int \frac{dv}{v} = ln\ v + C$$

اگر بجای C ، $ln\ c$ بگذاریم ، دستور (۵) به شکل مختصرتر زیر در میاید :

$$\int \frac{dv}{v} = ln\ v + ln\ c = ln\ cv$$

دستور (۵) نشان میدهد که **اگر دیفرانسیل زیر علامت انتگرال به شکل یك کسر باشد و صورت آن کسر دیفرانسیل مخرج آن باشد ، انتگرال خواسته شده لگاریتم طبیعی مخرج آن کسر است .**

چند مثال*

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $$\int x^{6}dx=\frac{x^{6+1}}{6+1}+C=\frac{x^{7}}{7}+C$$

دراین مثال از دستور (۴) استفاده کرده‌ایم و در آن $v=x$ و $n=6$ است .

۲) $$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

دراین مثال از دستور (۴) استفاده کرده‌ایم و در آن $v=x$ و $n=\frac{1}{2}$ است .

۳) $$\int\frac{dx}{x^{3}}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^{2}}+C$$

دراین مثال از دستور (۴) استفاده کرده‌ایم و در آن $v=x$ و $n=-3$ است .

۴) $$\int ax^{5}dx=a\int x^{5}dx=\frac{ax^{6}}{6}+C$$

دراین مثال از دستورهای (۲) و (۴) استفاده کرده‌ایم .

---

* در محاسبهٔ انتگرالها باید انتگرال توابع ساده را ازبر دانست .

۵) $$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx$$

بنابردستور (۱) $$= \int 2x^3dx - \int 5x^2dx - \int 3x\,dx + \int 4dx$$

بنابردستور (۲) $$= 2\int x^3dx - 5\int x^2dx - 3\int x\,dx + 4\int dx =$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$$

یادداشت ـ به هرانتگرال باید یک مقدارثابت و دلخواه افزود . ما بجای حاصل جمع جبری آنها تنها یک مقدار ثابت میفزاییم .

۶) $$\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

بنابر دستور (۱) $$= \int 2ax^{-\frac{1}{2}}dx - \int bx^{-2}dx + \int 3cx^{\frac{2}{3}}dx$$

بنابر دستور (۲) $$= 2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - b\int x^{-2}dx + 3c\int x^{\frac{2}{3}}dx$$

بنابر دستور (۴) $$= 2a\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b\,\frac{x^{-1}}{-1} + 3c\,\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}} + C$$

۷) $$\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3dx = a^2x + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} + C$$

در مثال اخیر نخست دو جملهٔ داخل پرانتز را بسط داده‌ایم و سپس انتگرال آن را پیدا کرده‌ایم .

$$\int (a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}\, x\, dx = \frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C \qquad (8$$

حل ـ این انتگرال را میتوانیم به صورت (٤) درآوریم . برای این کار ، با استفاده از دستور (٢) ، جلوی انتگرال ضریب $\frac{1}{2b^2}$ وجلوی $x\, dx$ در داخل انتگرال ضریب $2b^2$ میگذاریم .

$$\int (a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}\, x\, dx = \frac{1}{2b^2}\int (a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}(2b^2x\, dx)$$

$$[v=a^2+b^2x^2 \quad , \quad dv=2b^2x\, dx \quad , \quad n=\frac{1}{2}]$$

بنابر دستور (٤)

$$=\frac{1}{2b^2}\int v^{\frac{1}{2}}dv=\frac{v^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C$$

$$=\frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C$$

یادداشت ـ روشن است که تنها ضریب ثابت را میتوان داخل انتگرال کرد و یا از آن خارج نمود. اگر ضریبی که ازانتگرال خارج و یا به انتگرال داخل میکنیم ، به متغیر بستگی داشته باشد ، مقدار انتگرال عوض میشود .

$$\int \frac{3ax\, dx}{b^2+c^2x^2} = \frac{3a}{2c^2}\, ln\,(b^2+c^2x^2)+C \qquad (9$$

حل ـ

$$\int \frac{3ax\, dx}{b^2+c^2x^2} = 3a\int \frac{x\, dx}{b^2+c^2x^2}$$

این انتگرال را میتوانیم به صورت(٥) درآوریم . برای این کارجلوی انتگرال ضریب $\frac{1}{2c^2}$ و جلوی $x\, dx$ در داخل انتگرال ضریب $2c^2$ میگذاریم.

$$۳a\int \frac{x\,dx}{b^۲+c^۲x^۲}=\frac{۳a}{۲c^۲}\int \frac{۲c^۲x\,dx}{b^۲+c^۲x^۲}$$

$$[v=b^۲+c^۲x^۲ \quad , \quad dv=۲c^۲x\,dx]$$

بنابر دستور (۵)
$$=\frac{۳a}{۲c^۲}\int\frac{dv}{v}=\frac{۳a}{۲c^۲}\ ln\ v+C$$

$$=\frac{۳a}{۲c^۲}\ ln\,(b^۲+c^۲x^۲)+C$$

۱۰)
$$\int\frac{x^۳dx}{x+۱}=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-ln\,(x+۱)+C$$

دراین مثال نخست صورت را به مخرج تقسیم میکنیم :

$$\frac{x^۳}{x+۱}=x^۲-x+۱-\frac{۱}{x+۱}$$

این مقدار را زیر علامت انتگرال قرار میدهیم و انتگرال آن را بنابر دستور (۱) حساب میکنیم .

۱۱)
$$\int\frac{۲x-۱}{۲x+۳}\,dx=x-ln\,(۲x+۳)^۲+C$$

دراین مثال نخست صورت را به مخرج تقسیم میکنیم و سپس انتگرال آن را پیدا مینماییم .

در $\int f(x)dx$ ، $f(x)$ را تابع زیر علامت انتگرال مینامند . مثلاً در مثال ۱ صفحهٔ ۳۱۵ تابع زیر علامت انتگرال $x^٦$ است .

تمرین

درستی انتگرالهای زیر را بیازمایید :

۱) $\int x^٤dx=\frac{x^۵}{۵}+C$ ۲) $\int\frac{dx}{x^۲}=-\frac{۱}{x}+C$

۳) $\int x^{\frac{۲}{۳}}dx=\frac{۳x^{\frac{۵}{۳}}}{۵}+C$

٤) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=۲\sqrt{x}+C$

۵) $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}}=\frac{۳x^{\frac{۲}{۳}}}{۲}+C$

٦) $\int ۳ay^{۲}dy=ay^{۳}+C$

۷) $\int \frac{۲dt}{t^{۲}}=-\frac{۲}{t}+C$

۸) $\int \sqrt{ax}\,dx=\frac{۲x\sqrt{ax}}{۳}+C$

۹) $\int \frac{dx}{\sqrt{۲x}}=\sqrt{۲x}+C$

۱۰) $\int \sqrt[۳]{۳t}\,dt=\frac{(۳t)^{\frac{٤}{۳}}}{٤}+C$

۱۱) $\int (x^{\frac{۳}{۲}}-۲x^{\frac{۲}{۳}}+۵\sqrt{x}-۳)\,dx=\frac{۲x^{\frac{۵}{۲}}}{۵}-\frac{٦x^{\frac{۵}{۳}}}{۵}+\frac{۱۰x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}-۳x+C$

۱۲) $\int \frac{٤x^{۲}-۲\sqrt{x}}{x}\,dx=۲x^{۲}-٤\sqrt{x}+C$

۱۳) $\int \left(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۲}{x^{۲}}\right)dx=\frac{x^{۳}}{٦}+\frac{۲}{x}+C$

۱٤) $\int \sqrt{x}\,(۳x-۲)dx=\frac{٦x^{\frac{۵}{۲}}}{۵}-\frac{٤x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+C$

۱۵) $\int \frac{x^{۳}-٦x+۵}{x}\,dx=\frac{x^{۳}}{۳}-٦x+۵\ln x+C$

۱٦) $\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{۲(a+bx)^{\frac{۳}{۲}}}{۳b}+C$

۱۷) $\int \frac{dy}{\sqrt{a-by}}=-\frac{۲\sqrt{a-by}}{b}+C$

۱۸) $\int (a+bt)^2 dt = \frac{(a+bt)^3}{3b} + C$

۱۹) $\int x(2+x^2)^2\, dx = \frac{(2+x^2)^3}{6} + C$

۲۰) $\int y(a-by^2)dy = -\frac{(a-by^2)^2}{4b} + C$

۲۱) $\int t\sqrt{2t^2+3}\, dt = \frac{(2t^2+3)^{\frac{3}{2}}}{6} + C$

۲۲) $\int x(2x+1)^2 dx = x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

۲۳) $\int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{x^3+8}} = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C$

۲۴) $\int \frac{6z\, dz}{(5-3z^2)^2} = \frac{1}{5-3z^2} + C$

۲۵) $\int (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

۲۶) $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + C$

۲۷) $\int \sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

۲۸) $\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{a^4+t^4}} = \frac{\sqrt{a^4+t^4}}{2} + C$

۲۹) $$\int \frac{dy}{(a+by)^{۳}} = -\frac{۱}{۲b(a+by)^{۲}} + C$$

۳۰) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^{۲})^{۳}} = -\frac{۱}{۴b(a+bx^{۲})^{۲}} + C$$

۳۱) $$\int \frac{t^{۲}dt}{(a+bt^{۳})^{۲}} = -\frac{۱}{۳b(a+bt^{۳})} + C$$

۳۲) $$\int z(a+bz^{۳})^{۲}dz = \frac{a^{۲}z^{۲}}{۲} + \frac{۲ab\,z^{۵}}{۵} + \frac{b^{۲}z^{۸}}{۸} + C$$

۳۳) $$\int x^{n-۱}\sqrt{a+bx^{n}}\,dx = \frac{۲(a+bx^{n})^{\frac{۳}{۲}}}{۳nb} + C$$

۳۴) $$\int \frac{(۲x+۳)dx}{\sqrt{x^{۲}+۳x}} = ۲\sqrt{x^{۲}+۳x} + C$$

۳۵) $$\int \frac{(x^{۲}+۱)dx}{\sqrt{x^{۳}+۳x}} = \frac{۲\sqrt{x^{۳}+۳x}}{۳} + C$$

۳۶) $$\int \frac{(۲+\ln x)dx}{x} = \frac{(۲+\ln x)^{۲}}{۲} + C$$

۳۷) $$\int \sin^{۲}x\cos x\,dx = \int (\sin x)^{۲}\cos x\,dx = \frac{(\sin x)^{۳}}{۳} + C$$
$$= \frac{\sin^{۳}x}{۳} + C$$

در مسئلهٔ اخیر از دستور (۴) استفاده کنید و $v=\sin x$ قرار دهید . دراین صورت $dv=\cos x\,dx$ و $n=۲$ میشود .

۳۸) $$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{۲}ax}{۲a} + C$$

۳۹) $$\int \sin ۲x\cos^{۲}۲x\,dx = -\frac{\cos^{۳}۲x}{۶} + C$$

۴۰) $$\int tg\,\frac{x}{۲}\,sec^{۲}\,\frac{x}{۲}\,dx = tg^{۲}\frac{x}{۲} + C$$

۴۱) $$\int \frac{cos\,ax\,dx}{\sqrt{b+sin\,ax}} = \frac{۲\sqrt{b+sin\,ax}}{a} + C$$

۴۲) $$\int \left(\frac{sec\,x}{۱+tg\,x}\right)^{۲} dx = -\frac{۱}{۱+tg\,x} + C$$

۴۳) $$\int \frac{dx}{۲+۳x} = \frac{ln\,(۲+۳x)}{۳} + C$$

۴۴) $$\int \frac{x^{۲}dx}{۲+x^{۳}} = \frac{ln\,(۲+x^{۳})}{۳} + C$$

۴۵) $$\int \frac{t\,dt}{a+bt^{۲}} = \frac{ln\,(a+bt^{۲})}{۲b} + C$$

۴۶) $$\int \frac{(۲x+۳)dx}{x^{۲}+۳x} = ln\,(x^{۲}+۳x) + C$$

۴۷) $$\int \frac{(y+۲)dy}{y^{۲}+۴y} = \frac{ln\,(y^{۲}+۴y)}{۲} + C$$

۴۸) $$\int \frac{e^{\theta}\,d\theta}{a+be^{\theta}} = \frac{ln\,(a+be^{\theta})}{b} + C$$

۴۹) $$\int \frac{sin\,x\,dx}{۱-cos\,x} = ln\,(۱-cos\,x) + C$$

۵۰) $$\int \frac{sec^{۲}y\,dy}{a+b\,tg\,y} = \frac{۱}{b}\,ln\,(a+b\,tg\,y) + C$$

۵۱) $$\int \frac{(۲x+۳)dx}{x+۲} = ۲x - ln\,(x+۲) + C$$

۵۲) $$\int \frac{(x^{۲}+۲)dx}{x+۱} = \frac{x^{۲}}{۲} - x + ۳ln\,(x+۱) + C$$

۵۳) $\int \frac{(x+4)dx}{2x+3} = \frac{x}{2} + \frac{5\ln(2x+3)}{4} + C$

۵۴) $\int \frac{e^{2s}\,ds}{e^{2s}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2s}+1) + C$

۵۵) $\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta = 2\ln(ae^{\theta}-b) - \theta + C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید ودرستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید .

۵۶) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$

حل - $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = -\frac{1}{5}\int (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}(-10x\,dx)$

$$= -\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C$$

آزمایش درستی جواب : $d\left\{-\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C\right\}$

$$= -\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}(6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}(-10x)dx = \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$$

۵۷) $\int (x^3+3x^2)dx$

۵۸) $\int \frac{(x^2-4)dx}{x^4}$

۵۹) $\int \left(\frac{\sqrt{5x}}{5} + \frac{5}{\sqrt{5x}}\right)dx$

۶۰) $\int \sqrt[3]{by^2}\,dy$

۶۱) $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t}}$

۶۲) $\int \sqrt[3]{2-3x}\,dx$

٦٣) $\int \frac{\sin ٢\theta \, d\theta}{\sqrt{\cos ٢\theta}}$

٦٤) $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^x - ٥}}$

٦٥) $\int \frac{٢ \, dx}{\sqrt{٣ + ٢x}}$

٦٦) $\int \frac{٣ \, dx}{٢ + ٣x}$

٦٧) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{١ - ٢x^٢}}$

٦٨) $\int \frac{t \, dt}{٣t^٢ + ٤}$

٦٩) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{١}{\sqrt{x}}\right)^٢ dx$

٧٠) $\int \left(y^٢ - \frac{١}{y^٢}\right)^٣ dy$

٧١) $\int \frac{\sin a\theta \, d\theta}{\cos a\theta + b}$

٧٢) $\int \frac{\operatorname{cosec}^٢\theta \, d\theta}{\sqrt{٢\operatorname{cotg} \theta + ٣}}$

٧٣) $\int \frac{(٢x + ٥)dx}{x^٢ + ٥x + ٦}$

٧٤) $\int \frac{(٢x + ٧)dx}{x + ٣}$

٧٥) $\int \frac{(x^٢ + ٢)dx}{x + ٢}$

٧٦) $\int \frac{(x^٣ + ٣x)dx}{x^٢ + ١}$

٧٧) $\int \frac{(٤x + ٣)dx}{\sqrt[٣]{١ + ٣x + ٢x^٢}}$

٧٨) $\int \frac{(e^t + ٢)dt}{e^t + ٢t}$

٧٩) $\int \frac{(e^x + \sin x)dx}{\sqrt{e^x - \cos x}}$

٨٠) $\int \frac{\sec ٢\theta \operatorname{tg} ٢\theta \, d\theta}{٣\sec ٢\theta - ٢}$

٨١) $\int \frac{\sec^٢ ٢t \, dt}{\sqrt{٥ + ٣\operatorname{tg} ٢t}}$

١٣٠ـ اثبات دستورهای (٦) و (٧) . ـ این دستورها بآسانی از دستورهای XI و XIa ی شمارهٔ ٩٤ نتیجه میشوند .

مثال ـ نشان دهید که:

$$\int ba^{٢x} \, dx = \frac{ba^{٢x}}{٢\ln a} + C$$

حل -
$$\int ba^{۲x}\,dx=b\int a^{۲x}\,dx$$

اگر تابع زیر علامت انتگران را در ۲ و عامل جلوی انتگرال را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم و ۲x را v فرض نماییم ، این انتگرال به صورت (٦) درمیاید .

$$b\int a^{۲x}\,dx=\frac{b}{۲}\int a^{۲x}\times ۲\,dx=\frac{b}{۲}\int a^{۲x}\,d(۲x)=\frac{b}{۲}\cdot\frac{a^{۲x}}{\ln a}+C$$

تمرین

درستی انتگرالهای زیر را بیازمایید :

۱) $\int ٦e^{۳x}\,dx=۲e^{۳x}+C$

۲) $\int e^{\frac{x}{n}}dx=ne^{\frac{x}{n}}+C$

۳) $\int\frac{dx}{e^x}=-\frac{۱}{e^x}+C$

٤) $\int ۱۰^x\,dx=\frac{۱۰^x}{\ln ۱۰}+C$

٥) $\int a^{ny}\,dy=\frac{a^{ny}}{n\ln a}+C$

٦) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=۲e^{\sqrt{x}}+C$

۷) $\int\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=a\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)+C$

۸) $\int\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^{۲}dx=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{۲x}{a}}-e^{-\frac{۲x}{a}}\right)-۲x+C$

۹) $\int xe^{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}+C$

۱۰) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx=e^{\sin x}+C$

۱۱) $\int e^{tg\,\theta} sec^{۲}\theta\, d\theta = e^{tg\,\theta} + C$

۱۲) $\int \sqrt{e^t}\, dt = ۲\sqrt{e^t} + C$

۱۳) $\int a^x e^x\, dx = \frac{a^x e^x}{۱ + ln\, a} + C$

۱٤) $\int a^{۲x}\, dx = \frac{a^{۲x}}{۲ ln\, a} + C$

۱۵) $\int (e^{۵x} + a^{۵x}) dx = \frac{۱}{۵}\left(e^{۵x} + \frac{a^{۵x}}{ln\, a} \right) + C$

انتگرالهای‌زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید.

۱٦) $\int ۵e^{ax}\, dx$

۱۷) $\int \frac{۳\, dx}{e^x}$

۱۸) $\int \frac{٤\, dt}{\sqrt{e^t}}$

۱۹) $\int c^{ax}\, dx$

۲۰) $\int \frac{dx}{٤^{۲x}}$

۲۱) $\int x^{۲} e^{x^{۳}} dx$

۲۲) $\int \left(\frac{e^x + ٤}{e^x} \right) dx$

۲۳) $\int \frac{e^x\, dx}{e^x - ۲}$

۲٤) $\int x(e^{x^{۲}} + ۲) dx$

۲۵) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - ۳}{\sqrt{x}}\, dx$

۲٦) $\int t۲^{t^{۲}}\, dt$

۲۷) $\int \frac{a\, d\theta}{b^{۳\theta}}$

۲۸) $\int ٦xe^{-x^{۲}} dx$

۲۹) $\int (e^{۲x})^{۲} dx$

۳۰) $\int e^{\cos^{2}x}\sin 2x\,dx$ ۳۱) $\int \frac{x^{2}dx}{e^{x^{3}}}$

۱۳۱ - اثبات دستورهای (۸) تا (۱۷) . - دستورهای (۸) تا (۱۳) بآسانی از دستور XIII و دستورهای بعداز آن (شمارهٔ ۹٤) نتیجه میشوند .

اثبات دستور (۱۴) -

$$\int tg\,v\,dv=\int\frac{\sin v\,dv}{\cos v}$$

$$=-\int\frac{-\sin v\,dv}{\cos v}$$

$$=-\int\frac{d(\cos v)}{\cos v}$$

$$=-\ln\cos v+C$$

$$=\ln\sec v+C$$

زیرا $-\ln\cos v=-\ln\frac{1}{\sec v}=-\ln 1+\ln\sec v=\ln\sec v$

اثبات دستور (۱۵) -

$$\int cotg\,v\,dv=\int\frac{\cos v\,dv}{\sin v}=\int\frac{d(\sin v)}{\sin v}$$

بنابر دستور (۵) $=\ln\sin v+C$

اثبات دستور (۱٦) - چون

$$\sec v=\sec v\,\frac{\sec v+tg\,v}{\sec v+tg\,v}$$

$$=\frac{\sec v\,tg\,v+\sec^{2}v}{\sec v+tg\,v}$$

است ، پس :

$$\int\sec v\,dv=\int\frac{\sec v\,tg\,v+\sec^{2}v}{\sec v+tg\,v}\,dv$$

$$=\int\frac{d(\sec v+tg\,v)}{\sec v+tg\,v}$$

بنابر دستور (۵) $=\ln(\sec v+tg\,v)+C$

اثبات دستور (۱۷) - چون $cosec\ v = cosec\ v \dfrac{cosec\ v - cotg\ v}{cosec\ v - cotg\ v}$

$$= \frac{-cosec\ v\ cotg\ v + cosec^۲ v}{cosec\ v - cotg\ v}$$

است ، پس :

$$\int cosec\ v\ dv = \int \frac{-cosec\ v\ cotg\ v + cosec^۲ v}{cosec\ v - cotg\ v}\, dv$$

$$= \int \frac{d(cosec\ v - cotg\ v)}{cosec\ v - cotg\ v}$$

بنابر دستور (۵)

$$= \ln\,(cosec\ v - cotg\ v) + C$$

یک صورت دیگر از دستور (۱۷) عبارتست از

$$\int cosec\ v\ dv = \ln\ tg\ \frac{v}{۲} + C$$

(مسئلهٔ ٤ صفحهٔ ۳۳۰ را ببینید .)

مثال ۱ - انتگرال زیر را پیدا کنید :

$$\int sin\ ۲ax\ dx = -\frac{cos\ ۲ax}{۲a} + C$$

حل - $۲ax$ را v فرض میکنیم ، $dv = ۲a\ dx$ میشود. اکنون اگرانتگرال رادر $\frac{۲a}{۲a}$ ضرب کنیم و $۲a$ ی صورت‌را جاوی dx قرار دهیم ، انتگرال نمونهٔ (۸) بدست میاید :

$$\int sin\ ۲ax\ dx = \frac{۱}{۲a}\int sin\ ۲ax \cdot ۲a\ dx$$

بنابر دستور (۸)

$$= \frac{۱}{۲a}\int sin\ v\ dv = -\frac{۱}{۲a}\ cos\ v + C$$

$$= \frac{۱}{۲a}(-cos\ ۲ax) + C = -\frac{cos\ ۲ax}{۲a} + C$$

مثال ۲ - انتگرال زیررا پیدا کنید :

$$\int (tg\ ۲s - ۱)^۲ ds = \frac{۱}{۲}\ tg\ ۲s + \ln\ cos\ ۲s + C$$

حل -
$$(tg\ ۲s-۱)^۲=tg^۲ ۲s-۲tg\ ۲s+۱$$
$$tg^۲ ۲s=sec^۲ ۲s-۱$$

این مقادیر را در انتگرال داده شده میگذاریم ، داریم :

$$\int (tg\ ۲s-۱)^۲ ds=\int (sec^۲ ۲s-۲tg\ ۲s)ds$$
$$=\int sec^۲ ۲s\ ds-۲\int tg\ ۲s\ ds$$

اکنون ۲s را v فرض میکنیم ، $dv=۲ds$ میشود . دستورهای (۱۰) و (۱٤) را بکار میبندیم .

$$\int sec^۲ ۲s\ ds=\frac{۱}{۲}\int sec^۲ ۲s\ d(۲s)$$
$$\left[=\frac{۱}{۲}\int sec^۲ v\ dv=\frac{۱}{۲}\ tg\ v\right]=\frac{۱}{۲}\ tg\ ۲s$$
$$\int tg\ ۲s\ ds=\frac{۱}{۲}\int tg\ ۲s\ d(۲s)$$
$$\left[=\frac{۱}{۲}\int tg\ v\ dv=-\frac{۱}{۲}\ ln\ cos\ v\right]=-\frac{۱}{۲}\ ln\ cos\ ۲s$$

تمرین

درستی انتگرالهای زیر را بیازمایید :

۱) $\int cos\ mx\ dx=\frac{۱}{m}\ sin\ mx+C$

۲) $\int tg\, bx\, dx=\frac{۱}{b}\ ln\ sec\ bx+C$

۳) $\int sec\ ax\ dx=\frac{۱}{a}\ ln\ (sec\ ax+tg\ ax)+C$

۴) $\int cosec\, v\, dv = ln\ tg \frac{v}{۲} + C$

۵) $\int sec\, ۳t\, tg\, ۳t\, dt = \frac{۱}{۳}\, sec\, ۳t + C$

۶) $\int cosec\, ay\, cotg\, ay\, dy = -\frac{۱}{a}\, cosec\, ay + C$

۷) $\int cosec^{۲} ۳x\, dx = -\frac{۱}{۳}\, cotg\, ۳x + C$

۸) $\int cotg \frac{x}{۲}\, dx = ۲ ln\, sin \frac{x}{۲} + C$

۹) $\int x^{۲} sec^{۲} x^{۳} dx = \frac{۱}{۳}\, tg\, x^{۳} + C$

۱۰) $\int \frac{dx}{sin^{۲} x} = -cotg\, x + C$

۱۱) $\int \frac{ds}{cos^{۲} s} = tg\, s + C$

۱۲) $\int (tg\, \theta + cotg\, \theta)^{۲} d\theta = tg\, \theta - cotg\, \theta + C$

۱۳) $\int (sec\, \theta - tg\, \theta)^{۲} d\theta = ۲(tg\, \theta - sec\, \theta) - \theta + C$

۱۴) $\int \frac{dx}{۱ + cos\, x} = -cotg\, x + cosec\, x + C$

راهنمایی - قبل ازمحاسبهٔ انتگرال اخیر ، صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال را در $۱ - cos\, x$ ضرب کنید و کسر را مختصر نمایید .

۱۵) $\int \frac{dx}{۱ + sin\, x} = tg\, x - sec\, x + C$

۱۶) $\int \frac{\sin s\, ds}{۱+\cos s} = -\ln(۱+\cos s)+C$

۱۷) $\int \frac{\sec^{۲} x\, dx}{۱+tg\, x} = \ln(۱+tg\, x)+C$

۱۸) $\int x \cos x^{۲} dx = \frac{۱}{۲} \sin x^{۲} + C$

۱۹) $\int (x+\sin ۲x) dx = \frac{۱}{۲}(x^{۲}-\cos ۲x)+C$

۲۰) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{۴-\cos x}} = ۲\sqrt{۴-\cos x}+C$

۲۱) $\int \frac{(۱+\cos x)dx}{x+\sin x} = \ln(x+\sin x)+C$

۲۲) $\int \frac{\sec^{۲}\theta\, d\theta}{\sqrt{۱+۲tg\,\theta}} = \sqrt{۱+۲tg\,\theta}+C$

انتگرالهای‌زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۲۳) $\int \sin \frac{۲x}{۳} dx$

۲۴) $\int \cos(b+ax)dx$

۲۵) $\int cosec^{۲}(a-bx)dx$

۲۶) $\int \sec \frac{\theta}{۲}\, tg \frac{\theta}{۲}\, d\theta$

۲۷) $\int cosec \frac{a\theta}{b}\, cotg \frac{a\theta}{b}\, d\theta$

۲۸) $\int e^{x}\, cotg\, e^{x} dx$

۲۹) $\int \sec^{۲} ۲ax\, dx$

۳۰) $\int tg \frac{x}{۳} dx$

۳۱) $\int \frac{dt}{tg\, ۵t}$

۳۲) $\int \frac{d\theta}{\sin^{۲} ۴\theta}$

۳۳) $\int \frac{dy}{cotg\, ۷y}$

۳۴) $\int \frac{\sin \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

۳۵) $\int \frac{dt}{\sin^۲ ۳t}$

۳۶) $\int \frac{d\theta}{\cos ۴\theta}$

۳۷) $\int \frac{a\, dx}{\cos^۲ bx}$

۳۸) $\int \left(\sec ۲\theta - cosec \frac{\theta}{۲}\right) d\theta$

۳۹) $\int (tg\, \theta + \sec \theta)^۲ d\theta$

۴۰) $\int \left(tg\, ۴s - cotg \frac{s}{۴}\right) ds$

۴۱) $\int (cotg\, x - ۱)^۲ dx$

۴۲) $\int (\sec t - ۱)^۲ dt$

۴۳) $\int (۱ - cosec\, y)^۲ dy$

۴۴) $\int \frac{dx}{۱ - \cos x}$

۴۵) $\int \frac{dx}{۱ - \sin x}$

۴۶) $\int \frac{\sin ۲x\, dx}{۳ + \cos ۲x}$

۴۷) $\int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{a + b \sin t}}$

۴۸) $\int \frac{cosec\, \theta\, cotg\, \theta\, d\theta}{۵ - ۴ cosec\, \theta}$

۴۹) $\int \frac{cosec^۲ x\, dx}{\sqrt{۳ - cotg\, x}}$

۵۰) $\int \frac{\sqrt{۵ + ۲ tg\, x}\, dx}{\cos^۲ x}$

۱۳۲-اثبات دستورهای(۱۸) تا (۲۱) . - دستورهای (۱۸) تا (۲۰)بآسانی‌از دستورهای دیفرانسیل نظیر آنها نتیجه میشوند.

اثبات دستور (۱۸) - چون بنابر دستور XXII ی شمارهٔ ۶۰

$$d\left(\frac{۱}{a} arc\, tg \frac{v}{a} + C\right) = \frac{۱}{a} \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{۱ + \left(\frac{v}{a}\right)^۲} = \frac{dv}{v^۲ + a^۲}$$

است ، پس :

$$\int \frac{dv}{v^۲ + a^۲} = \frac{۱}{a} arc\, tg \frac{v}{a} + C$$

اثبات دستور (۱۹) - چون $\frac{۱}{v-a}-\frac{۱}{v+a}=\frac{۲a}{v^۲-a^۲}$

است ، پس: $\frac{۱}{v^۲-a^۲}=\frac{۱}{۲a}\left[\frac{۱}{v-a}-\frac{۱}{v+a}\right]$

بنابراین $\int\frac{dv}{v^۲-a^۲}=\frac{۱}{۲a}\int\frac{dv}{v-a}-\frac{۱}{۲a}\int\frac{dv}{v+a}$

$$=\frac{۱}{۲a}\ ln\ (v-a)-\frac{۱}{۲a}\ ln\ (v+a)$$

$$=\frac{۱}{۲a}\ ln\ \frac{v-a}{v+a}+C$$

اثبات دستور (۱۹a) - برای اثبات این دستور مینویسیم :

$$\frac{۱}{a+v}+\frac{۱}{a-v}=\frac{۲a}{a^۲-v^۲}$$

بقیهٔ اثبات مانند بالاست .

یادداشت - انتگرالهای (۱۹) و (۱۹a) در رابطهٔ زیر صدق میکنند :

$$\int\frac{dv}{v^۲-a^۲}=-\int\frac{dv}{a^۲-v^۲}$$

پس همواره میتوان یکی را بجای دیگری بکار برد ، ولی بعداً خواهیم دید که دربعضی از مثالهای عددی باید یکی از آنها راکه مناسبتر است انتخاب کرد .

اثبات دستور (۲۰) - چون بنابر دستور XX شمارهٔ ۹٤

$$d\left(arc\ sin\ \frac{v}{a}+C\right)=\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{۱-\left(\frac{v}{a}\right)^۲}}=\frac{dv}{\sqrt{a^۲-v^۲}}$$

است ، پس : $\int\frac{dv}{\sqrt{a^۲-v^۲}}=arc\ sin\ \frac{v}{a}+C$

اثبات دستور (۲۱) - بجای v ، $a\,tg\,z$ که درآن z متغیرنوی‌است ، میگذاریم ، $dv = a\,sec^2 z\,dz$ میشود . این مقادیر را در تابع زیر علامت انتگرال قرار میدهیم :

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{a\,sec^2 z\,dz}{\sqrt{a^2 tg^2 z + a^2}} = \int \frac{sec^2 z\,dz}{\sqrt{tg^2 z + 1}}$$

$$= \int sec\,z\,dz = ln\,(sec\,z + tg\,z) + c \qquad \text{بنابر دستور (۱٦)}$$

$$= ln\,(tg\,z + \sqrt{tg^2 z + 1}) + c$$

اما $tg\,z = \frac{v}{a}$ است ، پس ،

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = ln\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 1}\right) + c$$

$$= ln\,\frac{v + \sqrt{v^2+a^2}}{a} + c$$

$$= ln\,(v + \sqrt{v^2+a^2}) - ln\,a + c$$

اگر $C = -ln\,a + c$ قرار دهیم ، داریم :

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = ln\left(v + \sqrt{v^2+a^2}\right) + C$$

به همین طریق اگر $v = a\,sec\,z$ ، $dv = a\,sec\,z\,tg\,z\,dz$ قرار دهیم ، داریم :

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = \int \frac{a\,sec\,z\,tg\,z\,dz}{\sqrt{a^2 sec^2 z - a^2}} = \int sec\,z\,dz$$

$$= ln\,(sec\,z + tg\,z) + c \qquad \text{بنابر دستور (۱٦)}$$

$$= ln\,(sec\,z + \sqrt{sec^2 z - 1}) + c$$

$$= ln\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\right) + c = ln\,(v + \sqrt{v^2-a^2}) + C$$

مثال - انتگرال زیر را بدست آورید :

$$\int \frac{dx}{۴x^۲+۹}=\frac{۱}{۶}\, arc\ tg\, \frac{۲x}{۳}+C$$

حل - این انتگرال همانند (۱۸) است زیرا اگر $v^۲=۴x^۲$ و $a^۲=۹$ قرار دهیم ، $v=۲x$ ، $dv=۲\,dx$ و $a=۳$ میشود . بنابراین اگر صورت کسررا در ۲ ضرب کنیم وجلوی علامت انتگرال $\frac{۱}{۲}$ بگذاریم ، داریم :

$$\int \frac{dx}{۴x^۲+۹}=\frac{۱}{۲}\int \frac{۲\,dx}{(۲x)^۲+(۳)^۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\int \frac{dv}{v^۲+a^۲}=\frac{۱}{۲a}\, arc\ tg\, \frac{v}{a}+C$$

$$=\frac{۱}{۶}\, arc\ tg\, \frac{۲x}{۳}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \frac{dx}{x^۲+۹}=\frac{۱}{۳}\, arc\ tg\, \frac{x}{۳}+C$

۲) $\int \frac{dx}{x^۲-۴}=\frac{۱}{۴}\, ln\left(\frac{x-۲}{x+۲}\right)+C$

۳) $\int \frac{dy}{\sqrt{۲۵-y^۲}}=arc\ sin\, \frac{y}{۵}+C$

۴) $\int \frac{ds}{\sqrt{s^۲-۱۶}}=ln\,(s+\sqrt{s^۲-۱۶})+C$

۵) $\int \frac{dx}{۹x^۲-۴}=\frac{۱}{۱۲}\, ln\left(\frac{۳x-۲}{۳x+۲}\right)+C$

۶) $\int \frac{dx}{\sqrt{۱۶-۹x^۲}} = \frac{۱}{۳} \ arc\ sin \frac{۳x}{۴} + C$

۷) $\int \frac{dx}{۹x^۲-۱} = \frac{۱}{۶} \ ln \left(\frac{۳x-۱}{۳x+۱}\right) + C$

۸) $\int \frac{dt}{۴-۹t^۲} = \frac{۱}{۱۲} \ ln \left(\frac{۲+۳t}{۲-۳t}\right) + C$

۹) $\int \frac{e^x\, dx}{۱+e^{۲x}} = arc\ tg\ e^x + C$

۱۰) $\int \frac{cos\,\theta\, d\theta}{۴-sin^۲\theta} = \frac{۱}{۴} \ ln \left(\frac{۲+sin\,\theta}{۲-sin\,\theta}\right) + C$

۱۱) $\int \frac{b\, dx}{a^۲x^۲-c^۲} = \frac{b}{۲ac} \ ln \left(\frac{ax-c}{ax+c}\right) + C$

۱۲) $\int \frac{۵x\, dx}{\sqrt{۱-x^۴}} = \frac{۵}{۲} \ arc\ sin\ x^۲ + C$

۱۳) $\int \frac{ax\, dx}{x^۴+b^۴} = \frac{a}{۲b^۲} \ arc\ tg \frac{x^۲}{b^۲} + C$

۱۴) $\int \frac{dt}{(t-۲)^۲+۹} = \frac{۱}{۳} \ arc\ tg \left(\frac{t-۲}{۳}\right) + C$

۱۵) $\int \frac{dy}{\sqrt{۱+a^۲y^۲}} = \frac{۱}{a} \ ln\ (ay + \sqrt{۱+a^۲y^۲}) + C$

۱۶) $\int \frac{du}{\sqrt{۴-(u+۳)^۲}} = arc\ sin \left(\frac{u+۳}{۲}\right) + C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{۹-۱۶x^۲}}$ ۱۸) $\int \frac{dy}{\sqrt{۹y^۲+۴}}$ ۱۹) $\int \frac{dt}{۴t^۲+۲۵}$

۲۰) $\int \frac{dx}{25x^2-4}$ ۲۱) $\int \frac{7\,dx}{3+7x^2}$ ۲۲) $\int \frac{3\,dy}{9y^2-16}$

۲۳) $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^2+5}}$ ۲۴) $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^4-4}}$ ۲۵) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+3}}$

۲۶) $\int \frac{2e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ۲۷) $\int \frac{6t\,dt}{8-3t^2}$ ۲۸) $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{4+\cos^2\theta}}$

۲۹) $\int \frac{dx}{m^2+(x+n)^2}$ ۳۰) $\int \frac{du}{4-(2u-1)^2}$ ۳۱) $\int \frac{7x^2dx}{5-x^6}$

دستورهای نمونهٔ (۱۸) تا (۲۱) شامل عبارتهای درجهٔ دومی هستند که فاقد جملهٔ درجهٔ اول‌اند (a^2-v^2 , $v^2 \pm a^2$) . اگر تابع زیر علامت انتگرال شامل یک سه جمله‌ای کامل درجهٔ‌دوم باشد ، باید با اضافه و کم کردن یک مقدار ثابت و یک تغییر متغیر، جملهٔ درجهٔ اول آن را ازبین برد .

مثال ۱ - درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\ arc\ tg\,\frac{x+1}{2}+C$$

حل - $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$

پس
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

اگر $v=x+1$ و $a=2$ قرار دهیم ، $dv=dx$ و این انتگرال همانند انتگرال نمونهٔ (۱۸) میشود ، بنابراین :

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\ arc\ tg\ \frac{v}{a}+C=\frac{1}{2}\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2}+C$$

مثال ۲- $$\int \frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=2arc\sin\frac{2x-1}{3}+C$$

حل - این انتگرال را باید به صورت (۲۰) درآورد زیرا ضریب $x^۲$ **منفی است.** مینویسیم :

$$۲+x-x^۲=۲-\left(x^۲-x+\frac{۱}{٤}\right)+\frac{۱}{٤}=\frac{۹}{٤}-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

اگر $v=x-\frac{۱}{۲}$ و $a=\frac{۳}{۲}$ قرار دهیم ، $dv=dx$ میشود و داریم :

$$\int\frac{۲\,dx}{\sqrt{۲+x-x^۲}}=۲\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{۹}{٤}-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲}}=۲\int\frac{dv}{\sqrt{a^۲-v^۲}}$$

بنابر (۲۰)
$$=۲\,arc\sin\frac{v}{a}+C=۲\,arc\sin\frac{۲x-۱}{۳}+C$$

مثال ۳-
$$\int\frac{dx}{۳x^۲+٤x-۷}=\frac{۱}{۱۰}\,ln\,\frac{۳x-۳}{۳x+۷}+C$$

حل -

$$۳x^۲+٤x-۷=۳\left(x^۲+\frac{٤}{۳}x-\frac{۷}{۳}\right)=۳\left(x^۲+\frac{٤}{۳}x+\frac{٤}{۹}-\frac{۲۵}{۹}\right)$$
$$=۳\left[\left(x+\frac{۲}{۳}\right)^۲-\frac{۲۵}{۹}\right]$$

$$\int\frac{dx}{۳x^۲+٤x-۷}=\int\frac{dx}{۳\left[\left(x+\frac{۲}{۳}\right)^۲-\frac{۲۵}{۹}\right]}=\frac{۱}{۳}\int\frac{dv}{v^۲-a^۲}$$

اگر $v=x+\frac{۲}{۳}$ و $a=\frac{۵}{۳}$ قراردهیم ، $dv=dx$ میشود وداریم :

$$\frac{۱}{۳}\int\frac{dv}{v^۲-a^۲}=\frac{۱}{٦a}\,ln\,\frac{v-a}{v+a}+C=\frac{۱}{۱۰}\,ln\,\frac{x+\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۳}}{x+\frac{۲}{۳}+\frac{۵}{۳}}+C$$
$$=\frac{۱}{۱۰}\,ln\,\frac{۳x-۳}{۳x+۷}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x+3}\right) + C$

۲) $\int \frac{dx}{2x-x^2-10} = -\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

۳) $\int \frac{3\,dx}{x^2-8x+25} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$

۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} = \operatorname{arc\,sin}(2x-3) + C$

۵) $\int \frac{dv}{v^2-6v+5} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{v-5}{v-1}\right) + C$

۶) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \operatorname{arc\,tg}(2x-1) + C$

۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{x-1}{4}\right) + C$

۸) $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+2}\right) + C$

۹) $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x}{x-4}\right) + C$

۱۰) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}(x-1) + C$

۱۱) $\int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}} = \ln\left(s+a+\sqrt{2as+s^2}\right) + C$

$$۱۲)\quad \int \frac{dy}{y^{۲}+۳y+۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\, ln \left(\frac{۲y+۳-\sqrt{۵}}{۲y+۳+\sqrt{۵}}\right)+C$$

$$۱۳)\quad \int \frac{dx}{۱+x+x^{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\, arc\ tg \left(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}\right)+C$$

$$۱٤)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{۱+x+x^{۲}}} = ln \left(x+\frac{۱}{۲}+\sqrt{۱+x+x^{۲}}\right)+C$$

$$۱۵)\quad \int \frac{dx}{٤x^{۲}+٤x+۵} = \frac{۱}{٤}\, arc\ tg \left(\frac{۲x+۱}{۲}\right)+C$$

$$۱٦)\quad \int \frac{dx}{۳x^{۲}-۲x+٤} = \frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\, arc\ tg \left(\frac{۳x-۱}{\sqrt{۱۱}}\right)+C$$

$$۱۷)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{۲-۳x-٤x^{۲}}} = \frac{۱}{۲}\, arc\ sin \left(\frac{۸x+۳}{\sqrt{٤۱}}\right)+C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی‌جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

$$۱۸)\quad \int \frac{dx}{x^{۲}+۲x+۱۰}$$

$$۱۹)\quad \int \frac{dx}{x^{۲}+۲x-۳}$$

$$۲۰)\quad \int \frac{dy}{۳-۲y-y^{۲}}$$

$$۲۱)\quad \int \frac{۳\, du}{\sqrt{۵-٤u-u^{۲}}}$$

$$۲۲)\quad \int \frac{۵\, dx}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}}$$

$$۲۳)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+٤x+۳}}$$

$$۲٤)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+۲x}}$$

$$۲۵)\quad \int \frac{dt}{\sqrt{۳t-۲t^{۲}}}$$

$$۲٦)\quad \int \frac{dx}{x^{۲}-٤x+۵}$$

$$۲۷)\quad \int \frac{dx}{۲+۲x-x^{۲}}$$

۲۸) $\int \frac{dr}{r^2-2r-3}$

۲۹) $\int \frac{4\,dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$

۳۰) $\int \frac{dz}{\sqrt{3+2z-z^2}}$

۳۱) $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-8v+15}}$

۳۲) $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-1}$

۳۳) $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t-2t^2}}$

۳٤) $\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$

۳۵) $\int \frac{dw}{2w^2+2w+1}$

۳٦) $\int \frac{x^2dx}{9x^6-3x^3-1}$

۳۷) $\int \frac{dt}{15+4t-t^2}$

۳۸) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+12x+8}}$

۳۹) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$

هرگاه تابع زیرعلامت انتگرال کسری باشد که صورت آن یک، دو جمله‌ای درجهٔ اول و مخرج آن یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم و یا ریشهٔ دوم یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم باشد ، میتوان آن انتگرال را به شکل یکی از انتگرالهای نمونه درآورد .

مثال ۱- درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9}-\frac{1}{2}\,ln\left(2x+\sqrt{4x^2+9}\right)+C$$

حل - مینویسیم :

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{4x^2+9}}-\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$$

دستورهای (٤) و (۲۱) را بکار میبندیم ، جواب بدست میاید .

مثال ۲-

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7}dx=\frac{1}{3}\,ln\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)-\frac{13}{30}\,ln\frac{3x-3}{3x+7}+C$$

حل -
$$۳x^۲+٤x-۷=۳\left[\left(x+\frac{۲}{۳}\right)^۲-\frac{۲۵}{۹}\right]$$

اگر تغییر متغیر $v=x+\frac{۲}{۳}$ بدهیم ، $x=v-\frac{۲}{۳}$ و $dx=dv$ میشود .

این مقادیر را در انتگرال میگذاریم ، داریم :

$$\int\frac{۲x-۳}{۳x^۲+٤x-۷}dx=\int\frac{۲\left(v-\frac{۲}{۳}\right)-۳}{۳\left(v^۲-\frac{۲۵}{۹}\right)}dv=\frac{۱}{۹}\int\frac{٦v-۱۳}{v^۲-\frac{۲۵}{۹}}dv$$

$$=\frac{۱}{۳}\int\frac{۲v\,dv}{v^۲-\frac{۲۵}{۹}}-\frac{۱۳}{۹}\int\frac{dv}{v^۲-\frac{۲۵}{۹}}$$

دستورهای (٥) و (۱۹) را بکار میبندیم و سپس بجای v ، $x+\frac{۲}{۳}$ میگذاریم ، جواب بدست میاید .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int\frac{(۱+۲x)dx}{۱+x^۲}=arc\,tg\,x+ln\,(۱+x^۲)+C$

۲) $\int\frac{(۲x+۱)dx}{\sqrt{x^۲-۱}}=۲\sqrt{x^۲-۱}+ln\,(x+\sqrt{x^۲-۱})+C$

۳) $\int\frac{(x-۱)dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=-\sqrt{۱-x^۲}-arc\,sin\,x+C$

٤) $\int\frac{(۳x-۱)dx}{x^۲+۹}=\frac{۳}{۲}\,ln\,(x^۲+۹)-\frac{۱}{۳}\,arc\,tg\,\frac{x}{۳}+C$

٥) $\int\frac{(۳s-۲)ds}{\sqrt{۹-s^۲}}=-۳\sqrt{۹-s^۲}-۲arc\,sin\,\frac{s}{۳}+C$

۶) $$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+۴}} = \sqrt{x^۲+۴} + ۳\ln\left(x+\sqrt{x^۲+۴}\right) + C$$

۷) $$\int \frac{(۲x-۵)dx}{۳x^۲-۲} = \frac{۱}{۳}\ln(۳y^۲-۲) - \frac{۵\sqrt{۶}}{۱۲}\ln\left(\frac{۳x-\sqrt{۶}}{۳x+\sqrt{۶}}\right) + C$$

۸) $$\int \frac{(۵t-۱)dt}{\sqrt{۳t^۲-۹}} = \frac{۵}{۳}\sqrt{۳t^۲-۹} - \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ln\left(t\sqrt{۳}+\sqrt{۳t^۲-۹}\right) + C$$

۹) $$\int \frac{(x+۳)dx}{۶x-x^۲} = -\frac{۱}{۲}\ln(۶x-x^۲) - \ln\left(\frac{x-۶}{x}\right) + C$$

۱۰) $$\int \frac{(۲x+۵)dx}{x^۲+۲x+۵} = \ln(x^۲+۲x+۵) + \frac{۳}{۲}\,\text{arc tg}\left(\frac{x+۱}{۲}\right) + C$$

۱۱) $$\int \frac{(۱-x)dx}{۴x^۲-۴x-۳} = -\frac{۱}{۸}\ln(۴x^۲-۴x-۳) + \frac{۱}{۱۶}\ln\left(\frac{۲x-۳}{۲x+۱}\right) + C$$

۱۲) $$\int \frac{(۳x-۲)dx}{۱-۶x-۹x^۲} = -\frac{۱}{۶}\ln(۱-۶x-۹x^۲)$$

$$+\frac{\sqrt{۲}}{۴}\ln\left(\frac{۳x+۱-\sqrt{۲}}{۳x+۱+\sqrt{۲}}\right) + C$$

۱۳) $$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+۲x}} = \sqrt{x^۲+۲x} + ۲\ln\left(x+۱+\sqrt{x^۲+۲x}\right) + C$$

۱۴) $$\int \frac{(x+۲)dx}{\sqrt{۴x-x^۲}} = -\sqrt{۴x-x^۲} + ۴\,\text{arc sin}\left(\frac{x-۲}{۲}\right) + C$$

۱۵) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۲۷+۶x-x^۲}} = -\sqrt{۲۷+۶x-x^۲} + ۳\,\text{arc sin}\left(\frac{x-۳}{۶}\right) + C$$

۱۶) $$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19-5x+x^2} + \frac{19}{2} \ln\left(x-\frac{5}{2}+\sqrt{19-5x+x^2}\right)+C$$

۱۷) $$\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} - \frac{1}{4} \ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right)+C$$

۱۸) $$\int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{2x-3}{2}\right)+C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۹) $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2+1}$

۲۰) $\int \frac{(3x-4)dx}{x^2-1}$

۲۱) $\int \frac{(3-x)dx}{4-3x^2}$

۲۲) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

۲۳) $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{3+5x^2}}$

۲۴) $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2+4x}$

۲۵) $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

۲۶) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5}$

۲۷) $\int \frac{(3-4x)dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

۲۸) $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

۲۹) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

۳۰) $\int \frac{(8-3x)dx}{x^2+x+1}$

۳۱) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ۳۲) $\int \frac{(2x+7)dx}{2x^2+2x+1}$

۳۳) $\int \frac{(3x+8)dx}{9x^2-3x-1}$ ۳٤) $\int \frac{(6-x)dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$

۱۳۳- اثبات دستورهای (۲۲) و (۲۳) - برای اثبات دستور (۲۲) تغییر متغیر

$$v=a\,\sin z$$

میدهیم ، بدین ترتیب :

$$dv=a\,\cos z\,dz$$

و

$$\sqrt{a^2-v^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}=a\,\cos z$$

بنابراین

$$\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv=a^2\int\cos^2 z\,dz=\frac{a^2}{2}\int(\cos 2z+1)dz$$

$$=\frac{a^2}{4}\sin 2z+\frac{a^2}{2}z+C$$

از طرفی داریم :

$$\cos z=\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{a} \quad \text{و} \quad \sin z=\frac{v}{a}$$

$$z=arc\,\sin\frac{v}{a} \quad \text{و} \quad \sin 2z=2\sin z\,\cos z=2\,\frac{v}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{a}$$

اگر این مقادیر را در نتیجهٔ اخیر بگذاریم ، دستور (۲۲) بدست میاید .

اثبات دستور (۲۳) - برای اثبات دستور(۲۳) تغییر متغیر $v=a\,tg\,z$ میدهیم (شمارهٔ ۱۳۲ را ببینید) ، داریم :

$$(1)\qquad \int\sqrt{v^2+a^2}\,dv=\int a\,\sec z\cdot a\,\sec^2 z\,dz=a^2\int\sec^3 z\,dz$$

بعداً خواهیم دید که :

$$(2)\qquad \int\sec^3 z\,dz=\frac{1}{2}\sec z\,tg\,z+\frac{1}{2}\ln(\sec z+tg\,z)+C$$

از طرفی داریم : $tg\, z = \frac{v}{a}$ و $sec\, z = \frac{\sqrt{v^۲+a^۲}}{a}$

با استفاده ازاین مقادیر و دستورهای (۱) و (۲) داریم :

$$(۳) \qquad \int \sqrt{v^۲+a^۲}\, dv = \frac{v}{۲}\sqrt{v^۲+a^۲} + \frac{a^۲}{۲}\, ln\,(v+\sqrt{v^۲+a^۲}\,) + C'$$

$C' = C - \frac{a^۲}{۲}\, ln\, a$ است . بدین‌ترتیب دستور (۲۳) برای حالتی که علامت جلوی $a^۲$ ، + است ، محقق است .

اکنون تغییر متغیر $v = a\, sec\, z$ میدهیم (شمارهٔ ۱۳۲ را ببینید) ، داریم :

$$(٤) \qquad \int \sqrt{v^۲-a^۲}\, dv = \int a\, tg\, z \cdot a\, sec\, z\, tg\, z\, dz$$

$$= a^۲ \int tg^۲ z\, sec\, z\, dz$$

$$= a^۲ \int sec^۳ z\, dz - a^۲ \int sec\, z\, dz$$

ازمقایسهٔ (٤) با (۲) تساوی زیر بدست میاید :

$$(٥) \qquad \int \sqrt{v^۲-a^۲}\, dv = \frac{a^۲}{۲}\, sec\, z\, tg\, z - \frac{a^۲}{۲}\, ln\,(sec\, z + tg\, z) + C$$

اما $sec\, z = \frac{v}{a}$ وازآنجا $tg\, z = \frac{\sqrt{v^۲-a^۲}}{a}$ است. این مقادیررادر(٥) میگذاریم ، دستور (۲۳) برای حالتی که علامت جلوی $a^۲$ ، — است ، بدست میاید .

مثال ۱- درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$\int \sqrt{٤-۹x^۲}\, dx = \frac{x}{۲}\sqrt{٤-۹x^۲} + \frac{۲}{۳}\, arc\, sin\, \frac{۳x}{۲} + C$$

حل - $a^۲ = ٤$ و $v = ۳x$ قرارمیدهیم ، $dv = ۳\, dx$ میشود و انتگرال داده شده به صورت زیر درمیاید :

$$\int\sqrt{4-9x^2}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{4-9x^2}\times 3\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv$$

دستور (۲۲) را بکار میبندیم و سرانجام $v=3x$ و $a^2=4$ قرار میدهیم ، جواب بدست میاید .

مثال ۲-
$$\int\sqrt{3x^2+4x-7}\,dx=\frac{1}{6}(3x+2)\sqrt{3x^2+4x-7}$$
$$-\frac{25\sqrt{3}}{18}\,ln\,(3x+2+\sqrt{9x^2+12x-21})+C$$

حل - مینویسیم :

$$3x^2+4x-7=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]=3(v^2-a^2)$$

در اینجا $v=x+\frac{2}{3}$ ، $a=\frac{5}{3}$ و $dv=dx$ است ، پس :

$$\int\sqrt{3x^2+4x-7}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{v^2-a^2}\,dv$$

دستور (۲۳) را بکار میبندیم و سرانجام بجای a و v مقادیرشان را میگذاریم ، جواب بدست میاید .

تمرین

درستی انتگرالهای زیر را بیازمایید :

۱) $\int\sqrt{1-4x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\,arc\,sin\,2x+C$

۲) $\int\sqrt{1+9x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{1+9x^2}+\frac{1}{6}\,ln\,(3x+\sqrt{1+9x^2})+C$

۳) $\int\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{x^2-4}-ln\,(x+\sqrt{x^2-4})+C$

۴) $\int\sqrt{۲۵-۹x^{۲}}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{۲۵-۹x^{۲}}+\frac{۲۵}{۶}\,arc\,sin\,\frac{۳x}{۵}+C$

۵) $\int\sqrt{۴x^{۲}+۹}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{۴x^{۲}+۹}+\frac{۹}{۴}\,ln\,(۲x+\sqrt{۴x^{۲}+۹})+C$

۶) $\int\sqrt{۵-۳x^{۲}}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{۵-۳x^{۲}}+\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\,arc\,sin\,x\sqrt{\frac{۳}{۵}}+C$

۷) $\int\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}\,dx=\frac{x+۱}{۲}\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}+۲arc\,sin\,\frac{x+۱}{۲}+C$

۸) $\int\sqrt{۵-۲x+x^{۲}}\,dx=\frac{x-۱}{۲}\sqrt{۵-۲x+x^{۲}}$

$+۲ln\,(x-۱+\sqrt{۵-۲x+x^{۲}})+C$

۹) $\int\sqrt{۲x-x^{۲}}\,dx=\frac{x-۱}{۲}\sqrt{۲x-x^{۲}}+\frac{۱}{۲}\,arc\,sin\,(x-۱)+C$

۱۰) $\int\sqrt{۱۰-۴x+۴x^{۲}}\,dx=\frac{۲x-۱}{۴}\sqrt{۱۰-۴x+۴x^{۲}}$

$+\frac{۹}{۴}\,ln\,(۲x-۱+\sqrt{۱۰-۴x+۴x^{۲}})+C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید ودرستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۱) $\int\sqrt{۱۶-۹x^{۲}}\,dx$

۱۲) $\int\sqrt{۴+۲۵x^{۲}}\,dx$

۱۳) $\int\sqrt{۹x^{۲}-۱}\,dx$

۱۴) $\int\sqrt{۸-۳x^{۲}}\,dx$

۱۵) $\int\sqrt{۵+۲x^{۲}}\,dx$

۱۶) $\int\sqrt{۵-۴x-x^{۲}}\,dx$

۱۷) $\int\sqrt{۵+۲x+x^{۲}}\,dx$

۱۸) $\int\sqrt{x^{۲}-۸x+۷}\,dx$

۱۹) $\int\sqrt{۴-۲x-x^{۲}}\,dx$

۲۰) $\int\sqrt{x^{۲}-۲x+۸}\,dx$

۱۳٤- **انتگرال توابع مثلثاتی** . ـ اکنون چند انتگرال مثلثاتی را که با تغییر شکل ساده‌ای به صورت یکی از انتگرالهای نمونه در میایند ، محاسبه میکنیم .

مثال I ـ انتگرال $\int sin^m u\, cos^n u\, du$ را پیدا کنید .

اگر تنها یکی از اعداد m و n صحیح و مثبت وفرد باشد ، میتوان این انتگرال را به صورت (٤) یعنی به شکل
$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$
درآورد . مثلاً اگر m فرد باشد ، مینویسیم :

$$sin^m u = sin^{m-1} u\, sin\, u$$

چون m فرد است ، $m-1$ زوج است و از آنجا $sin^{m-1}u$ قوه‌ای از $sin^2 u$ است و میتوان آن را با استفاده از رابطهٔ $sin^2 u = 1 - cos^2 u$ به صورت مجموع قوای مختلفی از $cos^2 u$ درآورد . بنابراین انتگرال مذکور به صورت زیر درمیاید :

$$\int (\text{مجموع جملاتی شامل } cos\, u)\, sin\, u\, du \qquad (1)$$

چون $sin\, u\, du = -d(cos\, u)$ است ، اگر بجای $cos\, u$ ، v بگذاریم ، هرجملهٔ زیر علامت انتگرال به صورت $v^n\, dv$ درمیاید .

به همین ترتیب اگر n فرد باشد ، مینویسیم :

$$cos^n u = cos^{n-1} u\, cos\, u$$

وازرابطهٔ $cos^2 u = 1 - sin^2 u$ استفاده میکنیم ، انتگرال مذکوربه صورت زیر در میاید :

$$\int (\text{مجموع جملاتی شامل } sin\, u)\, cos\, u\, du \qquad (2)$$

مثال ۱- انتگرال $\int sin^2 x\, cos^5 x\, dx$ را پیدا کنید .

حل -
$$\int sin^2 x\, cos^5 x\, dx = \int sin^2 x\, cos^4 x\, cos\, x\, dx$$
$$= \int sin^2 x (1 - sin^2 x)^2 cos\, x\, dx$$

$$=\int (sin^{۲}x-۲sin^{۴}x+sin^{۶}x)cos\ x\, dx$$

$$=\int (sin\ x)^{۲}cos\ x\ dx-۲\int (sin\ x)^{۴}cos\ x\ dx$$
$$+\int (sin\ x)^{۶}cos\ x\, dx$$

$$=\frac{sin^{۳}x}{۳}-\frac{۲sin^{۵}x}{۵}+\frac{sin^{۷}x}{۷}+C$$

دراین مثال $v=sin\,x$ ، $dv=cos\,x\,dx$ و n بترتیب برابر ۲ و ٤ و ٦ است .

مثال ۲ - درستی انتگرال زیر را نشان دهید :

$$\int sin^{۳}\frac{x}{۲}\,dx=\frac{۲}{۳}cos^{۳}\frac{x}{۲}-۲cos\frac{x}{۲}+C$$

حل - اگر $\frac{x}{۲}=u$ یعنی $x=۲u$ و $dx=۲\,du$ قرار دهیم ، داریم :

$$\int sin^{۳}\frac{x}{۲}\,dx=۲\int sin^{۳}u\,du \qquad (۳)$$

و میتوانیم بنویسیم :

$$\int sin^{۳}u\,du=\int sin^{۲}u\ sin\ u\,du$$

$$=\int (۱-cos^{۲}u)sin\ u\,du$$

$$=\int sin\ u\,du-\int cos^{۲}u\ sin\ u\,du$$

$$=-cos\,u+\frac{۱}{۳}cos^{۳}u+C'$$

اگر نتیجهٔ اخیر را در ۲ ضرب کنیم و بجای u ، $\frac{x}{۲}$ بگذاریم ، جواب بدست میاید .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$

۲) $\int \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3} \sin^3\theta + C$

۳) $\int \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3\theta + C$

۴) $\int \sin^3 6x \cos 6x\, dx = \frac{1}{24} \sin^4 6x + C$

۵) $\int \cos^3 2\theta \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8} \cos^4 2\theta + C$

۶) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx = \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C$

۷) $\int \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \sec\theta + \cos\theta + C$

۸) $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$

۹) $\int \sin^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$

۱۰) $\int \cos^5 x\, dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

۱۱) $\int \frac{\sin^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5} \cos^2 y + \frac{1}{9} \cos^4 y\right) + C$

$$۱۲)\quad \int \frac{\cos^{۵} t}{\sqrt[۳]{\sin t}}\, dt = \frac{۳}{۲} \sin^{\frac{۲}{۳}} t \left(۱ - \frac{۱}{۲} \sin^{۲} t + \frac{۱}{۷} \sin^{۴} t \right) + C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را بامحاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

$$۱۳)\quad \int \sin^{۳} ۲\theta\, d\theta \qquad\qquad ۱۴)\quad \int \cos^{۳} \frac{\theta}{۲}\, d\theta$$

$$۱۵)\quad \int \sin ۲x \cos ۲x\, dx \qquad\qquad ۱۶)\quad \int \sin^{۳} t \cos^{۳} t\, dt$$

$$۱۷)\quad \int \cos^{۳} \frac{\theta}{۲} \sin^{۲} \frac{\theta}{۲}\, d\theta \qquad\qquad ۱۸)\quad \int \sin^{۳} mt \cos^{۲} mt\, dt$$

$$۱۹)\quad \int \sin^{۵} nx\, dx \qquad\qquad ۲۰)\quad \int \cos^{۳}(a+bt)\,dt$$

$$۲۱)\quad \int \frac{\operatorname{cotg} \theta}{\sqrt{\sin \theta}}\, d\theta \qquad\qquad ۲۲)\quad \int \frac{\sin^{۳} ۲x}{\sqrt[۳]{\cos ۲x}}\, dx$$

مثال II – انتگرال $\int tg^{n} u\, du$ یا $\int \operatorname{cotg}^{n} u\, du$ **را پیدا کنید .**

اگر n عدد صحیح باشد ، این دو انتگرال را میتوان بآسانی پیدا کرد . بدین منظور باید تقریباً همان روش مثالهای قبل را بکار بست ونخست از تساویهای زیر استفاده نمود :

$$tg^{n} u = tg^{n-۲} u\; tg^{۲} u = tg^{n-۲} u (\sec^{۲} u - ۱)$$

یا

$$\operatorname{cotg}^{n} u = \operatorname{cotg}^{n-۲} u\; \operatorname{cotg}^{۲} u = \operatorname{cotg}^{n-۲} u (\operatorname{cosec}^{۲} u - ۱)$$

مثالهای زیر شکل محاسبه را نشان میدهند .

مثال ۱ - انتگرال $\int tg^{۴} x\, dx$ را پیدا کنید .

حل -

$$\int tg^{۴} x\, dx = \int tg^{۲} x (\sec^{۲} x - ۱)\, dx$$

$$=\int tg^{۲}x\,sec^{۲}x\,dx-\int tg^{۲}x\,dx$$

$$=\int (tg\,x)^{۲}d(tg\,x)-\int (sec^{۲}x-۱)dx$$

$$=\frac{۱}{۳}tg^{۳}x-tg\,x+x+C$$

مثال ۲- نشان دهید که :

$$\int cotg^{۳}۲x\,dx=-\frac{۱}{٤}cotg^{۲}۲x-\frac{۱}{۲}ln\,sin\,۲x+C$$

حل - تغییر متغیر $۲x=u$ میدهیم ، $x=\frac{u}{۲}$ و $dx=\frac{du}{۲}$ میشود .

بدین ترتیب :

$$\int cotg^{۳}۲x\,dx=\frac{۱}{۲}\int cotg^{۳}u\,du \qquad (٤)$$

اکنون

$$\int cotg^{۳}u\,du=\int cotg\,u\,cotg^{۲}u\,du$$

$$=\int cotg\,u(cosec^{۲}u-۱)du$$

$$=\int cotg\,u\,cosec^{۲}u\,du-\int cotg\,u\,du$$

$$=-\frac{۱}{۲}cotg^{۲}u-ln\,sin\,u+۲C$$

اگر این نتیجه را در طرف راست (٤) بگذاریم و بجای u ، ۲x قرار دهیم ، جواب بدست میاید .

مثال III - انتگرال $\int sec^{n}u\,du$ **یا** $\int cosec^{n}u\,du$ **را پیدا کنید .**

اگر n عددی صحیح و زوج و مثبت باشد ، این دو انتگرال را میتوان بآسانی پیدا کرد .

بدین منظور نخست مینویسیم :

$$sec^{n}u=sec^{n-۲}u\,sec^{۲}u=(tg^{۲}u+۱)^{\frac{n-۲}{۲}}sec^{۲}u$$

یا
$$cosec^{n} u = cosec^{n-۲}u \; cosec^{۲}u = (cotg^{۲}u + ۱)^{\frac{n-۲}{۲}} cosec^{۲}u$$

مثالهای زیر شکل محاسبه را نشان میدهند .

مثال ۳- نشان دهید که :

$$\int sec^{٤}\frac{x}{۲}\,dx = \frac{۲}{۳}\,tg^{۳}\frac{x}{۲} + ۲tg\,\frac{x}{۲} + C$$

حل - تغییر متغیر $u = \frac{x}{۲}$ میدهیم ، $x = ۲u$ و $dx = ۲\,du$ میشود .

بدین ترتیب :
$$\int sec^{٤}\frac{x}{۲}\,dx = ۲\int sec^{٤}u\,du \qquad (۵)$$

اکنون
$$\int sec^{٤}u\,du = \int sec^{۲}u\,sec^{۲}u\,du$$
$$= \int (tg^{۲}u + ۱)sec^{۲}u\,du$$
$$= \int tg^{۲}u\,sec^{۲}u\,du + \int sec^{۲}u\,du$$
$$= \frac{۱}{۳}\,tg^{۳}u + tg\,u + \frac{۱}{۲}\,C$$

اگر این نتیجه را در طرف راست (۵) قرار دهیم و $u = \frac{x}{۲}$ بگذاریم،جواب بدست میاید .

تمرین - در طرف راست (۵) ، $sec^{۲}u = ۱ + tg^{۲}u$ قرار دهید و مانند مثال ۱ مذکور در بالا عمل کنید .

مثال IV - انتگرال $\int tg^{m}u\,sec^{n}u\,du$ **یا** $\int cotg^{m}u\,cosec^{n}u\,du$ **را پیدا کنید .**

وقتی n عددی صحیح و مثبت و زوج است ، مانند **مثال** III عمل میکنیم .

مثال ٤- انتگرال $\int tg^{6}x\, sec^{4}x\, dx$ را پیدا کنید .

حل -

$$\int tg^{6}x\, sec^{4}x\, dx=\int tg^{6}x(tg^{2}x+1)sec^{2}x\, dx$$

$$=\int (tg\, x)^{8}\, sec^{2}x\, dx+\int tg^{6}x\, sec^{2}x\, dx$$

$$=\frac{1}{9}\, tg^{9}x+\frac{1}{7}\, tg^{7}x+C$$

دراین مثال $v=tg\, x$ ، $dv=sec^{2}x\, dx$ و ... است .

وقتی m فرد است ، مانند مثال زیر عمل میکنیم .

مثال ۵- انتگرال $\int tg^{5}x\, sec^{3}x\, dx$ را پیدا کنید .

حل -

$$\int tg^{5}x\, sec^{3}x\, dx=\int tg^{4}x\, sec^{2}x\, sec\, x\, tg\, x\, dx$$

$$=\int (sec^{2}x-1)^{2}sec^{2}x\, sec\, x\, tg\, x\, dx$$

$$=\int (sec^{6}x-2sec^{4}x+sec^{2}x)sec\, x\, tg\, x\, dx$$

$$=\frac{1}{7}\, sec^{7}x-\frac{2}{5}\, sec^{5}x+\frac{1}{3}\, sec^{3}x+C$$

دراین مثال $v=sec\, x$ ، $dv=sec\, x\, tg\, x\, dx$ و ... است .

موارد استعمال روشهای مذکور در مثالهای بالا محدود است و مثلاً بکار بردن آنها در مثال زیر بی‌نتیجه است .

$$\int sec^{3}u\, du=\int sec\, u\, sec^{2}u\, du$$

$$=\int sec\, u\, tg^{2}u\, du+ln\,(sec\, u+tg\, u)$$

این انتگرال را نمیتوان با انتگرالهای نمونهٔ مقدماتی مقایسه و محاسبه کرد . بعداً روشهای دیگری خواهیم آموخت که دامنهٔ کار برد آنها وسیعتر است .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int tg^{3} x\, dx = \frac{1}{2} tg^{2} x + \ln \cos x + C$

۲) $\int cotg^{3} \frac{x}{3}\, dx = -\frac{3}{2} cotg^{2} \frac{x}{3} - 3 \ln \sin \frac{x}{3} + C$

۳) $\int cotg^{3} 2x\, cosec\, 2x\, dx = \frac{1}{2} cosec\, 2x - \frac{1}{6} cosec^{3} 2x + C$

۴) $\int cosec^{4} \frac{x}{4}\, dx = -\frac{4}{3} cotg^{3} \frac{x}{4} - 4 cotg \frac{x}{4} + C$

۵) $\int tg^{5} 3\theta\, d\theta = \frac{1}{12} tg^{4} 3\theta - \frac{1}{6} tg^{2} 3\theta + \frac{1}{3} \ln \sec 3\theta + C$

۶) $\int \frac{\sin^{2} \varphi\, d\varphi}{\cos^{4} \varphi} = \frac{1}{3} tg^{3} \varphi + C$

۷) $\int \frac{dx}{\sin^{2} 2x \cos^{4} 2x} = tg\, 2x + \frac{1}{6} tg^{3} 2x - \frac{1}{2} cotg\, 2x + C$

۸) $\int \frac{\cos^{4} x\, dx}{\sin^{6} x} = -\frac{1}{5} cotg^{5} x + C$

۹) $\int \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\cos^{\frac{11}{2}} x} = \frac{2}{5} tg^{\frac{5}{2}} x + \frac{2}{9} tg^{\frac{9}{2}} x + C$

۱۰) $\int tg^{3} \alpha \sec^{\frac{5}{2}} \alpha\, d\alpha = \frac{2}{9} \sec^{\frac{9}{2}} \alpha - \frac{2}{5} \sec^{\frac{5}{2}} \alpha + C$

۱۱) $\int \left(\frac{sec\ ax}{tg\ ax}\right)^{۴} dx = -\frac{۱}{a}\left(cotg\ ax + \frac{۱}{۳}\ cotg^{۳} ax\right) + C$

۱۲) $\int (cotg^{۲}\,۲\theta + cotg^{۴}\,۲\theta)\,d\theta = -\frac{۱}{۶}\ cotg^{۳}\,۲\theta + C$

۱۳) $\int (tg\ bt - cotg\ bt)^{۳} dt = \frac{۱}{۲b}\left[tg^{۲} bt + cotg^{۲} bt\right] + \frac{۴}{b}\ ln\ sin\ ۲bt + C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۴) $\int cotg^{۵} ax\ dx$

۱۵) $\int sec^{۶}\theta\ d\theta$

۱۶) $\int cosec^{۶}\frac{x}{۲}\ dx$

۱۷) $\int \frac{sec^{۴} t\ dt}{tg^{۳} t}$

۱۸) $\int \frac{sec^{۴} x\ dx}{\sqrt{tg\ x}}$

۱۹) $\int \left(\frac{cosec\ ax}{cotg\ ax}\right)^{۴} dx$

۲۰) $\int tg^{۳}\frac{x}{۳}\, sec^{۳}\frac{x}{۳}\ dx$

۲۱) $\int \frac{dx}{sin^{۴}۳x\ cos^{۲}۳x}$

۲۲) $\int \left(\frac{cosec\ bx}{tg\ bx}\right)^{۲} dx$

۲۳) $\int \left(\frac{tg\ \varphi}{cotg\ \varphi}\right)^{۳} d\varphi$

۲۴) $\int \left(\frac{tg\ at}{cos\ at}\right)^{۴} dt$

۲۵) $\int \frac{tg^{۳} x\ dx}{\sqrt{sec\ x}}$

۲۶) $\int tg^{n} x\ sec^{۴} x\ dx$

۲۷) $\int \frac{tg^{۵}\,۲\theta\ d\theta}{sec^{۳}\,۲\theta}$

مثال V- انتگرال $\int sin^{m} u\ cos^{n} u\ du$ **را برحسب خطوط مثلثاتی pu بدست آورید .**

وقتی m یا n عددی صحیح و مثبت و فرد است ، کوتاهترین راه همان است که در مثال I صفحهٔ ۳۴۹ ذکر شده است .

وقتی m و n هردو صحیح ومثبت و زوج اند ، میتوان نخست تابع زیر علامت انتگرال را به عبارتی شامل خطوط مثلثاتی pu تبدیل نمود وسپس انتگرال آن را پیدا کرد . برای این منظور از دستورهای زیر استفاده میکنیم :

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$$

مثال ۱- انتگرال $\int \cos^2 u \, du$ را پیدا کنید .

حل -
$$\int \cos^2 u \, du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$$

مثال ۲- انتگرال $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ را پیدا کنید .

حل -
$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

مثال ۳- انتگرال $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ را پیدا کنید .

حل -
$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \, dx$$

$$=\int \frac{1}{4} \sin^2 2x \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cos 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cos 4x\right)dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$$

مثال VI - انتگرال $\int \sin mx \cos nx \, dx$ ، $\int \sin mx \sin nx \, dx$ **یا** $\int \cos mx \cos nx \, dx$ **را ، وقتی** $m \neq n$ **است ، پیدا کنید .**

بنابر روابط (٦) شمارهٔ ٢

$$\sin mx \cos nx=\frac{1}{2} \sin(m+n)x+\frac{1}{2} \sin(m-n)x$$

پس

$$\int \sin mx \cos nx \, dx=\frac{1}{2}\int \sin(m+n)x \, dx+\frac{1}{2}\int \sin(m-n)x \, dx$$

$$=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

به همین طریق داریم :

$$\int \sin mx \sin nx \, dx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int sin^{۲}x\,dx = \frac{x}{۲} - \frac{sin\,۲x}{۴} + C$

۲) $\int sin^{۴}x\,dx = \frac{۳x}{۸} - \frac{sin\,۲x}{۴} + \frac{sin\,۴x}{۳۲} + C$

۳) $\int cos^{۴}x\,dx = \frac{۳x}{۸} + \frac{sin\,۲x}{۴} + \frac{sin\,۴x}{۳۲} + C$

۴) $\int sin^{۶}x\,dx = \frac{۵x}{۱۶} - \frac{sin\,۲x}{۴} + \frac{sin^{۳}۲x}{۴۸} + \frac{۳sin\,۴x}{۶۴} + C$

۵) $\int cos^{۶}x\,dx = \frac{۵x}{۱۶} + \frac{sin\,۲x}{۴} - \frac{sin^{۳}۲x}{۴۸} + \frac{۳sin\,۴x}{۶۴} + C$

۶) $\int sin^{۲}ax\,dx = \frac{x}{۲} - \frac{sin\,۲ax}{۴a} + C$

۷) $\int sin^{۲}\frac{x}{۲}\,cos^{۲}\frac{x}{۲}\,dx = \frac{x}{۸} - \frac{sin\,۲x}{۱۶} + C$

۸) $\int sin^{۴}ax\,dx = \frac{۳x}{۸} - \frac{sin\,۲ax}{۴a} + \frac{sin\,۴ax}{۳۲a} + C$

۹) $\int sin^{۲}۲x\,cos^{۴}۲x\,dx = \frac{x}{۱۶} + \frac{sin^{۳}۴x}{۹۶} - \frac{sin\,۸x}{۱۲۸} + C$

۱۰) $\int (۲ - sin\,\theta)^{۲}d\theta = \frac{۹\theta}{۲} + ۴cos\,\theta - \frac{sin\,۲\theta}{۴} + C$

۱۱) $\int (sin^{۲}\theta + cos\,\theta)^{۲}d\theta = \frac{۷\theta}{۸} + \frac{۲sin^{۳}\theta}{۳} + \frac{sin\,۴\theta}{۳۲} + C$

۱۲) $\int \sin 2x \cos 4x \, dx = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C$

۱۳) $\int \sin 3x \sin 2x \, dx = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 5x}{10} + C$

۱۴) $\int \cos 4x \cos 3x \, dx = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 7x}{14} + C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید ودرستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۵) $\int \cos^3 ax \, dx$

۱۶) $\int \cos^4 ax \, dx$

۱۷) $\int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx$

۱۸) $\int \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta$

۱۹) $\int \sin^4 2\alpha \cos^4 2\alpha \, d\alpha$

۲۰) $\int \sin^2 x \cos^6 x \, dx$

۲۱) $\int (1 + \cos x)^3 dx$

۲۲) $\int (\sqrt{\sin 2\theta} - \cos 2\theta)^2 d\theta$

۲۳) $\int (\sqrt{\cos \theta} - 2\sin \theta)^2 d\theta$

۲۴) $\int (\sin 2x - \sin 3x)^2 dx$

۲۵) $\int (\sin x + \cos 2x)^2 dx$

۲۶) $\int (\cos x + 2\cos 2x)^2 dx$

۱۳۵- محاسبهٔ انتگرالهایی که شامل $\sqrt{a^2 - u^2}$ یا $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ هستند.

درپیدا کردن این انتگرالها معمولاً کوتاهترین راه آن است که تغییر متغیری به صورت زیر بدهیم :

وقتی انتگرال شامل $\sqrt{a^2 - u^2}$ است ، تغییر متغیر $u = a \sin z$ ،

وقتی انتگرال شامل $\sqrt{a^2 + u^2}$ است ، تغییر متغیر $u = a \, tg \, z$ ،

وقتی انتگرال شامل $\sqrt{u^2 - a^2}$ است ، تغییر متغیر $u = a \sec z$.

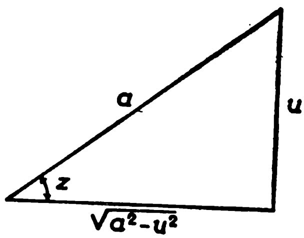
این تغییر متغیرها که سبب حذف رادیکال میشوند و در شماره‌های ۱۳۲ و ۱۳۳ نیز بکار رفته‌اند ، عبارتند از :

$$\sqrt{a^۲-a^۲\sin^۲z}=a\sqrt{۱-\sin^۲z}=a\cos z \qquad (۱)$$

$$\sqrt{a^۲+a^۲tg^۲z}=a\sqrt{۱+tg^۲z}=a\sec z \qquad (۲)$$

$$\sqrt{a^۲\sec^۲z-a^۲}=a\sqrt{\sec^۲z-۱}=a\,tg\,z \qquad (۳)$$

مثال ۱ - انتگرال $\int\frac{du}{(a^۲-u^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ را پیدا کنید .



شکل ۹۹

حل - تغییرمتغیر $u=a\sin z$ میدهیم ، $du=a\cos z\,dz$ میشود وبااستفاده ازرابطهٔ (۱) داریم:

$$\int\frac{du}{(a^۲-u^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\int\frac{a\cos z\,dz}{a^۳\cos^۳z}=\frac{۱}{a^۲}\int\frac{dz}{\cos^۲z}=\frac{۱}{a^۲}\int\sec^۲z\,dz$$

$$=\frac{tg\,z}{a^۲}+C=\frac{u}{a^۲\sqrt{a^۲-u^۲}}+C$$

چون $\sin z=\frac{u}{a}$ است ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم میکنیم که درآن طول وتر برابر a ، یک زاویهٔ حاده برابر z وضلع روبرو به زاویهٔ z برابر u باشد (شکل ۹۹) ، بدین‌ترتیب $tg\,z=\frac{u}{\sqrt{a^۲-u^۲}}$ است .

مثال ۲ - نشان دهید که :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{٤x^۲+۹}}=\frac{۱}{۳}\ln\frac{\sqrt{٤x^۲+۹}-۳}{۲x}+C$$

حل - دراینجا $\sqrt{u^2+a^2}=\sqrt{4x^2+9}$ یعنی $u=2x$ و $a=3$ است ، پس $x=\frac{u}{2}$ و $dx=\frac{du}{2}$ میشود . این مقادیر را در تابع زیر علامت انتگرال میگذاریم :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int\frac{\frac{du}{2}}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} \qquad (4)$$

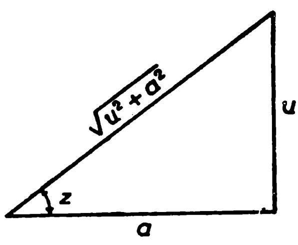
اکنون تغییر متغیر $u=a\,tg\,z$ میدهیم $(du=a\,sec^2z\,dz)$ وازرابطهٔ (۲) استفاده میکنیم:

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}=\int\frac{a\,sec^2z\,dz}{a\,tg\,z\cdot a\,sec\,z}=\frac{1}{a}\int\frac{sec\,z\,dz}{tg\,z}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{sin\,z}$$

$$=\frac{1}{a}\int cosec\,z\,dz=\frac{1}{a}\,ln\,(cosec\,z-cotg\,z)+C$$

چون $tg\,z=\frac{u}{a}$ است ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای مانند شکل ۱۰۰ رسم میکنیم ، داریم :

$$cosec\,z=\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} \quad \text{و} \quad cotg\,z=\frac{a}{u}$$



شکل ۱۰۰

پس

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{1}{a}\,ln\,\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}+C$$

این نتیجه را در رابطهٔ (٤) میگذاریم و بجای u ، $2x$ و بجای a ، ۳ قرار میدهیم ، جواب بدست میاید .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \frac{dx}{(x^۲+۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{x}{۲\sqrt{x^۲+۲}} + C$

۲) $\int \frac{x^۲ dx}{\sqrt{x^۲-٦}} = \frac{x}{۲}\sqrt{x^۲-٦} + ۳ln\,(x+\sqrt{x^۲-٦}) + C$

۳) $\int \frac{dx}{(٥-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{x}{٥\sqrt{٥-x^۲}} + C$

٤) $\int \frac{t^۲ dt}{\sqrt{٤-t^۲}} = -\frac{t}{۲}\sqrt{٤-t^۲} + ۲\,arc\,sin\,\frac{t}{۲} + C$

٥) $\int \frac{x^۲ dx}{(x^۲+۸)^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^۲+۸}} + ln\,(x+\sqrt{x^۲+۸}) + C$

٦) $\int \frac{u^۲ du}{(۹-u^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{u}{\sqrt{۹-u^۲}} - arc\,sin\,\frac{u}{۳} + C$

۷) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲+٤}} = \frac{۱}{۲}\,ln\left(\frac{x}{۲+\sqrt{x^۲+٤}}\right) + C$

۸) $\int \frac{dx}{x\sqrt{۲٥-x^۲}} = \frac{۱}{٥}\,ln\left(\frac{x}{٥+\sqrt{۲٥-x^۲}}\right) + C$

۹) $\int \frac{dy}{y^۲\sqrt{y^۲-۷}} = \frac{\sqrt{y^۲-۷}}{۷y} + C$

۱۰) $\int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۵-x^۲}} = -\frac{\sqrt{۵-x^۲}}{۵x} + C$

۱۱) $\int \frac{dx}{x^۳\sqrt{x^۲-۹}} = \frac{\sqrt{x^۲-۹}}{۱۸\,x^۲} + \frac{۱}{۵۴}\,\mathit{arc\ sec}\,\frac{x}{۳} + C$

۱۲) $\int \frac{\sqrt{۱٦-t^۲}\,dt}{t^۲} = -\frac{\sqrt{۱٦-t^۲}}{t} - \mathit{arc\ sin}\,\frac{t}{٤} + C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید ودرستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱۳) $\int \frac{\sqrt{x^۲+۱٦}\,dx}{x}$

۱٤) $\int \frac{\sqrt{y^۲-۹}\,dy}{y}$

۱۵) $\int \frac{dx}{x^۳\sqrt{٤-x^۲}}$

۱٦) $\int \frac{\sqrt{x^۲+۹}\,dx}{x^۲}$

۱۷) $\int \frac{\sqrt{۱۰۰-u^۲}\,du}{u}$

۱۸) $\int \frac{dx}{x^۳\sqrt{x^۲+۱}}$

۱۹) $\int \frac{dv}{(v^۲-۳)^{\frac{۳}{۲}}}$

۲۰) $\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{x^۲+۵}}$

۲۱) $\int \frac{dx}{x^٤\sqrt{x^۲-۵}}$

۲۲) $\int \frac{\sqrt{x^۲+۹}\,dx}{x^٦}$

۱۳٦- محاسبهٔ انتگرال ازراه جزء به جزء - اگر u و v توابعی‌ازیک متغیر مستقل باشند ، بنابر دستور دیفرانسیل حاصل‌ضرب دو تابع (دستور V شمارهٔ ۹٤) داریم :

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

و یا
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

از دو طرف این تساوی انتگرال میگیریم ، دستور معکوس آن بدست میاید :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (A)$$

این دستور را **دستور محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء** مینامند . با این دستور میتوان بسیاری ازانتگرالها را که از راه مستقیم غیر قابل محاسبه‌اند ، به صورت $\int u\,dv$ درنظرگرفت و به محاسبهٔ دو انتگرال $\int dv$ و $\int v\,du$ که ممکن است سریع و آسان انجام شود ، تبدیل کرد . درحساب انتگرال ، روش **محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء** موارد استعمال بسیار دارد . برای بکار بستن این دستور ، دیفرانسیل زیر علامت انتگرال را باید به دو عامل u و dv تجزیه کرد . اما برای انتخاب این دو عامل هیچ دستورالعمل کلی وجود ندارد و تنها میتوان گفت که

الف - dx همواره جزئی از dv است ،

ب - $\int dv$ باید قابل محاسبه باشد ،

پ - وقتی تابع زیرعلامت انتگرال به صورت حاصلضرب دو تابع است معمولاً باید تابع پیچیده‌تر را ، بشرط آنکه انتگرال آن قابل محاسبه باشد ، در dv قرار داد .

مثال ۱ - انتگرال $\int x\cos x\,dx$ را پیدا کنید .

حل - فرض میکنیم :
$$u = x \quad \text{و} \quad dv = \cos x\,dx$$

پس
$$du = dx \quad \text{و} \quad v = \int \cos x\,dx = \sin x$$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\cos x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v}\ \overbrace{dx}^{du} = x\sin x + \cos x + C$$

مثال ۲ـ انتگرال $\int x\, ln\, x\, dx$ را پیدا کنید .

حل ـ فرض میکنیم :
$$dv = x\, dx \quad و \quad u = ln\, x$$

پس
$$v = \int x\, dx = \frac{۱}{۲} x^۲ \quad و \quad du = \frac{dx}{x}$$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int x\, ln\, x\, dx = ln\, x \cdot \frac{x^۲}{۲} - \int \frac{x^۲}{۲} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^۲}{۲}\, ln\, x - \frac{x^۲}{٤} + C$$

مثال ۳ـ انتگرال $\int xe^{ax}\, dx$ را پیدا کنید .

حل ـ فرض میکنیم :
$$dv = x\, dx \quad و \quad u = e^{ax}$$

پس
$$v = \int x\, dx = \frac{x^۲}{۲} \quad و \quad du = e^{ax}\, a\, dx$$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int xe^{ax}\, dx = e^{ax} \cdot \frac{x^۲}{۲} - \int \frac{x^۲}{۲}\, e^{ax}\, a\, dx$$

$$= \frac{۱}{۲} x^۲ e^{ax} - \frac{a}{۲} \int x^۲ e^{ax}\, dx$$

اما محاسبهٔ $\int x^۲ e^{ax}\, dx$ ساده‌تر از محاسبهٔ $\int x\, e^{ax}\, dx$ نیست و این نشان میدهد که u و dv مناسب انتخاب نشده است . اکنون فرض میکنیم :

$$dv = e^{ax}\, dx \quad و \quad u = x$$

پس
$$v = \int e^{ax}\, dx = \frac{۱}{a} e^{ax} \quad و \quad du = dx$$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int xe^{ax}\,dx = x \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^{2}}e^{ax} + C = \frac{1}{a}e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$$

دربعضی از انتگرالها لازم است دستور محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء چندین بار بکار بسته شود .

مثال ۴- انتگرال $\int x^{2}e^{ax}\,dx$ را پیدا کنید .

حل - فرض میکنیم : $dv = e^{ax}\,dx$ و $u = x^{2}$

پس : $v = \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$ و $du = 2x\,dx$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int x^{2}e^{ax}\,dx = x^{2} \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax} \cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{a}x^{2}e^{ax} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}\,dx \qquad (1)$$

برای بدست آوردن انتگرال اخیر باید یک بار دیگر دستور (A) را بکار ببندیم ، داریم :

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$$

این نتیجه را در (۱) میگذاریم :

$$\int x^{2}e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^{2}e^{ax} - \frac{2}{a^{2}}e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(x^{2} - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^{2}}\right) + C$$

مثال ۵- نشان دهید که :

$$\int sec^۳ z\, dz = \frac{۱}{۲} sec\, z\, tg\, z + \frac{۱}{۲} ln\,(sec\, z + tg\, z) + C$$

حل - فرض میکنیم : $dv = sec^۲ z\, dz$ و $u = sec\, z$

پس $v = tg\, z$ و $du = sec\, z\, tg\, z\, dz$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int sec^۳ z\, dz = sec\, z\, tg\, z - \int sec\, z\, tg^۲ z\, dz$$

در انتگرال طرف راست تساوی اخیر $tg^۲ z = sec^۲ z - ۱$ میگذاریم ، داریم :

$$\int sec^۳ z\, dz = sec\, z\, tg\, z - \int sec^۳ z\, dz + ln\,(sec\, z + tg\, z) + ۲C$$

انتگرال طرف راست را به طرف چپ میبریم ودو طرف را به ۲ تقسیم میکنیم ، جواب بدست میاید .

مثال ۶- نشان دهید که :

$$\int e^{ax} sin\, nx\, dx = \frac{۱}{a^۲ + n^۲} e^{ax} (a\, sin\, nx - n\, cos\, nx) + C$$

حل - فرض میکنیم : $dv = sin\, nx\, dx$ و $u = e^{ax}$

پس $v = -\frac{cos\, nx}{n}$ و $du = ae^{ax} dx$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$(۲) \quad \int e^{ax} sin\, nx\, dx = -\frac{۱}{n} e^{ax} cos\, nx + \frac{a}{n} \int e^{ax} cos\, nx\, dx$$

انتگرال طرف راست را از راه جزء به جزء محاسبه میکنیم .

فرض میکنیم : $dv = \cos nx\, dx$ و $u = e^{ax}$

پس $v = \dfrac{\sin nx}{n}$ و $du = ae^{ax}\, dx$

این مقادیر را در دستور (A) میگذاریم :

$$\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{۱}{n} e^{ax} \sin nx - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx\, dx \qquad (۳)$$

مقدار اخیر را در (۲) میگذاریم ، داریم :

$$\int e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{۱}{n^۲} e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx) \qquad (٤)$$

$$- \frac{a^۲}{n^۲} \int e^{ax} \sin nx\, dx$$

انتگرال طرف راست تساوی اخیر همان انتگرال طرف چپ آن است. اگر مقدار این انتگرال را از معادلهٔ (٤) بدست آوریم ، جواب بالا بدست میاید .

سه مورد زیر از مهمترین موارد استعمال روش محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء است:

الف - وقتی تابع زیر علامت انتگرال به صورت حاصلضرب چند تابع است .

ب - وقتی تابع زیر علامت انتگرال شامل لگاریتم است .

پ - وقتی تابع زیر علامت انتگرال شامل توابع مستدیر معکوس است .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x + C$

۲) $\int ln\, x\, dx = x(ln\, x - ۱) + C$

۳) $\int x \sin \frac{x}{۲} dx = ٤ \sin \frac{x}{۲} - ۲x \cos \frac{x}{۲} + C$

٤) $\int x \cos nx\, dx = \frac{\cos nx}{n^۲} + \frac{x \sin nx}{n} + C$

٥) $\int u \sec^۲ u\, du = u\, tg\, u + ln \cos u + C$

٦) $\int v \sin^۲ ۳v\, dv = \frac{۱}{٤} v^۲ - \frac{۱}{۱۲} v \sin ٦v - \frac{۱}{۷۲} \cos ٦v + C$

۷) $\int y^۲ \sin ny\, dy = \frac{۲\cos ny}{n^۳} + \frac{۲y \sin ny}{n^۲} - \frac{y^۲ \cos ny}{n} + C$

۸) $\int xa^x\, dx = a^x \left[\frac{x}{ln\, a} - \frac{۱}{ln^۲ a} \right] + C$

۹) $\int x^n\, ln\, x\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \left(ln\, x - \frac{۱}{n+۱} \right) + C$

۱۰) $\int arc \sin x\, dx = x\, arc \sin x + \sqrt{۱ - x^۲} + C$

۱۱) $\int arc\, tg\, x\, dx = x\, arc\, tg\, x - \frac{۱}{۲} ln\, (۱ + x^۲) + C$

۱۲) $\int arc\, cotg\, y\, dy = y\, arc\, cotg\, y + \frac{۱}{۲} ln\, (۱ + y^۲) + C$

۱۳) $\int arc \cos ۲x\, dx = x\, arc \cos ۲x - \frac{۱}{۲} \sqrt{۱ - ٤x^۲} + C$

۱٤) $\int arc\, \sec y\, dy = y\, arc\, \sec y - ln\, (y + \sqrt{y^۲ - ۱}) + C$

۱۵) $\int arc\ cosec \frac{t}{۲} dt = t\ arc\ cosec \frac{t}{۲} + ۲ ln (t + \sqrt{t^۲ - ٤}) + C$

۱٦) $\int x\ arc\ tg\ x\ dx = \frac{x^۲ + ۱}{۲} arc\ tg\ x - \frac{x}{۲} + C$

۱۷) $\int arc\ tg \sqrt{x}\ dx = (x + ۱) arc\ tg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

۱۸) $\int x^۲ e^{-x} dx = -e^{-x} (۲ + ۲x + x^۲) + C$

۱۹) $\int e^{\theta} \cos \theta\ d\theta = \frac{e^{\theta}}{۲} (\sin \theta + \cos \theta) + C$

۲۰) $\int \frac{ln\ x\ dx}{(x + ۱)^۲} = \frac{x}{x + ۱} ln\ x - ln (x + ۱) + C$

۲۱) $\int x^۲ arc\ sin\ x\ dx = \frac{x^۳}{۳} arc\ sin\ x + \frac{x^۲ + ۲}{۹} \sqrt{۱ - x^۲} + C$

۲۲) $\int \frac{ln (x + ۱) dx}{\sqrt{x + ۱}} = ۲\sqrt{x + ۱} [ln (x + ۱) - ۲] + C$

۲۳) $\int \frac{x e^x dx}{(۱ + x)^۲} = \frac{e^x}{۱ + x} + C$

۲٤) $\int e^{-t} \cos \pi t\ dt = \frac{e^{-t} (\pi \sin \pi t - \cos \pi t)}{\pi^۲ + ۱} + C$

انتگرالهای زیررا پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۲۵) $\int x\ sec^۲ \frac{x}{۲} dx$

۲٦) $\int x \cos^۲ ۲x\ dx$

۲۷) $\int x^۲ \cos x\ dx$

۲۸) $\int arc\ sin\ mx\ dx$

۲۹) $\int arc\ cotg \frac{x}{۲} dx$

۳۰) $\int arc\ cos \frac{۱}{x} dx$

۳۱) $\int arc\,sec\,\frac{1}{y}\,dy$

۳۲) $\int arc\,cosec\,nt\,dt$

۳۳) $\int arc\,sin\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx$

۳۴) $\int x^3 arc\,sin\,x\,dx$

۳۵) $\int \frac{x\,arc\,sin\,x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۳۶) $\int \frac{arc\,tg\sqrt{x}\,dx}{x^2}$

۳۷) $\int x^3 arc\,tg\,x\,dx$

۳۸) $\int (e^x+2x)^2 dx$

۳۹) $\int (2^x+x^2)^2 dx$

۴۰) $\int e^{-\theta} cos\,\frac{\theta}{2}\,d\theta$

۴۱) $\int e^{\frac{t}{5}} sin\,\pi t\,dt$

۴۲) $\int e^{3x} cos\,\frac{x}{3}\,dx$

۴۳) $\int e^{-\frac{t}{2}} cos\,2t\,dt$

۴۴) $\int e^{\frac{t}{4}} cos\,\pi t\,dt$

۴۵) $\int e^{-\frac{t}{4}} sin\,\frac{\pi t}{4}\,dt$

۴۶) $\int cosec^3\theta\,d\theta$

۱۳۷- چند تذکر . - محاسبهٔ انتگرال رویهمرفته عملی مشکلتر از محاسبه مشتق است . مثلاً نمیتوان انتگرال

$$\int \sqrt{x}\,sin\,x\,dx$$

را که به ظاهر بسیار ساده است ، پیدا کرد. هیچ تابع عادی وجود ندارد که مشتق آن $\sqrt{x}\,sin\,x$ باشد .

برای آسانی محاسبهٔ انتگرالها جدولهای مفصلی تنظیم کرده‌اند. در فصل بیست‌وهفتم این کتاب نیز جدول مختصری درج است . طرز استفاده از این جدول در شمارهٔ ۱۷۶ بیان

شده است . روشهایی که تاکنون برای محاسبهٔ انتگرالها آموخته‌ایم ، برای حل بسیاری از مسائل کافی است . روشهای دیگری نیز در فصلهای بعد خواهیم آموخت .

تمرینهای گوناگون

انتگرالهای زیر را پیدا کنید و درستی جوابهایتان را با محاسبهٔ مشتق آنها بیازمایید :

۱) $\int \frac{۳x\, dx}{\sqrt{۵-۲x^۲}}$

۲) $\int \frac{۳x\, dx}{۵-۲x^۲}$

۳) $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{c^۲-x^۲}}$

۴) $\int x \cos ۲x\, dx$

۵) $\int \frac{(٤x+۳)dx}{x^۲+٤x+۸}$

۶) $\int \frac{(٤x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+٤x+۸}}$

۷) $\int \frac{dx}{(a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

۸) $\int \frac{dx}{x^۲-٦x+۹}$

۹) $\int \frac{dx}{x^۲-٦x+۸}$

۱۰) $\int \frac{dx}{x^۲-٦x+۱۰}$

۱۱) $\int (e^{۲x}+۲e^{-x})^۲ dx$

۱۲) $\int (e^{۲x}-۲x)^۲ dx$

۱۳) $\int \frac{dx}{e^x-٤e^{-x}}$

۱٤) $\int \sin^۲ ax \cos ax\, dx$

۱۵) $\int \sin^۲ ax \cos^۲ ax\, dx$

۱۶) $\int \ln (۱-\sqrt{x})dx$

۱۷) $\int (۲tg\, ۲\theta - cotg\, \theta)^۲ d\theta$

۱۸) $\int \frac{٤x\, dx}{۱-٤x^٤}$

۱۹) $\int \frac{x^{۳}dx}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۲۰) $\int \frac{x^{۳}dx}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۲۱) $\int \frac{x^{۳}dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۲۲) $\int \frac{x^{۳}dx}{x-۱}$

۲۳) $\int \frac{۴x\,dx}{\sqrt{۱-۴x^{۴}}}$

۲۴) $\int e^{۲t} \cos ۳t\, dt$

۲۵) $\int \sin^{۵} \frac{\theta}{۴}\, d\theta$

۲۶) $\int \sin^{۴} \frac{\theta}{۵}\, d\theta$

۲۷) $\int \frac{(t-\operatorname{cosec}^{۲} ۲t)dt}{t^{۲}+\operatorname{cotg} ۲t}$

۲۸) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{۱-x^{۲}}}\, dx$

۲۹) $\int \frac{۵\, dx}{x^{۲}-x+۱}$

۳۰) $\int \frac{۵\, dx}{\sqrt{x^{۲}-x+۱}}$

۳۱) $\int x^{۳} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{۲}\, dx$

۳۲) $\int (e^{x}+\sin x)^{۲}dx$

۳۳) $\int (x-\cos x)^{۲}dx$

۳۴) $\int (۱+\operatorname{tg} x)^{۳}dx$

۳۵) $\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{(۱-\cos\theta)^{۳}}$

۳۶) $\int \frac{(۱+\sin t)^{۳}dt}{\cos t}$

۳۷) $\int e^{-t} \sin ۲t\, dt$

۳۸) $\int \sin ۲\theta \cos ۳\theta\, d\theta$

۳۹) $\int \sin \theta \sin ۴\theta\, d\theta$

۴۰) $\int \cos \alpha \cos ۲\alpha\, d\alpha$

فصل سیزدهم

مقدار ثابت انتگرال گیری

۱۳۸- تعیین مقدار ثابت انتگرال گیری بوسیلهٔ شرایط اولیه . - چنانکه در صفحهٔ ۳۱۰ ذکر شده است ، وقتی مقدار انتگرال به ازای مقدار معینی از متغیر معلوم است ، مقدار ثابت انتگرال گیری را میتوان تعیین کرد . روشن است که برای تعیین مقدار ثابت انتگرال گیری باید شرط دیگری غیراز تابع زیر علامت انتگرال در دست باشد. اکنون این مطلب را با ذکر یک مثال روشن میکنیم .

مثال - تابعی را پیدا کنید که مشتق اول آن $۳x^۲-۲x+۵$ و مقدار آن به‌ازای $x=۱$ برابر ۱۲ باشد .

حل - تابع زیر علامت انتگرال $۳x^۲-۲x+۵$ است ، مینویسیم :

$$\int(۳x^۲-۲x+۵)dx=x^۳-x^۲+۵x+C$$

C مقدار ثابت انتگرال گیری است. بنابر شرط مسئله ، تابع اخیر باید به ازای $x=۱$ برابر ۱۲ باشد ، یعنی :

$$۱۲=۱-۱+۵+C \quad ==> \quad C=۷$$

پس تابع خواسته شده $x^۳-x^۲+۵x+۷$ است .

۱۳۹- معنی هندسی مقدار ثابت انتگرال گیری . - این مطلب را با ذکر دو مثال روشن میکنیم .

مثال ۱ - معادلهٔ خمی را پیدا کنید که شیب آن در هرنقطه برابر $۲x$ باشد .

حل - چون شیب خم در هرنقطهٔ آن برابر $\frac{dy}{dx}$ است ، پس بنابرفرض مسئله

$$\frac{dy}{dx}=۲x$$

یا

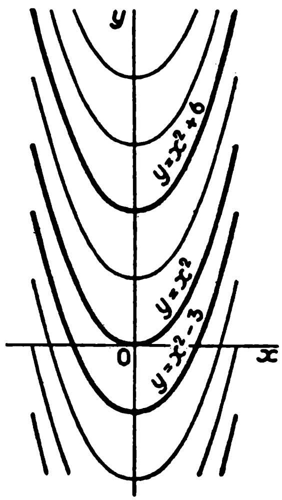
$$dy=۲x\,dx$$

است . از دو طرف این تساوی انتگرال میگیریم :

$$y=۲\int x\,dx$$

یا
$$y=x^۲+C \qquad (۱)$$

C مقدار ثابت انتگرال گیری است .



شکل ۱۰۱

اگر به C اعدادی مانند ۶ ، ۰ و ۳— نسبت دهیم، معادلات $y=x^۲+۶$ ، $y=x^۲$ و $y=x^۲-۳$ بدست میایند . مکان هندسی این معادلات سهمی‌هایی هستند که محور آنها محور yهاست و این محور را بترتیب در نقاطی به عرضهای ۶ و ۰ و ۳— قطع میکنند . مقدار $\frac{dy}{dx}$ در تمام سهمی‌های (۱) یکی است ، یعنی مماسهای به سهمی‌های (۱) در نقاطی که دارای یک طول هستند ، موازیند. علاوه برآن اختلاف عرض دو سهمی دلخواه از سهمی‌های (۱) به ازای جمیع مقادیر x مقدار ثابتی است .

بنابراین برای پیدا کردن این سهمی‌ها کافی است یکی از سهمی‌ها را بطور عمودی بسمت بالا و بسمت پایین انتقال دهیم ، دراین صورت مقدار C عوض میشود بدون آنکه شیب خم تغییر کند .

اگر در مثال بالا یک شرط اضافه کنیم و بخواهیم خم از نقطهٔ (۴ , ۱) بگذرد ، باید مختصات نقطهٔ مذکور در معادلهٔ (۱) صدق کند و از آنجا

$$۴=۱+C \implies C=۳$$

بنابراین منحنی مطلوب سهمی $y=x^۲+۳$ است .

مثال ۲- معادلهٔ خمی را پیدا کنید که شیب آن در هرنقطه برابر نسبت طول آن نقطه به عرض آن نقطه با علامت مخالف باشد .

حل - بنابرصورت مسئله تساوی‌زیر برقرار است :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

متغیرها را از هم جدا میکنیم :

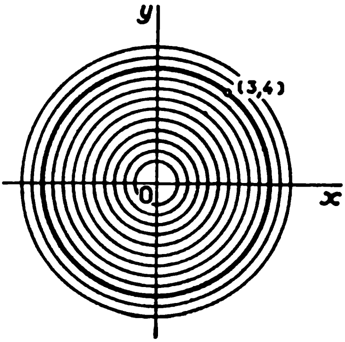
$$y\,dy=-x\,dx$$

از دو طرف این تساوی انتگرال میگیریم :

$$\frac{y^۲}{۲}=-\frac{x^۲}{۲}+C$$

یا

$$x^۲+y^۲=۲C$$



شکل ۱۰۲

معادلهٔ اخیر دایره‌های متحدالمرکزی را نشان میدهد که مرکز آنها مبدأ مختصات و شعاع آنها $\sqrt{۲C}$ است . اگر بخواهیم خم از نقطهٔ (٤ , ۳) نیز بگذرد ، باید

$$۹+۱٦=۲C$$

باشد و لذا منحنی مطلوب دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ است .

تمرین

در هریک از تمرینهای زیر تابعی را پیدا کنید که مشتق آن داده شده است و مقدار تابع نیز به ازای یک مقدار از متغیر معلوم است :

	مشتق تابع	مقدارمتغیر	مقدار تابع	جواب
(۱	$x-۳$	۲	۹	$\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۱۳$

(۲	$3+x-5x^2$	6	-20	$304+3x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3$
(۳	y^3-b^2y	2	0	$\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{2}b^2y^2+2b^2-4$
(۴	$\sin\theta+\cos\theta$	$\frac{\pi}{2}$	2	$\sin\theta-\cos\theta+1$
(۵	$\frac{1}{t}-\frac{1}{2-t}$	1	0	$\ln(2t-t^2)$
(۶	$\sec^2\varphi+\operatorname{tg}\varphi$	0	5	$\operatorname{tg}\varphi+\ln\sec\varphi+5$
(۷	$\frac{1}{x^2+a^2}$	a	$\frac{\pi}{2a}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4a}$
(۸	bx^3+ax+4	b	10	
(۹	$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$	4	0	
(۱۰	$\operatorname{cotg}\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$	$\frac{\pi}{2}$	3	
(۱۱	$3te^{3t^2}$		4	

معادلهٔ دسته خم‌هایی را پیدا کنید که شیب خط مماس در هرنقطه به آنها به قرار زیر است :

(۱۲	m	جواب : خطوط مستقیم $y=mx+C$
(۱۳	x	سهمی‌های $y=\frac{1}{2}x^2+C$
(۱۴	$\frac{1}{y}$	سهمی‌های $\frac{1}{2}y^2=x+C$

۱۰) $\frac{x^{۲}}{y}$ سهمی‌های سمی کوبیک $\frac{۱}{۲}y^{۲}=\frac{۱}{۳}x^{۳}+C$

۱۶) $\frac{x}{y^{۲}}$ سهمی‌های سمی کوبیک $\frac{۱}{۳}y^{۳}=\frac{۱}{۲}x^{۲}+C$

۱۷) $۳x^{۲}$ سهمی‌های کوبیک $y=x^{۳}+C$

۱۸) $\frac{۱}{y^{۲}}$ سهمی‌های کوبیک $\frac{۱}{۳}y^{۳}=x+C$

۱۹) $\frac{x}{y}$ هذلولی‌های متساوی‌الساقین $y^{۲}-x^{۲}=C$

۲۰) $-\frac{y}{x}$ هذلولی‌های متساوی‌الساقین $xy=C$

۲۱) $\frac{b^{۲}x}{a^{۲}y}$ هذلولی‌های $b^{۲}x^{۲}-a^{۲}y^{۲}=C$

۲۲) $-\frac{b^{۲}x}{a^{۲}y}$ بیضی‌های $b^{۲}x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=C$

۲۳) $\frac{۱+x}{۱-y}$ دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y=C$

درهریک‌از مسائل زیر معادلهٔ خمی مطلوب است که شیب‌آن درهرنقطه ، به صورت تابعی از طول و عرض آن نقطه ، داده شده است و نیز خم از نقطهٔ مذکور میگذرد .

۲۴) x ، $(۱\,,\,۱)$ جواب : $۲y=x^{۲}+۱$

۲۵) $۴y$ ، $(۱\,,\,۱)$ $\ln y=۴x-۴$

۲۶) $۲xy$ ، $(۳\,,\,۱)$ $\ln y=x^{۲}-۹$

۲۷) $-xy$ ، $(۰\,,\,۲)$ $y=۲e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$

۲۸) $\frac{x+۱}{y+۱}$ ، $(۰ , ۱)$ جواب : $(y+۱)^۲=(x+۱)^۲+۳$

۲۹) $\frac{h-x}{y-k}$ ، $(۰ , ۰)$ $x^۲+y^۲-۲hx-۲ky=۰$

۳۰) $\frac{y}{x^۲}$ ، $(۱ , ۱)$ $x \ln y=x-۱$

۳۱) $y\sqrt{x}$ ، $(٤ , ۱)$ $۳\ln y=۲(x\sqrt{x}-۸)$

۳۲) $\frac{٤xy}{٤x^۲-۱۵}$ ، $(۲ , ۱)$ $٤x^۲-y^۲=۱۵$

۳۳) $\frac{y^۲}{x}$ ، $(۱ , ٤)$ ۳٤) $x\sqrt{y}$ ، $(۱ , ۹)$

۳۵) $\frac{x-۳}{۱-y}$ ، $(۳ , ۰)$ ۳٦) $\frac{xy}{x^۲+٤}$ ، $(۱ , ۲)$

۳۷) $\frac{٤-x}{۲y-۳}$ ، $(٤ , ۲)$ ۳۸) $\sqrt{\frac{۲+x}{۳+y}}$ ، $(۲ , ٦)$

۳۹) $\sqrt{\frac{y-۱}{x-۲}}$ ، $(۳ , ۵)$ ٤۰) $x\cos^۲ y$ ، $(٤ , \frac{\pi}{٤})$

٤۱) میدانیم $dy=(۲x+۱)dx$ است وبه‌ازای $x=۱$ ، $y=۷$ است.
مقدار y را به ازای $x=۳$ پیدا کنید . جواب : ۱۷

٤۲) میدانیم $dA=\sqrt{۲px}\, dx$ است‌وبه‌ازای $x=\frac{p}{۲}$ ، $A=\frac{p^۲}{۳}$ است.
مقدار A را به ازای $x=۲p$ پیدا کنید . جواب : $\frac{۸}{۳}p^۲$

٤۳) میدانیم $dy=x\sqrt{۱۰۰-x^۲}\, dx$ است‌وبه‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

است . مقدار y را به ازای $x=۸$ پیدا کنید . جواب : $\frac{۷۸۴}{۳}$

۴۴) میدانیم $d\rho=\cos ۲\theta\, d\theta$ است و به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ، $\rho=۶$ است. مقدار ρ را به‌ازای $\theta=\frac{۳\pi}{۴}$ پیدا کنید .

۴۵) میدانیم $ds=t\sqrt{۴t+۱}\, dt$ است‌وبه‌ازای $t=۰$ ، $s=۰$ است. مقدار s را به ازای $t=۲$ پیدا کنید .

۴۶) خمی است که در هرنقطهٔ آن $y''=x$ است . این خم از نقطهٔ (۰ , ۳) میگذرد و شیب خط مماس به آن دراین نقطه ۳٫۵ است . معادلهٔ خم را پیدا کنید .

جواب : $۶y=x^{۳}-۶x-۹$

۴۷) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که در هرنقطهٔ آن $y''=\frac{۱۲}{x^{۴}}$ است . این خم از نقطهٔ (۰ , ۱) میگذرد و معادلهٔ خط مماس به آن دراین نقطه $۶x+y=۶$ است .

جواب : $xy+۶x=۶$

۴۸) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که درهرنقطهٔ آن $y''=\frac{۳}{\sqrt{x+۳}}$ است . این خم از نقطهٔ (۱ , ۱) میگذرد و شیب آن دراین نقطه °۴۵ است .

۴۹) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که در هرنقطهٔ آن $y''=\frac{۱}{x}$ است . این خم از نقطهٔ (۰ , ۱) میگذرد و شیب آن دراین نقطه °۱۳۵ است .

۵۰) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که طول تحت‌قائم آن مقدار ثابت ۲a است .

جواب : سهمی $y^{۲}=۴ax+C$

راهنمایی- بنابر رابطهٔ (۴) شمارهٔ ۴۳ طول تحت قائم برابر $y\frac{dy}{dx}$ است .

۵۱) خمی‌را پیدا کنید که طول تحت مماس آن مقدار ثابت a است [رابطهٔ (۳) ی شمارهٔ ۴۳ را ببینید] . جواب : $a\ln y=x+C$

۵۲) خمی را پیدا کنید که طول تحت قائم آن درهرنقطه برابر طول آن نقطه باشد.

جواب : هذلولی متساوی‌الساقین $y^۲ - x^۲ = ۲C$

۵۳) خمی را پیدا کنید که طول قطعهٔ قائم آن مقدار ثابت R است و وقتی $x = ۰$ است ، $y = R$ است . جواب : دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = R^۲$

راهنمایی - بنابرشمارهٔ ۴۳ طول قطعهٔ قائم برابر $y\sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}$ است ،

پس
$$dx = \pm (R^۲ - y^۲)^{-\frac{۱}{۲}} y\, dy$$

۵۴) معادلهٔ خمهایی را پیدا کنید که درهر نقطهٔ آنها طول تحت قائم متناسب با مجذور عرض نقطه باشد . جواب : $y = Ce^{kx}$

۵۵) معادلهٔ خمی‌را پیدا کنید که درهرنقطهٔ‌آن زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس نصف زاویهٔ قطبی است . جواب : $\rho = C(۱ - \cos\theta)$

۵۶) معادلهٔ خمهایی را پیدا کنید که درهرنقطهٔ آنها زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس n برابر زاویهٔ قطبی است . جواب : $\rho^n = C \sin n\theta$

۱۴۰- معنی‌فیزیکی مقدار ثابت انتگرال‌گیری . - دو مثال زیرمعنی فیزیکی مقدار ثابت انتگرال گیری را روشن میکنند .

مثال ۱ - معادلات حرکت نقطه‌ای را پیدا کنید که با شتاب ثابت‌درامتداد یک خط مستقیم تغییرمکان میدهد .

حل - چون شتاب [بنابر رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ۵۹ ، $\frac{dv}{dt}$] مقداری ثابت و مثلاً برابر f است ، داریم :

$$\frac{dv}{dt} = f$$

یا
$$dv = f\,dt$$

یا
$$v = ft + C \qquad (۱)$$

شرایط اولیه		
t	v	s
۰	$v_\circ$	$s_\circ$

به منظور تعیین مقدار C فرض میکنیم سرعت‌اولیه $v_\circ$ بوده است‌یعنی در لحظهٔ $t=\cdot$ ، $v=v_\circ$ بوده است .

این مقادیر را در (۱) میگذاریم :

$$v_\circ=\cdot+C \quad => \quad C=v_\circ$$

بنابراین رابطهٔ (۱) به صورت زیر در میاید :

$$v=ft+v_\circ \qquad (۲)$$

چون $v=\frac{ds}{dt}$ است [رابطهٔ (C) ی شمارهٔ ۵۱] ، بنابر (۲) داریم :

$$\frac{ds}{dt}=ft+v_\circ$$

یا

$$ds=ft\,dt+v_\circ dt$$

یا

$$s=\frac{۱}{۲}ft^{۲}+v_\circ t+C_۱ \qquad (۳)$$

به منظور تعیین $C_۱$ فرض میکنیم‌فاصلهٔ‌اولیه $s_\circ$ بوده است ، یعنی درلحظهٔ $t=\cdot$ ، $s=s_\circ$ بوده است . این مقادیر را در (۳) میگذاریم :

$$s_\circ=\cdot+\cdot+C_۱ \quad => \quad C_۱=s_\circ$$

بنابراین رابطهٔ (۳) به صورت زیر در میاید :

$$s=\frac{۱}{۲}ft^{۲}+v_\circ t+s_\circ \qquad (٤)$$

اگر در روابط (۲) و (٤) ، $f=g$ ، $v_\circ=\cdot$ و $s_\circ=\cdot$ قرار دهیم ، معادلات سقوط آزاد جسم در خلاء بدست میایند :

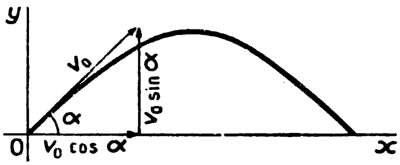
$$v = gt \quad و \quad h = \frac{۱}{۲} gt^{۲}$$

اگر t را بین این معادلات حذف کنیم ، داریم :

$$v = \sqrt{۲gh}$$

مثال ۲ - از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید وحرکت گلوله‌ای را که سرعت اولیهٔ آن $v_{\circ}$ و زاویهٔ پرتاب آن با سطح افق α است ، مطالعه نمایید .

حل - فرض میکنیم صفحهٔ xOy صفحهٔ مسیر ، Ox افقی و Oy شاقولی است و گلوله از مبدأ مختصات پرتاب شده است . نیز فرض میکنیم تنها نیروی ثقل بر گلوله اثر



شکل ۱۰۳

میکند. دراین‌شرایط تصویرشتاب‌برامتداد افقی‌صفرو برامتدادقائم g— است. بدین ترتیب بنابررابطهٔ (F) شمارهٔ ۸٤

$$\frac{dv_x}{dt} = ۰ \quad و \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

یا
$$v_x = C_۱ \quad و \quad v_y = -gt + C_۲$$

اما
$$v_{\circ} \cos \alpha = \text{تصویر سرعت اولیه برامتداد افقی}$$

و
$$v_{\circ} \sin \alpha = \text{تصویر سرعت اولیه برامتداد قائم}$$

پس
$$C_۱ = v_{\circ} \cos \alpha \quad و \quad C_۲ = v_{\circ} \sin \alpha$$

بنابراین
$$v_x = v_{\circ} \cos \alpha \quad و \quad v_y = -gt + v_{\circ} \sin \alpha \qquad (۵)$$

اما بنابر روابط (C) و (D) ی شمارهٔ ۸۳ ، $v_x=\frac{dx}{dt}$ و $v_y=\frac{dy}{dt}$ است و تساویهای (٥) به صورت زیر در میایند :

$$\frac{dx}{dt}=v_\circ cos\,\alpha \quad و \quad \frac{dy}{dt}=-gt+v_\circ sin\,\alpha$$

یا

$$dx=v_\circ cos\,\alpha\, dt \quad و \quad dy=-gt\,dt+v_\circ sin\,\alpha\, dt$$

از دو طرف این تساویها انتگرال میگیریم :

$$x=v_\circ cos\,\alpha\cdot t+C_۳ \quad و \quad y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ sin\,\alpha\cdot t+C_٤ \tag{٦}$$

برای‌تعیین $C_۳$ و $C_٤$ ملاحظه میکنیم که وقتی $t=\cdot$ است ، $x=\cdot$ و $y=\cdot$ است. این مقادیر را در روابط (٦) میگذاریم ، داریم :

$$C_۳=\cdot \quad و \quad C_٤=\cdot$$

بنابراین

$$x=v_\circ cos\,\alpha\cdot t \tag{٧}$$

و

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ sin\,\alpha\cdot t \tag{٨}$$

t را بین (٧) و (٨) حذف میکنیم :

$$y=x\,tg\,\alpha-\frac{gx^۲}{۲v_0^۲cos^۲\alpha} \tag{٩}$$

این معادله معادلهٔ مسیرگلوله است و نشان میدهد که مسیرگلوله در خلاء یک سهمی است .

تمرین

در مسائل زیر رابطهٔ بین v و t داده شده است . رابطهٔ بین s و t را پیدا کنید درصورتیکه میدانیم وقتی $t=۱$ است ، $s=۲$ است .

۱) $v=a+bt$ جواب : $s=a(t-۱)+\frac{۱}{۲}b(t^۲-۱)+۲$

۲) $v=\sqrt{t-۱}$ ۳) $v=t^۲+\frac{۱}{t^۲}$

در مسائل زیر مقدار شتاب برحسب t داده شده است . رابطهٔ بین v و t را پیدا کنید درصورتیکه میدانیم وقتی $t=۳$ است ، $v=۲$ است .

۴) $۴-t^۲$ جواب : $v=۴t-\frac{۱}{۳}t^۳-۱$

۵) $\sqrt{t}+۳$ ۶) $\frac{۱}{t^۲}-t$

درمسائل زیر مقدارشتاب داده شده است. رابطهٔ بین s و t را پیدا کنید درصورتیکه میدانیم وقتی $t=۰$ است ، $s=۰$ و $v=۲۰$ است .

۷) -۳۲ جواب : $s=۲۰t-۱۶t^۲$

۸) $۴-t$ ۹) $-۱۶\cos ۲t$

۱۰) سنگی‌را از بالای ساختمانی به ارتفاع ۳۰ متر رها کرده‌ایم. این سنگ باچه سرعتی به زمین میخورد ؟ $(g=۹۸۱\ cm/s^۲)$ جواب : ۲۴٫۵ متر درثانیه

۱۱) (دنبالهٔ مسئلهٔ ۱۰) اگر سنگ را با سرعت ۲۰ متر در ثانیه بسمت پایین پرتاب کرده باشیم ، سنگ با چه سرعتی به زمین میخورد ؟ جواب : ۳۱٫۴ متر در ثانیه

اگر سنگ را با سرعت ۲۰ متر در ثانیه بسمت بالا پرتاب کرده باشیم ، سنگ با چه سرعتی به زمین میخورد ؟

۱۲) سنگی را از بالونی که با سرعت ۷ متر در ثانیه صعود میکند رها کرده‌ایم . این سنگ پس‌از ۶ ثانیه به زمین رسیده است . هنگام رها شدن سنگ ارتفاع بالون چقدر بوده است ؟

۱۳) (درمسئلهٔ ۱۲) اگرهنگام رها شدن سنگ‌بالون‌درحال نزول میبود و باسرعت ۷ متر در ثانیه پایین میامد ، سنگ پس‌از چه مدتی به زمین میرسید ؟

۱۴) شتاب‌قطاری ، هنگام‌حرکت از یک ایستگاه ، با دستور $۰٫۵+۰٫۰۲t$ متر

در ثانیه در ثانیه داده شده است . فاصلهٔ قطار از ایستگاه در پایان بیستمین ثانیهٔ حرکت چقدر است ؟ جواب : ۱۲۶٫۷ متر

۱۵) شتاب یک نقطهٔ مادی که روی یک صفحهٔ مایل میلغزد ، ۸ متر در ثانیه در ثانیه بسمت‌پایین است. این نقطه از پایین صفحهٔ مایل با سرعتی برابر ۱۲ متر درثانیه بسمت بالا رها شده است. مسافت پیموده شده پس‌از t ثانیه چقدر است ؟ مسافت پیموده شده تا آغاز بازگشت چقدر است ؟ جواب : ۹ متر

۱۶) (در مسئلهٔ ۱۵) اگر طول صفحهٔ مایل ۴۰ متر باشد ، سرعت اولیهٔ نقطهٔ متحرك چه باشد تا بتواند درست به بالای صفحه برسد ؟

۱۷) گلوله‌ای که از سطح زمین بطور عمودی بسمت بالا پرتاب شده است ، پس‌از یک ثانیه به ارتفاع ۴۰ متر میرسد. حداکثر ارتفاعی که گلوله به آن میرسد چقدر است؟

۱۸) گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ ۵۴ متر در ثانیه بسمت دیواری که در ۱۶۲ متری قرار دارد پرتاب شده است .

الف ـ اگر زاویهٔ پرتاب 45° باشد ، گلوله به چه ارتفاعی از دیوار اصابت میکند ؟

جواب : ۷۴ متر

ب ـ زاویهٔ پرتاب چه باشد تا گلوله درست به پای دیوار اصابت کند ؟

جواب : ۱۶٫۵° یا ۷۳٫۵°

پ ـ زاویهٔ پرتاب چه باشد تا گلوله در ارتفاع ۸ متری به دیوار اصابت کند ؟

جواب : ۲۷° یا ۷۲٫۵°

ت ـ زاویهٔ پرتاب چه باشد تا گلوله در بلندترین ارتفاع ممکن به دیوار اصابت کند؟ این ارتفاع چقدر است ؟ جواب : ۶۱٫۵° ، ۱۰۰ متر

۱۹) شتاب یک نقطهٔ مادی $-ks$ است (k ثابت) و وقتی $s=s_0$ است ، $v=v_0$ است . نشان دهید که :

$$v^2-v_0^2+k(s^2-s_0^2)=0$$

۲۰) شتاب جسم صلبی که در زیر سطح زمین قرار دارد بسمت مرکز زمین است و مقدار آن متناسب بافاصلهٔ جسم از مرکز زمین میباشد . اگر جسمی را در دهانهٔ چاهی

به عمق ۱۰۰۰ میل رها کنیم ، جسم با چه سرعتی به تهٔ چاه میخورد؟ (یک میل ۱۶۰۹٫۳ متر است .) جواب : تقریباً ۱۰٫۵ کیلومتر درثانیه .

تمرین اضافی

۱) در اتاقی که حرارت آن $۲۰°$ است ، حرارت مایعی ، در لحظهٔ t_0 ، $۷۰°$ و پنج دقیقه پس‌از آن $۶۰°$ است. اگر سرعت سرد شدن مایع متناسب با تفاضل حرارت مایع و حرارت اتاق باشد حرارت مایع در سی دقیقه پس‌از t_0 چقدر است ؟ جواب : $۳۳٫۱°$

۲) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که از نقطهٔ $(a , ۰)$ میگذرد و طول تحت مماس قطبی آن درهرنقطه n برابر طول شعاع حامل آن نقطه است . جواب : $\rho=ae^{\frac{\theta}{n}}$

۳) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که‌از نقطهٔ $(a , ۰)$ میگذرد و طول تحت‌قائم قطبی آن درهرنقطه n برابرطول شعاع حامل آن نقطه است . جواب : $\rho=ae^{n\theta}$

۴) نقطهٔ M در صفحهٔ xOy طوری حرکت میکند که تصویر بردار سرعت آن روی محور x ها برابر ky و روی محور y ها برابر kx است. نشان‌دهید که مسیر نقطهٔ M یک هذلولی متساوی‌الساقین است .

۵) گلوله‌ای از رأس برجی با زاویهٔ $۴۵°$ پرتاب شده و پس‌از ۵ ثانیه به سطح افقی مار برپای برج اصابت کرده است . فاصلهٔ نقطهٔ اصابت تاپای برج برابر ارتفاع برج است . ارتفاع برج چقدر است ؟ $(g=۹٫۸۱ \ m/s^۲)$ ۶۱ متر

۶) نقطهٔ متحرکی‌از مبدأ مختصات حرکت میکند . تصویر بردار سرعت آن نقطه درلحظهٔ t (برحسب ثانیه) روی محور x ها برابر $t^۲-۴$ و روی محور y ها برابر $۴t$ است.

الف ـ نقطهٔ متحرك پس‌از t ثانیه کجاست ؟

جواب : $x=\frac{۱}{۳}t^۳-۴t$ و $y=۲t^۲$

ب ـ مسافت پیموده شده چقدر است ؟ جواب : $s=\frac{۱}{۳}t^۳+۴t$

پ ـ معادلهٔ مسیر چیست ؟ جواب : $۷۲x^۲=y^۳-۴۸y^۲+۵۷۶y$

۷) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که طول قطعهٔ مماس به آن (شمارهٔ ۴۲) مقدار ثابت c است .

راهنمایی - در قسمت الف مسئلهٔ ۲ ی صفحهٔ ۱۲۴ علامت منفی را اختیار کنید و فرض نمایید که وقتی $x=0$ است ، $y=c$ است .

جواب : $x=c\ ln\left(\dfrac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{c^2-y^2}$

۸) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که از نقطهٔ $(a, 0)$ میگذرد ودر آن $a^2ds=\rho^3d\theta$ است (شمارهٔ ۹۶) . جواب : $\rho^2=a^2 sec\ 2\theta$

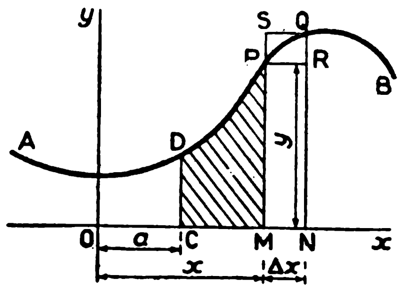
فصل چهاردهم

انتگرال معین

۱۴۱ - دیفرانسیل مساحت سطح زیر یك خم. - تابع متصل $\varphi(x)$ را در نظر میگیریم و فرض میکنیم معادلهٔ خم AB

$$y=\varphi(x)$$

است (شکل ۱۰٤) . نیز فرض میکنیم پاره خط CD ثابت است و پاره خط MP موازی محور y ها حرکت میکند . CD را یک عرض ثابت ، MP را یک عرض متغیر و اندازهٔ



شکل ۱۰٤

سطح CMPD را u مینامیم . وقتی به x نمو کوچکی مانند Δx بدهیم ، u نیز نموی مانند Δu (= مساحت MNQP) میکند . با کامل کردن مستطیلهای MNRP و MNQS می‌بینیم که :

$$\text{مساحت MNRP} < \text{مساحت MNQP} < \text{مساحت MNQS}$$

یا

$$MP \cdot \Delta x < \Delta u < NQ \cdot \Delta x$$

و یا

$$MP < \frac{\Delta u}{\Delta x} < NQ^{*}$$

---

* در شکل ۱۰٤ ، MP کوچکتر از NQ است . درحالتی که MP بزرگتر از NQ است ، تنها کافی است جهت نامساویها را عوض کنیم .

اکنون Δx را بسمت صفر میل میدهیم . چون MP ثابت میماند و NQ بسمت MP میل میکند (y تابعی پیوسته از x است) ، داریم :

$$\frac{du}{dx}=y(=MP)$$

و یا

$$du=y\,dx$$

قضیه - دیفرانسیل مساحت سطح محدود بین یك خم دلخواه و محور xها و یك عرض ثابت و یك عرض متغیر برابر است با حاصلضرب عرض متغیر در دیفرانسیل طول نظیر آن .

۱۴۲- انتگرال معین . - ازقضیهٔ اخیر چنین برمیاید که اگر AB خم نمایش تابع

$$y=\varphi(x)$$

باشد ، داریم :

$$du=y\,dx$$

یا

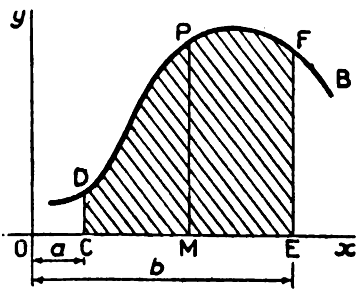
$$du=\varphi(x)dx \qquad (۱)$$

دراین رابطه du دیفرانسیل مساحت سطح محدود بین خم AB و محور x ها ودوعرض دلخواه است . از دو طرف (۱) انتگرال میگیریم :

$$u=\int\varphi(x)dx$$

اگر $\int\varphi(x)dx$ را با $f(x)+C$ نشان دهیم، داریم :

$$u=f(x)+C \qquad (۲)$$



شکل ۱۰۵

برای تعیین C ملاحظه میکنیم که وقتی $x=a$ است ، $u=۰$ است . این مقادیر را در (۲) میگذاریم :

$$۰=f(a)+C$$

و ازآنجا

$$C=-f(a)$$

است . پس رابطهٔ (۲) به صورت زیر درمیاید :

$$u=f(x)-f(a) \tag{۳}$$

مساحت سطح خواسته شدهٔ CEFD همان مقدار u است که از رابطهٔ (۳) بدست میاید بشرط آنکه بجای x ، b بگذاریم . پس

$$\text{مساحت}\ CEFD = f(b)-f(a) \tag{A}$$

قضیه - مساحت سطح محدود بین خم $y=\varphi(x)$ و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ برابر است با تفاضل دومقدار $\int y\,dx$ بهازای $x=a$ و $x=b$.

این تفاضل را با علامت *

$$\int_a^b y\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b \varphi(x)dx \tag{٤}$$

نشان میدهند و میخوانند «انتگرال از a تا b ی $y\,dx$» . a را **حد پایین** و b را **حد بالای** انتگرال مینامند** .

چون (٤) همواره مقدار **معینی** است ، آن را **انتگرال معین** مینامند . اگر

$$\int \varphi(x)dx=f(x)+C$$

باشد داریم :

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\Big[f(x)+C\Big]_a^b=\Big[f(b)+C\Big]-\Big[f(a)+C\Big]$$

یا

$$\int_a^b \varphi(x)dx=f(b)-f(a)$$

* این علامت منسوب به ژوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷٦۸) است .

** منظور از کلمهٔ **حد** در اینجا مقادیر متغیر در دو سر فاصله است (کمترین و بیشترین مقدار متغیر) و نباید با معنی حد درنظریهٔ حدود اشتباه شود .

چنانکه مشاهده میشود ، **مقدار ثابت انتگرال گیری** حذف شده است . **بنابراین میتوان علامت**

$$\int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b y\,dx$$

را به منزلهٔ اندازهٔ عددی مساحت سطح محدود بین خم * $y=\varphi(x)$ **و محور x ها و دو خط** $x=a$ **و** $x=b$ **تعریف کرد مشروط به‌آنکه سطح مذکورمحدود باشد یعنی اولاً a و b محدود باشند و ثانیاً تابع درهیچیك از نقاط فاصلهٔ بستهٔ** $[a , b]$ **بسمت بینهایت میل نکند .**

۱٤۳- محاسبهٔ انتگرال معین . - روش محاسبهٔ انتگرال معین را میتوان به صورت زیر خلاصه کرد :

عمل اول : انتگرال نامعین دیفرانسیل داده شده را پیدا میکنیم .

عمل دوم : در نتیجهٔ حاصل بجای متغیر نخست حد بالا و سپس حد پایین انتگرال را میگذاریم و مقدار دومی را از اولی کم میکنیم .

چون هنگام تفریق مقدار ثابت انتگرال گیری حذف میشود ، آن را درمحاسبه وارد نمیکنیم .

مثال ۱- انتگرال $\int_1^4 x^2dx$ را حساب کنید .

حل - $$\int_1^4 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$$

مثال ۲- انتگرال $\int_0^\pi \sin x\,dx$ را حساب کنید .

* $\varphi(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته و یکسان است .

حل - $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x \right]_{0}^{\pi} = \left[-(-1) \right] - \left[-1 \right] = 2$

مثال ۳- نشان دهید که $\int_{0}^{a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}$ است.

حل - $\int_{0}^{a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\, arc\, tg \frac{x}{a} \right]_{0}^{a}$

$$= \frac{1}{a}\, arc\, tg\, 1 - \frac{1}{a}\, arc\, tg\, 0 = \frac{\pi}{4a}$$

مثال ٤- نشان دهید که $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9} = -\frac{1}{12}\, ln\, 5 = -0{,}134$ است.

حل - این انتگرال را میتوان بااستفاده از یکی از دو صورت نمونهٔ (۱۹) یا (۱۹a) محاسبه کرد . $v=2x$ ، $a=3$ و $dv=2\,dx$ قرار میدهیم . انتخاب (۱۹) یا (۱۹a) با توجه به حدودانتگرال صورت میگیرد. x از ۱ــ تا ۰ صعود میکند ، پس v از ۲ــ تا ۰ صعود مینماید و لذا $v^2 \leqslant 4$ است . اما $a^2=9$ است. بنابراین $v^2 < a^2$ است و باید دستور (۱۹a) را بکار بست :

$$(1) \quad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9} = -\int_{-1}^{0} \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{12}\left[ln \frac{3+2x}{3-2x} \right]_{-1}^{0}$$

مقدار اخیر همان جواب مسئله است و منفی است زیرا خم و سطح مورد نظر زیر محور xهاست .

۱٤٤ - تغییر متغیر در انتگرال معین. - وقتی به منظور محاسبهٔ یک انتگرال تغییر متغیر میدهیم ، نتیجه به صورت تابعی از متغیر جدید بدست میاید وگاهی برگرداندن این تابع به صورت تابعی از متغیر اصلی بسیار مشکل است. در انتگرالهای معین میتوان ازاین کار اجتناب کرد و بجای حدود اصلی حدود نظیری برای انتگرال جدید پیدا کرد . این مطالب را با ذکر یک مثال روشن میکنیم .

مثال - انتگرال $\int_{\cdot}^{۱۶} \frac{x^{\frac{1}{۴}}dx}{۱+x^{\frac{1}{۲}}}$ را حساب کنید .

حل - تغییر متغیر $x=z^{۴}$ میدهیم ، دراین صورت $dx=۴z^{۳}dz$ ، $x^{\frac{1}{۲}}=z^{۲}$

و $x^{\frac{1}{۴}}=z$ است . برای بدست آوردن حدود جدید ملاحظه میکنیم که

وقتی $x=\cdot$ است ، $z=\cdot$ است ،

و وقتی $x=۱۶$ است ، $z=۲$ است .

پس داریم :

$$\int_{\cdot}^{۱۶} \frac{x^{\frac{1}{۴}}dx}{۱+x^{\frac{1}{۲}}}=\int_{\cdot}^{۲} \frac{z\times ۴z^{۳}dz}{۱+z^{۲}}=۴\int_{\cdot}^{۲}\left(z^{۲}-۱+\frac{۱}{۱+z^{۲}}\right)dz$$

$$=۴\int_{\cdot}^{۲}z^{۲}dz-۴\int_{\cdot}^{۲}dz+۴\int_{\cdot}^{۲}\frac{dz}{۱+z^{۲}}$$

$$=\left[\frac{۴}{۳}z^{۳}-۴z+۴\,arc\ tg\ z\right]_{\cdot}^{۲}=\frac{۸}{۳}+۴\,arc\ tg\,۲$$

رابطهٔ بین متغیر قدیم و جدید باید طوری باشد که بین دو حد انتگرال به هرمقدار از یک متغیر تنها یک مقدار محدود از متغیر دیگر نظیر شود . اگر یکی ازمتغیرها تابعی چندسان از متغیر دیگر باشد ، باید مقدار صحیح آن را اختیار نمود .

تمرین

۱) نشان دهید که $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$ است .

انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۲) $\int_{۰}^{a}(a^{۲}x-x^{۳})\,dx=\frac{a^{۴}}{۴}$

۳) $\int_{۱}^{e}\frac{dx}{x}=۱$

۴) $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۳-۲x}}=\sqrt{۳}-۱$

۵) $\int_{۲}^{۳}\frac{۲t\,dt}{۱+t^{۲}}=\ln ۲$

۶) $\int_{۰}^{۲}\frac{x^{۳}dx}{x+۱}=\frac{۸}{۳}-\ln ۳$

۷) $\int_{۰}^{r}\frac{r\,dx}{\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}}=\frac{\pi r}{۲}$

۸) $\int_{۰}^{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^{۲}dx=\frac{a^{۲}}{۶}$

۹) $\int_{۰}^{۴}\frac{x^{۲}dx}{x+۱}=۵٫۶۰۹۴$

۱۰) $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{e^{۳x}}=۰٫۳۱۶۷$

۱۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta\,d\theta=۱$

۱۲) $\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲+۲\cos\theta}\,d\theta=۴$

۱۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۳}x\cos^{۳}x\,dx=\frac{۱}{۱۲}$

۱۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\sec^{۴}\theta\,d\theta=\frac{۴}{۳}$

۱۵) $\int_{۰}^{۴}\frac{dx}{\sqrt{۹-۲x}}$

۱۶) $\int_{۰}^{۳}\frac{t\,dt}{\sqrt{t^{۲}+۱۶}}$

۱۷) $\int_{۰}^{۲}\frac{y\,dy}{\sqrt{۲۵-۴y^{۲}}}$

۱۸) $\int_{۰}^{a}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$

۱۹) $\int_{۱}^{۵}\frac{dx}{\sqrt{۲x-۱}}$

۲۰) $\int_{۰}^{۱}xe^{-x^{۲}}dx$

۲۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲}\theta\,d\theta$

۲۲) $\int_0^{\pi} \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

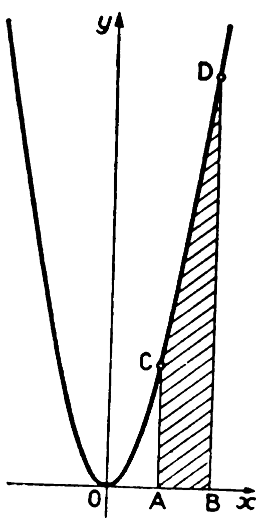
۲۳) $\int_{-1}^{2}\frac{x^2dx}{x+2}$

۲۴) $\int_0^{1}\frac{x^2dx}{x^2+1}$

۱٤۵- محاسبهٔ مساحت . - درشمارهٔ ۱٤۲ دیدیم که مساحت سطح محدود بین خم $y=\varphi(x)$ و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ با دستور

$$\text{مساحت}=\int_a^b y\,dx \qquad (B)$$

تعیین میشود. دراین دستور باید ، بااستفاده از معادلهٔ خم ، بجای y مقدارآن را بهصورت تابعی از x قرار داد .



شکل ۱۰٦

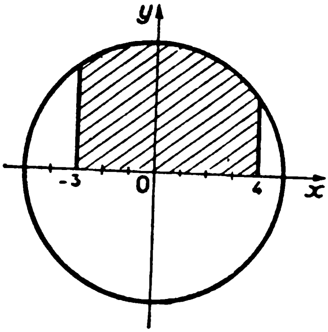
مثال ۱ - مساحتسطح محدود بین سهمی $y=x^2$ ومحور x ها ودوخط $x=2$ و $x=4$ را پیدا کنید (شکل ۱۰٦) .

حل - از دستور (B) استفاده میکنیم :

$$ABDC\ \text{مساحت}=\int_2^4 x^2dx$$

جواب : $=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$

مثال ۲- مساحتسطح محدود بین دایرهٔ $x^2+y^2=25$ ومحور x ها ودوخط $x=-3$ و $x=4$ را پیدا کنید (شکل ۱۰۷) .



شکل ۱۰۷

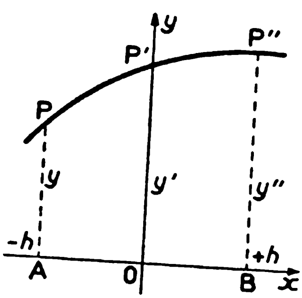
حل - مقدار y را از معادلهٔ دایره برحسب x پیدا میکنیم : $y=\sqrt{۲۵-x^۲}$. اکنون از دستور (B) استفاده مینماییم :

$$\text{مساحت}=\int_{-۳}^{٤}\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx=\left[\frac{x}{۲}\sqrt{۲۵-x^۲}+\frac{۲۵}{۲}\,arc\,sin\,\frac{x}{۵}\right]_{-۳}^{٤}$$

$$\text{جواب :}\quad =٦+\frac{۲۵}{۲}\,arc\,sin\,\frac{٤}{۵}+٦-\frac{۲۵}{۲}\,arc\,sin\left(-\frac{۳}{۵}\right)=۳۱{,}٦$$

این مساحت را با مساحت نصف دایره که برابر $۳۹{,}۳=\frac{۲۵\,\pi}{۲}$ است ، مقایسه کنید .

مثال ۳- محاسبهٔ مساحت سطح زیر یك سهمی که محور آن موازی محور y هاست . نقطهٔ P' را روی PP" که پاره قوسی از سهمی مورد نظر است طوری میگیریم که AO=OB باشد (شکل ۱۰۸) . عرض نقاط P و P' و P" را بترتیب y و y' و y" وطول پاره خط AB را ۲h مینامیم. نشان دهید که مساحت سطح محدود بین سهمی ومحور x ها و دوخط AP و BP" که موازی محور y ها هستند، برابر $\frac{h}{۳}(y+٤y'+y")$ است .



شکل ۱۰۸

حل - محور y ها را مار برنقطهٔ P' درنظر میگیریم . دراین صورت میتوانیم معادلهٔ سهمی را ، چون محور آن موازی محور y هاست ، به صورت زیر درآوریم :

$$y=ax^۲+۲bx+c \qquad (۱)$$

بنابر دستور (B) مساحت سطح خواسته شدهٔ $APP''B$ $(=u)$ برابر

$$u=\int_{-h}^{h}(ax^{2}+2bx+c)dx=\frac{2}{3}ah^{3}+2ch \qquad (2)$$

است . بنابر رابطهٔ (۱)

اگر $x=-h$ باشد ، $y=AP=ah^{2}-2bh+c$ است ،

و اگر $x=0$ باشد ، $y'=OP'=c$ است ،

و اگر $x=h$ باشد ، $y''=BP''=ah^{2}+2bh+c$ است .

بنابراین :
$$\frac{h}{3}(y+4y'+y'')=\frac{2}{3}ah^{3}+2ch=u$$

۱۴۶ - مساحت سطح زیر خمی که معادلات آن به صورت پارامتری داده شده است * . - فرض کنیم معادلات خم به صورت پارامتری زیر داده شده است :

$$x=f(t) \quad , \quad y=\varphi(t)$$

چون $y=\varphi(t)$ و $dx=f'(t)dt$ است ، داریم :

$$\text{مساحت}=\int_{a}^{b}y\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)f'(t)dt \qquad (1)$$

در انتگرال اخیر t_1 مقدار t به ازای $x=a$ و t_2 مقدار t به ازای $x=b$ است .

مثال - معادلات پارامتری بیضی به اقطار $2a$ و $2b$ عبارتند از (شمارهٔ ۸۱) :

$$x=a\cos\varphi \quad , \quad y=b\sin\varphi$$

مساحت این بیضی را حساب کنید .

* برای مطالعهٔ دقیق این مطلب باید به کتابهای مفصلتر آنالیز ریاضی مراجعه کرد .

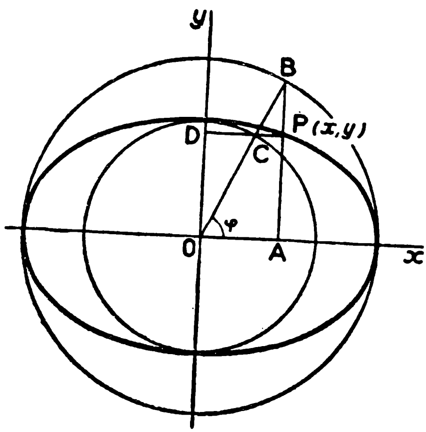
حل - دراین مثال $y = b\ sin\ \varphi$

و $dx = -a\ sin\ \varphi\ d\varphi$

است. آن ربع بیضی را که در ناحیهٔ اول واقع است درنظر میگیریم . وقتی $x = 0$ است ،
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ و وقتی $x = a$ است ، $\varphi = 0$ است . این مقادیر را در رابطهٔ (۱) میگذاریم ،
داریم :

$$\text{مساحت ربع بیضی} = \int_0^a y\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\ sin^2\varphi\ d\varphi = \frac{\pi ab}{4}$$

پس مساحت تمام بیضی برابر πab است .



شکل ۱۰۹

تمرین

۱) مثلثی رادرنظر میگیریم که بین محور x ها و دو خط $y = 2x$ و $x = 4$
محدود است . مساحت این مثلث را نخست با انتگرال معین و سپس با دستور نصف
حاصلضرب‌قاعده در ارتفاع حساب کنید و با مقایسهٔ دو نتیجه درستی‌جوابتان را بیازمایید.

۲) ذوزنقه‌ای را درنظر میگیریم که بین محور x ها و خطوط $x+y=۱۰$ و $x=۱$ و $x=۸$ محدود است. مساحت این ذوزنقه را نخست باانتگرال معین و سپس با دستور نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده حساب کنید و با مقایسهٔ دو نتیجه درستی جوابتان را بیازمایید .

درمسائل زیر مساحت سطحی راکه بین محور x ها و خم و خطوط داده شده محدود است ، پیداکنید :

۳) $y=x^۳$ و $x=۰$ و $x=۴$ جواب : ۶۴

۴) $y=۹-x^۲$ و $x=۰$ و $x=۳$ ۱۸

۵) $y=x^۳+۳x^۲+۲x$ و $x=-۳$ و $x=۳$ ۵۹

۶) $y=x^۲+x+۱$ و $x=۲$ و $x=۳$ $۹\frac{۵}{۶}$

۷) $xy=k^۲$ و $x=a$ و $x=b$ $k^۲ ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۸) $y=۲x+\frac{۱}{x^۲}$ و $x=۱$ و $x=۴$ $۱۵\frac{۳}{۴}$

۹) $y=\frac{۱۰}{\sqrt{x+۴}}$ و $x=۰$ و $x=۵$ ۲۰

۱۰) $ay=x\sqrt{a^۲-x^۲}$ و $x=۰$ و $x=a$ $\frac{۱}{۳}a^۲$

۱۱) $y^۲+۴x=۰$ و $x=-۱$ و $x=۰$

۱۲) $y^۲=۴x+۱۶$ و $x=-۲$ و $x=۰$

۱۳) $y=x^۲+۴x$ و $x=-۴$ و $x=-۲$

۱۴) $y=۴x-x^۲$ و $x=۱$ و $x=۳$

۱۵) $y^۲=۹-x$ و $x=۰$ و $x=۸$

۱۶) $۲y^۲=x^۳$ و $x=۰$ و $x=۲$

در مسائل زیر مساحت سطحی را که بین محور y ها و خم وخطوط داده شده محدود است ، حساب کنید :

۱۷) $y^۲=۴x$ و $y=۰$ و $y=۴$ جواب : $۵\frac{۱}{۳}$

۱۸) $y=۴-x^۲$ و $y=۰$ و $y=۳$ $۴\frac{۲}{۳}$

۱۹) $x=۹y-y^۳$ و $y=۰$ و $y=۳$

۲۰) $xy=۸$ و $y=۱$ و $y=۴$

۲۱) $y^۳=a^۲x$ و $y=۰$ و $y=a$

۲۲) $ay^۲=x^۳$ و $y=۰$ و $y=a$

خمهای زیر را رسم کنید و مساحت سطح یک طاق نما را پیدا نمایید :

۲۳) $y=۲\cos x$ جواب : ۴ ۲۴) $y=۲\sin\frac{\pi x}{۲}$ جواب : $\frac{۸}{\pi}$

۲۵) $y=\cos ۲x$ ۱ ۲۶) $y=\sin\frac{x}{۲}$ ۴

۲۷) مساحت سطح محدود بین محورهای مختصات وپاره سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ را حساب کنید .

۲۸) نشان دهید که مساحت یک قطعه از سهمی که باوتری عمود به محور سهمی جدا شده باشد دوسوم مساحت مستطیل محیط به آن است .

۲۹) P و Q دو نقطه از هذلولی متساوی‌الساقین $xy=k$ است . نشان دهید که مساحت سطح محدود بین قوس PQ و محور x ها و دو خط عمود به محور x ها و ماربر P و Q برابراست با مساحت سطح محدود بین قوس PQ و محور y ها ودو خط عمود به محور y ها ومار بر P و Q .

۳۰) مساحت سطح محدودبین منحنی زنجیر $y=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=-a$ را حساب کنید . جواب : $a^۲\left(e-\frac{۱}{e}\right)$

۳۱) مساحت سطح محدود بین دوسهمی $y^2=2px$ و $x^2=2py$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{4}{3}p^2$

۳۲) مساحت سطح محدود بین دو سهمی $y^2=ax$ و $x^2=by$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{ab}{3}$

۳۳) مساحت سطح داخل حلقهٔ خم نمایش $4y^2=x^2(4-x)$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{128}{15}$

۳۴) مساحت سطح محدود بین خم نمایش $y^2=x^2(x^2-1)$ و خط $x=2$ را حساب کنید .
جواب : $2\sqrt{3}$

۳۵) مساحت سطح داخل حلقهٔ خم نمایش $y^2=x^2(9-x)$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{648}{5}$

۳۶) مساحت سطح محدود بین خم نمایش $y^2=x^3-x^2$ و خط $x=2$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{32}{15}$

۳۷) مساحت سطح داخل حلقهٔ خم نمایش $y^2=x(x-2)^2$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{32}{15}\sqrt{2}$

۳۸) مساحت سطح داخل حلقهٔ خم نمایش $4y^2=x^4(4-x)$ را حساب کنید .
جواب : $\frac{2048}{105}$

۳۹) مساحت سطح محدود بین هذلولی $x^2-y^2=a^2$ و خط $x=2a$ را حساب کنید .
جواب : $a^2[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$

۴۰) مساحت سطح محدود بین هذلولی $x^2-4y^2=4$ و خط $x=6$ را حساب کنید .

۴۱) مساحت سطح محدود بین محور x ها و یک طاق نمای سیکلوئید $x=a(\theta-\sin\theta)$ ، $y=a(1-\cos\theta)$ را حساب کنید .
جواب : $3\pi a^2$

۴۲) مساحت کاردیوئید زیر را حساب کنید :

$$x=a(۲\cos t-\cos ۲t) \quad , \quad y=a(۲\sin t-\sin ۲t)$$

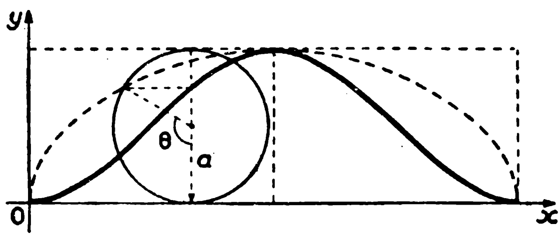
جواب : $۶\pi a^{۲}$

۴۳) خم نمایش معادلات پارامتری

$$x=a\theta \quad , \quad y=a(۱-\cos\theta)$$

را « همزاد سیکلوئید* » مینامند (شکل ۱۱۰). مساحت یک طاق‌نمای آن را پیدا کنید.

جواب : $۲\pi a^{۲}$



شکل ۱۱۰

۴۴) مساحت هیپوسیکلوئید زیر را پیدا کنید :

$$x=a\cos^{۳}\theta \quad , \quad y=a\sin^{۳}\theta$$

θ پارامتر است . جواب : $\frac{۳}{۸}\pi a^{۲}$

چنانکه می‌بینیم مساحت هیپوسیکلوئید $\frac{۳}{۸}$ مساحت دایرهٔ محیطی آن است .

۱۴۷ - نمایش هندسی انتگرال معین . - در شمارهٔ قبل انتگرال معین را بوسیلهٔ یک سطح نشان دادیم ، ولی این بدان معنی نیست که مقدار هرانتگرال معین مساحت یک سطح است زیرا تعبیر فیزیکی مقدار یک‌انتگرال به طبیعت کمیتهایی بستگی دارد که باطول و عرض نشان داده میشوند . بدین‌ترتیب اگر x و y مختصات سادهٔ یک نقطه ، و نه چیز دیگری ، باشند ، انتگرال (B) ی شمارهٔ ۱٤۵ برابر مساحت یک سطح است. اما اگر

* Companion to the cycloid

فرض کنیم که محورطولها محور زمان‌ومحور عرضها محورسرعتها باشد ، خم‌مرسوم‌منحنی‌سرعت حرکت‌است‌ودراین‌صورت‌سطح زیر خم مسافت‌پیموده شده‌را درفاصلهٔ زمانی‌نظیرنشان میدهد ، یعنی عددی که مساحت را نشان میدهد (مقدار انتگرال) برابر عددی است که مسافت را نشان میدهد .

به همین ترتیب هرانتگرال معینی‌را که اندازهٔ یک حجم ، یک سطح ، یک وزن ، ... یا یک نیرو را نشان میدهد ، میتوان ازنظر هندسی با یک سطح نشان داد .

۱۴۸- محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین-روش ذوزنقه .- اکنون به بیان دو

روش برای محاسبهٔ تقریبی

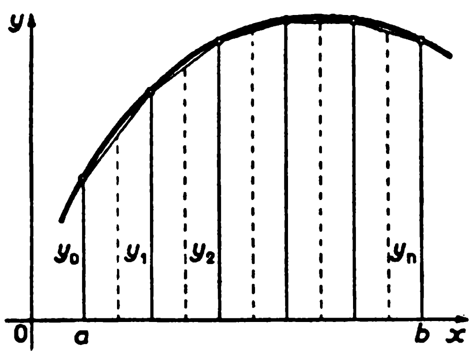
$$\int_a^b f(x)dx \qquad (۱)$$

میپردازیم . این روشها بخصوص وقتی بکار میروند که پیدا کردن انتگرال (۱) یا مشکل و یا غیر ممکن باشد .

مقدار عددی دقیق انتگرال (۱) برابر مساحت سطح محدود بین خم نمایش تابع

$$y=f(x) \qquad (۲)$$

و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ است . این سطح را میتوان بطور تقریب برابر مجموع ذوزنقه‌هایی دانست که به ترتیب زیر رسم میشوند :



شکل ۱۱۱

پاره خط ab واقع بر Ox را به n فاصلهٔ مساوی تقسیم میکنیم . هرفاصلهٔ جزئی را Δx و نقاط تقسیم را

$$x_0(=a)\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n(=b)$$

مینامیم و فرض میکنیم که عرض نظیر این طولها

$$y_0=f(x_0)\quad,\quad y_1=f(x_1)\ ,\ y_2=f(x_2)\ ,\ \dots\ ,\ y_n=f(x_n)$$

باشند . نقاط متوالی واقع برخم را به یکدیگر وصل میکنیم ، ذوزنقه‌هایی بدست میایند (شکل ۱۱۱) که مساحت آنها بترتیب عبارتند از :

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ اول}=\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x$$

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ دوم}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x$$

. . . .

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ } n \text{ ام}=\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

این مقادیر را بهم میفزاییم ، **دستور ذوزنقه** بدست میاید :

$$\text{مساحت}=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\Delta x \qquad (T)$$

روشن است که هرچه عدهٔ فاصله‌های جزئی بیشتر باشد (یعنی هرچه Δx کوچکتر باشد) ، مجموع مساحت ذوزنقه‌ها به مقدار انتگرال نزدیکتر است .

مثال ۱ - مقدار تقریبی انتگرال $\int_1^{12} x^2dx$ را پس از تقسیم فاصلهٔ $[1\ ,\ 12]$ به یازده قسمت مساوی با دستور ذوزنقه حساب کنید .

حل - دراین مثال $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{12-1}{11}=1$ وسطح مورد نظر واقع در زیرخم $y=x^2$ است . اگر به x مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۱۲ بدهیم ، برای y مقادیر ۱ ، ۴ ، ۹ ، ... ، ۱۴۴ بدست میایند . پس بنابر دستور (T)

$$\text{مساحت}=\left(\frac{۱}{۲}+۴+۹+۱۶+۲۵+۳۶+۴۹+۶۴+۸۱\right.$$

$$\left.+۱۰۰+۱۲۱+\frac{۱۴۴}{۲}\right)\times ۱=۵۷۷٫۵$$

اگر انتگرال را مستقیماً حساب کنیم :

$$\int_{۱}^{۱۲} x^{۲}dx=\left[\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{۱}^{۱۲}=۵۷۵\ \frac{۲}{۳}$$

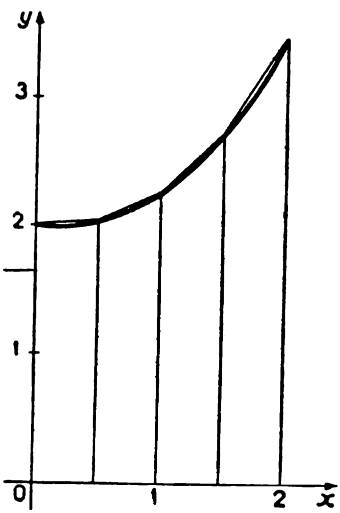
دراین مثال خطایی که براثر بکار بردن دستور ذوزنقه پیش آمده است ، از یک سوم درصد کمتر است .

مثال ۲ - n را ۴ بگیرید و مقدار تقریبی انتگرال $I=\int_{۰}^{۲}\sqrt{۴+x^{۲}}\,dx$ را با دستور (T) حساب کنید .

حل - مینویسیم $y=\sqrt{۴+x^{۲}}$.

بنابر فرض $\Delta x=۰٫۵$ است . جدول زیر را برای مقادیر نظیر x و y تشکیل میدهیم :

x	y
۰	$۲٫۰۰۰=y_{۰}$
۰٫۵	$۲٫۰۳۱=y_{۱}$
۱	$۲٫۲۳۶=y_{۲}$
۱٫۵	$۲٫۷۱۶=y_{۳}$
۲	$۳٫۴۶۴=y_{۴}$



شکل ۱۱۲

بنابر دستور (T) :

جواب : $I=(۱٫۰۰۰+۲٫۰۳۱+۲٫۲۳۶+۲٫۷۱۶+۱٫۷۳۲)\times ۰٫۵=۴٫۸۵۸$

اگر n را ۱۰ بگیریم ، مقدار دقیقتر $I=۴٫۸۲۶$ بدست میاید .

تمرین

مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را نخست با دستور ذوزنقه و سپس مستقیماً حساب کنید و دو جواب را با یکدیگر مقایسه نمایید :

۱) $\int_{3}^{10} \frac{dx}{x}$ ، $n=7$

۲) $\int_{0}^{5} x\sqrt{25-x^2}\,dx$ ، $n=10$

۳) $\int_{4}^{8} \sqrt{64-x^2}\,dx$ ، $n=8$

۴) $\int_{0}^{3} \sqrt{16+x^2}\,dx$ ، $n=6$

مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را با دستور ذوزنقه حساب کنید :

۵) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$ ، $n=4$ — جواب : ۱٫۲۲۷

۶) $\int_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ ، $n=4$ — ۳٫۲۸۳

۷) $\int_{0}^{10} \sqrt[3]{125-x^2}\,dx$ ، $n=5$ — ۴۴٫۱۷

۸) $\int_{1}^{5} \sqrt{126-x^3}\,dx$ ، $n=4$ — ۳۴٫۷۸

۹) $\int_{2}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$ ، $n=6$ — ۹٫۴۷

۱۰) $\int_{-2}^{3} \sqrt{20+x^4}\,dx$ ، $n=5$

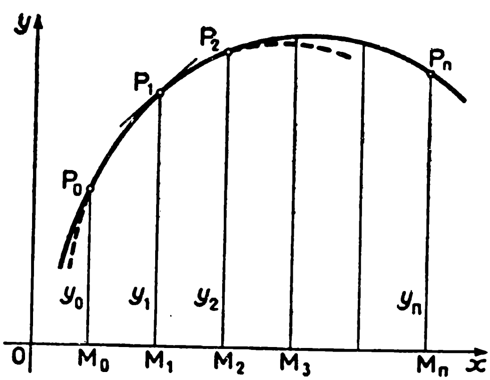
۱۱) $\int_{0}^{2} x^2\sqrt{16-x^4}\,dx$ ، $n=4$

۱۲) $\int_{1}^{6} \sqrt[3]{x^2+3x}\,dx$ ، $n=5$

۱۳) $\int_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{10+x^3}}$ ، $n=6$

۱۴) $\int_{2}^{4} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{10+x^2}}$ ، $n=4$

۱۴۹- روش سمپسون * (روش سهمی) . - بجای آنکه نقاط متوالی خم را بیکدیگر وصل کنیم وبجای پاره قوس‌های خم و ترها را درنظر بگیریم‌و دستور ذوزنقه را بدست آوریم ، میتوانیم بجای هرپاره قوس ازخم پاره قوسی از یک سهمی قرار دهیم وسطح زیر پاره قوس های اخیر را با هم جمع کنیم. دراین صورت جواب دقیقتری بدست میاید .



شکل ۱۱۳

به هرسه‌نقطهٔ متوالی از خم یک سهمی مرور میدهیم که محور آن موازی محور y ها باشد . روشن است که‌رشتهٔ‌قوسهای‌اخیربمراتب به خم دادشده‌نزدیکتراست تا خط شکستهٔ محاطی حاصل از و ترها. معادلهٔ هریک از این سهمی‌ها به صورت معادلهٔ (۱) مثال ۳ ی

* Simpson's rule

شمارهٔ ۱۴۵ است. مقادیر ثابت a و b و c را باید طوری‌تعیین کرد که هرسهمی‌ازسه نقطهٔ متوالی بگذرد. لکن در روش مورد بحث پیدا کردن a و b و c لازم نیست.

فاصلهٔ از $x=a=OM_{۰}$ تا $x=b=OM_n$ را به n قسمت مساوی تقسیم میکنیم(n زوج)وهرفاصلهٔ جزئی را $\triangle x$ مینامیم. برهرسه نقطهٔ متوالی $P_{۰}$ ، $P_{۱}$ ، $P_{۲}$ و $P_{۲}$ ، $P_{۳}$ ، $P_{۴}$ و ... یک سهمی با محور قائم مرور میدهیم (شکل ۱۱۳) وعرض این نقاط را $y_{۰}$ ، $y_{۱}$ ، $y_{۲}$ ، ... ، y_n مینامیم. بدین‌ترتیب مجموعه‌ای از «نوارهای مضاعف سهمی» مانند $M_{۰}P_{۰}P_{۱}P_{۲}M_{۲}$ که از سمت بالا محدود به پاره قوسی از یک سهمی به معادلهٔ(۱) مثال۳ی شمارهٔ ۱۴۵ است، جانشین‌سطح $M_{۰}P_{۰}P_{۱}P_{۲} \dots P_nM_n$ میشود. مساحت سطح هریک از این نوارهای مضاعف بنابر مثال مذکور بادستور زیر بدست میاید:

$$u=\frac{h}{۳}\,(y+۴y'+y'')$$

دراولین نوار$h=\triangle x$ ، $y=y_{۰}$ ، $y'=y_{۱}$ و $y''=y_{۲}$ است. پس

مساحت سطح اولین نوارسهمی $M_{۰}P_{۰}P_{۱}P_{۲}M_{۲}=\frac{\triangle x}{۳}(y_{۰}+۴y_{۱}+y_{۲})$

به همین ترتیب مساحت سطح دومین نوار (مضاعف) $=\frac{\triangle x}{۳}(y_{۲}+۴y_{۳}+y_{۴})$

مساحت سطح سومین نوار (مضاعف) $=\frac{\triangle x}{۳}(y_{۴}+۴y_{۵}+y_{۶})$

. . . .

مساحت سطح آخرین نوار (مضاعف) $=\frac{\triangle x}{۳}(y_{n-۲}+۴y_{n-۱}+y_n)$

این مساحتهای جزئی را باهم جمع میکنیم، **دستور سمپسون** بدست میاید (n زوج):

$$\text{مساحت}=\frac{\triangle x}{۳}\,(y_{۰}+۴y_{۱}+۲y_{۲}+۴y_{۳}+۲y_{۴}+\cdots+y_n) \qquad \text{(S)}$$

دراینجا نیز، مانند روش ذوزنقه، هرچه تعداد تقسیمات بیشتر باشد، نتیجه‌ای که بدست میاید به مساحت سطح زیر خم نزدیکتر است.

مثال ۱ - مقدارتقریبی انتگرال $\int_{\cdot}^{۱۰} x^۳dx$ را پس‌از تقسیم فاصلهٔ [۰,۱۰] به ده قسمت مساوی با دستور (S) حساب کنید .

حل - دراینجا $\Delta x = ۱ = \frac{۱۰-۰}{۱۰} = \frac{b-a}{n}$ و سطح مورد نظر سطح زیر خم $y=x^۳$ است . طولهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... ، ۱۰ را در $y=x^۳$ میگذاریم ، عرضهای ۰ ، ۱ ، ۸ ، ۲۷ ، ... ، ۱۰۰۰ بدست میایند . پس بنابر دستور (S) :

$$مساحت = \frac{۱}{۳}(۰+۴+۱۶+۱۰۸+۱۲۸+۵۰۰+۴۳۲+۱۳۷۲$$
$$+۱۰۲۴+۲۹۱۶+۱۰۰۰) = ۲۵۰۰$$

اگر انتگرال مذکور را مستقیماً حساب کنیم :

$$\int_{\cdot}^{۱۰} x^۳dx = \left[\frac{۱}{۴}x^۴\right]_{\cdot}^{۱۰} = ۲۵۰۰$$

می بینیم دراین مثال دستور سمپسون مقدار دقیق انتگرال را میدهد .

مثال ۲ - مقدار تقریبی انتگرال $I = \int_{\cdot}^{۲} \sqrt{۴+x^۳}\, dx$ را پس‌از تقسیم فاصلهٔ [۲ , ۰] به چهار قسمت مساوی با دستور (S) حساب کنید .

حل - جدول مقادیر تابع زیر علامت انتگرال در مثال ۲ ی شمارهٔ قبل داده شده است ، پس :

$$I = (۲٫۰۰۰ + ۸٫۱۲۴ + ۴٫۴۷۲ + ۱۰٫۸۶۴ + ۳٫۴۶۴) \times \frac{۰٫۵}{۳} = ۴٫۸۲۱$$

این مقدار به ۴٫۸۲۶ یعنی به مقداری که دستور(T) به ازای $n = ۱۰$ میدهد بسیار نزدیک است . پس اگر n را ۴ بگیریم ، دستور (S) مقدار تقریبی بهتری برای انتگرال میدهد تا دستور (T) .

تمرین

مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را نخست با دستور سمپسون و سپس مستقیماً حساب کنید و دو جواب را با یکدیگر مقایسه نمایید :

۱) $\int_{۳}^{٦} \frac{x\,dx}{٤+x^{۲}}$; $n=٦$ ۲) $\int_{۰}^{٤} x\sqrt{۲٥-x^{۲}}\,dx$; $n=٤$

۳) $\int_{۲}^{۸} \sqrt{٦٤-x^{۲}}\,dx$; $n=٦$ ٤) $\int_{٤}^{۷} \sqrt{۱٦+x^{۲}}\,dx$; $n=٦$

مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را با دستور سمپسون حساب کنید :

٥) $\int_{۰}^{٤} \frac{dx}{\sqrt{٤+x^{۲}}}$; $n=٤$ جواب : ۱٫۲۳٦

٦) $\int_{۰}^{۲} \sqrt{۱+x^{۳}}\,dx$; $n=٤$ ۳٫۲۳۹

۷) $\int_{۱}^{٥} \sqrt{۱۲٦-x^{۳}}\,dx$; $n=٤$ ۳٥٫٦۸

۸) $\int_{۲}^{۸} \frac{x\,dx}{\sqrt[۳]{٤+x^{۲}}}$; $n=٦$ ۹٫٤۹

۹) $\int_{۱}^{٥} \sqrt[۳]{٦+x^{۲}}\,dx$; $n=٤$ ۱۰) $\int_{۲}^{٥} \frac{x^{۳}dx}{\sqrt{۱+x^{۳}}}$; $n=٦$

۱۱) $\int_{۱}^{٥} \sqrt[۳]{x^{۳}-x}\,dx$; $n=٤$ ۱۲) $\int_{۲}^{٤} \frac{x\,dx}{\sqrt{٥+x^{۳}}}$; $n=٤$

نخست مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را با دستورهای ذوزنقه و سمپسون و سپس مقدار دقیق آنها را با استفاده از انتگرال نامعین هریک از آنها (درصورت امکان) بدست آورید :

۱۳) $\int_{2}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx \;;\; n=4$ ۱۴) $\int_{2}^{4} x\sqrt{16-x^2}\, dx \;;\; n=4$

۱۵) $\int_{3}^{7} \frac{8\, dx}{\sqrt{64-x^2}} \;;\; n=4$ ۱۶) $\int_{3}^{7} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}} \;;\; n=4$

۱۷) $\int_{2}^{8} \frac{x\, dx}{\sqrt{3+x^3}} \;;\; n=6$ ۱۸) $\int_{0}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;;\; n=4$

۱۹) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10\, d\theta}{\sqrt{2+\sin^2\theta}} \;;\; n=6$ ۲۰) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-\cos^2\theta}\, d\theta \;;\; n=6$

۲۱) $\int_{0}^{2} \frac{10\, d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi\theta}{4}}} \;;\; n=4$

۲۲) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{4-3\sin^2\pi\theta}\, d\theta \;;\; x=8$

۱۵۰- تعویض حدود . - چون

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a)$$

و

$$\int_{b}^{a} \varphi(x)dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)]$$

پس

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = -\int_{b}^{a} \varphi(x)dx$$

قضیه - اگر جای حدود انتگرال معین را عوض کنیم ، علامت جلو انتگرال عوض میشود .

۱۵۱- تجزیهٔ فاصلهٔ انتگرال‌گیری در انتگرال معین . - چون

$$\int_{a}^{x_1} \varphi(x)dx = f(x_1) - f(a) \qquad (a < x_1 < b)$$

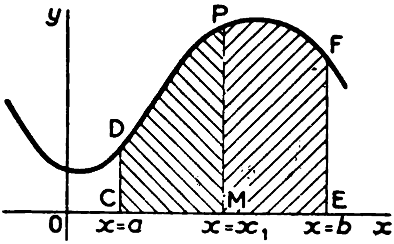
و
$$\int_{x_1}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(x_1)$$

بنابراین
$$\int_{a}^{x_1} \varphi(x)dx + \int_{x_1}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a)$$

اما
$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a)$$

چون طرف راست دو تساوی اخیر یکی است ، پس

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = \int_{a}^{x_1} \varphi(x)dx + \int_{x_1}^{b} \varphi(x)dx \qquad (C)$$



شکل ۱۱۴

تعبیر هندسی این قضیه ، مانند شمارهٔ ۱۴۲ ، بدین قرار است که انتگرال‌طرف چپ مساحت تمام سطح CEFD ، نخستین انتگرال طرف‌راست مساحت‌سطح CMPD ودومین انتگرال طرف راست مساحت سطح MEFP را نشان میدهد . بنابراین صحت قضیه مسلم است و از این راه میتوان انتگرال معین را به یک عده انتگرال معین جزئی تجزیه کرد .

۱۵۲ـ انتگرال معین تابعی ازحدودآن است. ـ چنانکه از تساوی

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = f(b) - f(a)$$

برمیاید ، انتگرال معین تابعی از حدود آن است . بنابراین $\int_{a}^{b} \varphi(z)dz$ نیز درست همان مقدار $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ را دارد .

قضیه ـ انتگرال معین تابعی از حدودآن است .

۱۵۳ـ تعمیم انتگرال معین ـ وقتی که حدود بینهایت اند . ـ تاکنون

انتگرالهای معینی‌راحساب کرده‌ایم که حدودآنها اعداد معینی بوده‌اند ، اما گاهی درمسائل ساده نیز لازم است این قید را حذف کنیم و انتگرالهایی با حدود بینهایت درنظر بگیریم . برای محاسبهٔ این نوع انتگرالها به ذکر **تعریفهای** زیر میپردازیم :

وقتی حد بالا بینهایت است :

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)dx$$

و وقتی حد پایین بینهایت است :

$$\int_{-\infty}^b \varphi(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b \varphi(x)dx$$

بشرط آنکه دو حد سمت راست وجود داشته باشند .

مثال ۱- انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ را حساب کنید .

حل- $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

جواب : $$= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = 1$$

مثال ۲- انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}$ را حساب کنید .

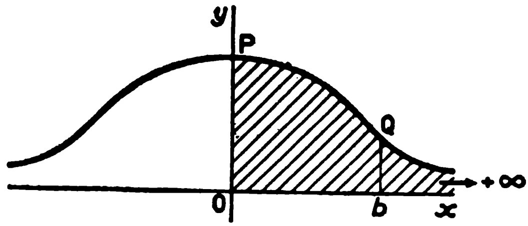
حل- $$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[4a^2 \, arc\, tg \frac{x}{2a}\right]_0^b$$

جواب : $$= \lim_{b\to+\infty} \left[4a^2 \, arc\, tg \frac{b}{2a}\right] = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2$$

اکنون به بیان تعبیر هندسی این مثال میپردازیم .

خم نمایش تابع
$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$
در شکل ۱۱۰ رسم شده است .



شکل ۱۱۰

$$\text{OPQb مساحت سطح} = \int_0^b \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = 4a^2 \mathit{arc\ tg}\ \frac{b}{2a}$$

وقتی خط قائم bQ از طرف‌راست بینهایت دور شود ، مساحت سطح OPQb بسمت حد معین $2\pi a^2$ میل میکند .

مثال ۳ - انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ را حساب کنید .

حل - $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b)$$

وقتی b بسمت بینهایت میل میکند ، $\ln b$ حد ندارد ، پس انتگرال در این حالت معنی ندارد .

۱۵۴ - تعمیم انتگرال معین - وقتی $y=\varphi(x)$ منفصل است . - اکنون حالتی را درنظر میگیریم که تابع زیر علامت انتگرال به ازای یک یا چند مقدار از فاصلهٔ انتگرال گیری منفصل است .

نخست حالتی را درنظر میگیریم که تابع زیر علامت انتگرال در تمام نقاط فاصلهٔ انتگرال گیری متصل و تنها در نقطهٔ $x=a$ منفصل است .

اگر $a<b$ باشد ، عدد مثبت و کوچکی مانند ε اختیار میکنیم و **تعریف** زیر را بکار میبریم :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)dx \qquad (۱)$$

به همین طریق وقتی $\varphi(x)$ جز در نقطهٔ $x=b$ پیوسته است ، این تعریف را بکار میبریم :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)dx \qquad (۲)$$

بشرط آنکه دو حد سمت راست وجود داشته باشند .

مثال ۱- انتگرال $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ را حساب کنید .

حل - دراینجا $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ به ازای $x=a$ بینهایت میشود ، پس بنابر (۲)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon}$$

جواب : $= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

مثال ۲- انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ را حساب کنید .

حل- دراینجا $\frac{1}{x^2}$ به ازای $x=0$ بینهایت میشود ، پس بنابر (۱)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

دراین مثال مقدار سمت راست حد ندارد ، بنابراین انتگرال وجود ندارد .

اگر c عددی بین a و b و تابع $\varphi(x)$ به ازای جمیع مقادیر فاصلهٔ $[a , b]$ جز $x=c$ متصل باشد ، انتگرال از a تا b به این ترتیب **تعریف** میشود :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b \varphi(x)dx \qquad (۳)$$

بشرط آنکه هریک از دو حد اخیر وجود داشته باشد (ε و ε' اعدادی کوچک و مثبتند) .

مثال ۳- انتگرال $\int_{0}^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$ را حساب کنید .

حل - دراینجا تابع زیر علامت انتگرال به ازای $x=a$ ، که عددی بین دو حد انتگرال، یعنی بین ۰ و $3a$ است ، منفصل است . پس باید از تعریف (۳) استفاده کرد :

$$\int_{0}^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{a-\varepsilon} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_{0}^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_{a+\varepsilon'}^{3a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2} + 3a^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2} \right]$$

جواب : $=3a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{2}{3}}=9a^{\frac{2}{3}}$

برای تعبیر هندسی این مثال خم نمایش تابع

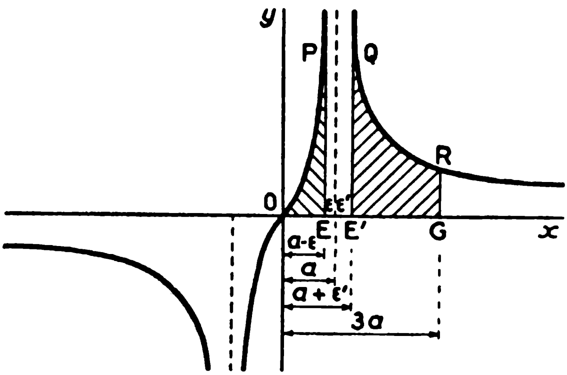
$$y=\frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

را رسم میکنیم و توجه مینماییم که خط $x=a$ یک مجانب خم[۴] است .

$$\text{OPE مساحت سطح} = \int_{0}^{a-\varepsilon} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2} + 3a^{\frac{2}{3}}$$

وقتی PE بسمت راست حرکت کند و سرانجام برمجانب منطبق شود ، بدان میماند که ε بسمت صفر میل کند . در این صورت سطح OPE بسمت حدش $۳a^{\frac{۲}{۳}}$ میل میکند. به همین ترتیب

$$E'QRG \text{ مساحت سطح } = \int_{a+\varepsilon'}^{۳a} \frac{۲x\,dx}{(x^۲-a^۲)^{\frac{۲}{۳}}} = ۳\sqrt[۳]{۸a^۲} - ۳\sqrt[۳]{(a+\varepsilon')^۲-a^۲}$$



شکل ۱۱۶

وقتی QE' بسمت چپ حرکت کند وسرانجام برمجانب منطبق‌شود ، ε' بسمت صفرمیل میکند و مساحت سطح اخیر بسمت $٦a^{\frac{۲}{۳}}$ میل مینماید . مساحت این دوسطح جزئی را بهم میفزاییم ، مساحت خواسته شده ، $۹a^{\frac{۲}{۳}}$ ، بدست میاید .

مثال ٤- انتگرال $\int_{۰}^{۲a} \frac{dx}{(x-a)^۲}$ را حساب کنید .

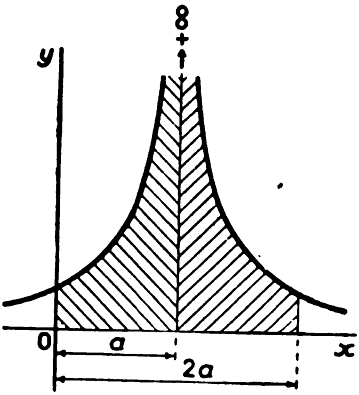
حل - این تابع نیز به ازای یک مقدار از فاصلهٔ انتگرال گیری بینهایت میشود .

پس بنابر (۳)

$$\int_{\cdot}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon \to \cdot} \int_{\cdot}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\varepsilon' \to \cdot} \int_{a+\varepsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \cdot} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{\cdot}^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to \cdot} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\varepsilon'}^{2a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \cdot} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a} \right) + \lim_{\varepsilon' \to \cdot} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon'} \right)$$



شکل ۱۱۷

دراین مثال هیچیک ازدومقدار طرف راست حد ندارد ، لذا انتگرال معنی ندارد .

اگر خم نمایش تابع زیر علامت انتگرال را رسم کنیم (شکل ۱۱۷) ، چیزی شبیه به آنچه در مثال قبل داشتیم ، بدست میاید. اما دراین مثال دو حد وجود ندارند و این بدان معنی است که مساحت سطح سایه‌دار نامحدود است. پس باید قبل‌از محاسبهٔ انتگرال ببینیم که آیا تابع زیر علامت انتگرال در فاصلهٔ انتگرال گیری بینهایت میشود یا نه . اگر تابع زیر علامت انتگرال در فاصلهٔ انتگرال گیری بینهایت شود ، نمیتوان انتگرال را مستقیماً حساب کرد ، زیرا در این صورت معمولاً نتیجهٔ بی‌معنی و یا غلطی بدست میاید ، مثلاً در مثال‌اخیر :

$$\int_{\cdot}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{\cdot}^{2a} = -\frac{2}{a}$$

تمرین

انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۱) $\int_{\cdot}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}$ ۲) $\int_{\cdot}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$

٣) $\int_{1}^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}}=\frac{44}{3}$

٤) $\int_{0}^{a} \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi a^2}{4}$

٥) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

٦) $\int_{a}^{2a} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=2.39a^2$

نشان دهید که انتگرالهای زیر وجود ندارند :

٧) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

٨) $\int^{2} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$

٩) $\int_{a}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

١٠) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{4}{3}}}$

فصل پانزدهم

انتگرال گیری معین یك عمل جمع است

۱۵۵- مقدمه . - ما تاکنون حساب انتگرال را به منزلهٔ **عمل معکوس حساب دیفرانسیل** تعریف کرده‌ایم . اما در بسیاری از موارد استعمال حساب انتگرال بهتر است آن‌را **یك عمل جمع** بدانیم. حساب انتگرال در واقع برای محاسبهٔ مساحت سطح محدود بین خمها ابداع شده است . بدین منظور «سطح داده شده را به بینهایت قسمت بینهایت کوچك به نام **جزء** تقسیم میکنند . مجموع تمام این اجزا مساحت سطح مورد نظر است» . از نظر تاریخی علامت انتگرال گیری S* طویل شده‌ای است که مؤلفین پیشین آن را برای نشان دادن حاصل جمع بکار برده‌اند .

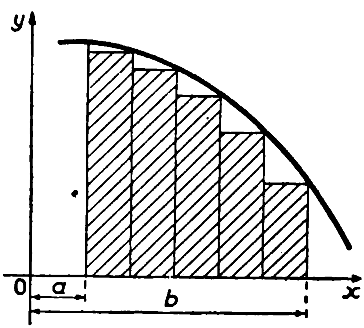
این تعریف جدید که در شمارهٔ بعد بیان شده است اهمیت اساسی دارد ودانشجو باید مفهوم آن را کاملاً درك کند تا بتواند در مسائل عملی از حساب انتگرال استفاده نماید.

۱۵۶- قضیهٔ اساسی حساب انتگرال . - در شمارهٔ ۱۴۲ دیده‌ایم که اگر $\varphi(x)$ مشتق $f(x)$ باشد ، مقدار انتگرال معین

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(b) - f(a) \qquad (۱)$$

مساحت‌سطح محدود بین خم $y=\varphi(x)$ ومحور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ را میدهد .

اکنون تقسیم بندی خاص زیر را در نظر میگیریم . فاصلهٔ از $x=a$ تا $x=b$ را به n فاصلهٔ جزئی مساوی تقسیم میکنیم . از نقاط تقسیم عمودهایی اخراج مینماییم . این خطوط خم را در $n-۱$ نقطه قطع میکنند . از نقاط اخیر و نقطهٔ نظیر به $x=b$ خطوطی موازی

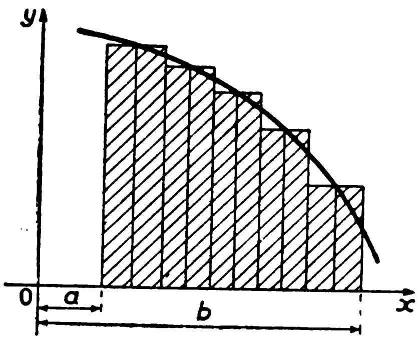


شکل ۱۱۸

* حرف اول Somme فرانسوی و sum انگلیسی . مترجم

محور x ها رسم میکنیم ، مستطیلهایی بدست میایند (شکل ۱۱۸) . روشن است که مجموع مساحتهای این n مستطیل (سطح سایه‌دار) مقدار تقریبی مساحت سطح مورد نظر است . نیز بدیهی است که **حد** مجموع مساحتهای این n مستطیل ، وقتی عدهٔ آنها ، یعنی n ، بینهایت زیاد شود ، **برابر** مساحت سطح زیر خم است .

اکنون تقسیم‌بندی عمومی‌تری را درنظر میگیریم . فاصلهٔ [a , b] را به n فاصلهٔ جزئی دلخواه تقسیم میکنیم واز نقاط تقسیم عمودهایی اخراج مینماییم . در هرفاصلهٔ جزئی نقطهٔ دلخواهی انتخاب میکنیم و از این نقاط عمودهایی اخراج مینماییم و از انتهای این عمودها (نقاط واقع برخم) خطوطی افقی رسم میکنیم تا مستطیلهایی مانندشکل ۱۱۹ بدست آیند . مجموع مساحتهای این n مستطیل (سطح سایه‌دار) ، مانند قبل ، مقدار تقریبی مساحت سطح زیرخم استو **حد این مجموع** ، وقتی n بینهایت زیاد شود و هرفاصلهٔ جزئی بسمت صفر میل کند ، مقدار دقیق مساحت سطح زیر خم است. این ملاحظات نشان میدهند که انتگرال معین (۱) را میتوان به منزلهٔ **حد یك مجموع** درنظرگرفت . مطالب مذکور را به صورت زیر خلاصه میکنیم :



شکل ۱۱۹

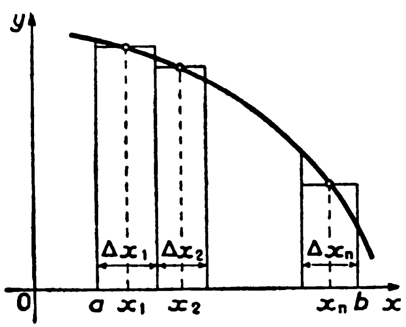
الف ـ درازای فاصله‌های جزئی متوالی را

$\Delta x_1 , \Delta x_2 , \Delta x_3 , \ldots , \Delta x_n$

ب ـ و طول نقاط انتخاب شده در فاصله‌های جزئی را

$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$

مینامیم . عرض خم در این نقاط عبارتند از



شکل ۱۲۰

$$\varphi(x_1)\ ,\ \varphi(x_2)\ ,\ \varphi(x_3)\ ,\ \dots\ ,\ \varphi(x_n)$$

پ ـ روشن است که مساحت مستطیلهای متوالی برابر

$$\varphi(x_1)\Delta x_1\ ,\ \varphi(x_2)\Delta x_2\ ,\ \varphi(x_3)\Delta x_3\ ,\ \dots\ ,\ \varphi(x_n)\Delta x_n$$

ت ـ و مساحت سطح زیر خم برابر

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\varphi(x_3)\Delta x_3+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n]$$

است . اما بنابر تساوی (۱) مساحت سطح زیر خم برابر $\int_a^b \varphi(x)dx$ و لذا

$$(A)\quad \int_a^b \varphi(x)dx=\lim_{n\to\infty}[\varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n]$$

است . این معادله بنابر مقایسه و تساوی دو سطح بدست آمد و تدوین نتیجهٔ مذکور با کمک الهام میسر گردید . اکنون تساوی (A) را **به عنوان یك قضیهٔ آنالیز** درنظر میگیریم و آن را به صورت زیر بیان میکنیم :

قضیهٔ اساسی حساب انتگرال

فرض میکنیم $\varphi(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,b]$ پیوسته است . این فاصله را به n فاصلهٔ‌جزئی به‌درازاهای Δx_1 ، Δx_2 ، ... ، Δx_n تقسیم میکنیم ، درهر فاصلهٔ‌جزئی یك نقطه انتخاب مینماییم ، طول آنها را x_1 ، x_2 ، ... ، x_n مینامیم و مجموع زیر را درنظر میگیریم :

$$(۲)\qquad \varphi(x_1)\Delta x_1+\varphi(x_2)\Delta x_2+\cdots+\varphi(x_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i$$

حد این مجموع ، وقتی n بسمت بینهایت و درازای هرفاصلهٔ جزئی بسمت صفر میل کند ، برابر مقدار انتگرال معین زیر است

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

معادلهٔ (A) را میتوان به صورت خلاصهٔ زیر نوشت :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i \qquad (۳)$$

اهمیت این قضیه در آن است که **میتوان با استفاده از آن اندازهٔ هر کمیتی راکه حد یك مجموع به صورت (۲) است ، با انتگرال‌گیری بدست‌آورد .**

یادآور میشویم که هرجمله‌ازمجموع (۲) که یک **جزء انتگرال** نامیده میشود، یک دیفرانسیل است‌زیرا طولهای Δx_1 ، Δx_2 ، ... ، Δx_n بسمت صفرمیل میکنند.

قاعدهٔ زیر دستورالعملی برای بکار بستن قضیهٔ مذکور در مسائل عملی است .

قضیهٔ اساسی ـ قاعده

عمل اول - کمیت مورد نظر را به اجزای همانندی چنان تقسیم میکنیم که حد مجموع اجزاء بروشنی همان مقدار خواسته شده باشد .

عمل دوم - متغیر مناسبی طوری انتخاب میکنیم که مقدار هرجزء به صورت $\varphi(x)\Delta x$ بیان شود .

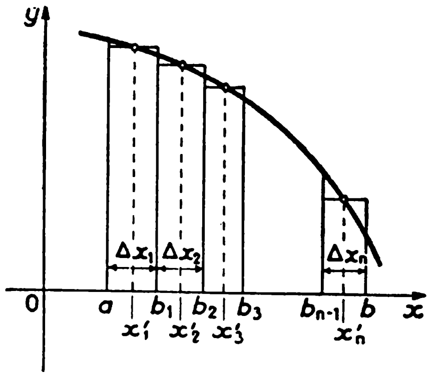
عمل سوم - حدود $x=a$ و $x=b$ را تعیین میکنیم و قضیهٔ اساسی را بکار میبریم :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \varphi(x)dx$$

و انتگرال‌آن را حساب میکنیم .

۱۵۷- اثبات تحلیلی قضیهٔ اساسی . ـ مانند شمارهٔ قبل فاصلهٔ [a , b] را به

n فاصلهٔ جزئی دلخواه تقسیم میکنیم و طول نقاط تقسیم را b_1 ، b_2 ، ... ، b_{n-1} و درازای فاصله‌های جزئی را Δx_1 ، Δx_2 ، ... ، Δx_n مینامیم . در هرفاصلهٔ جزئی نقطه‌ای‌را انتخاب میکنیم که در دستور میانه (شمارهٔ ۱۱۶) صدق کند . این نقاط را بترتیب x'_1 ، x'_2 ، ... ، x'_n مینامیم ، از آنها عمودهایی اخراج میکنیم و از انتهای این عمودها خطوطی افقی رسم مینماییم تا مستطیلهایی مانند شکل ۱۲۱ تشکیل شوند. یادآور میشویم که دراینجا $\varphi(x)$ بجای $f'(x)$ است. دستور (B) ی شمارهٔ ۱۱۶ را برای اولین فاصله بکار میبندیم ($a=a$ ، $b=b_1$ و x'_1 بین a و b_1) ، داریم :



شکل ۱۲۱

$$\frac{f(b_1)-f(a)}{b_1-a}=\varphi(x'_1)$$

و چون
$$b_1-a=\Delta x_1$$

پس
$$f(b_1)-f(a)=\varphi(x'_1)\Delta x_1$$

به همین ترتیب برای دومین فاصله
$$f(b_2)-f(b_1)=\varphi(x'_2)\Delta x_2$$

برای سومین فاصله
$$f(b_3)-f(b_2)=\varphi(x'_3)\Delta x_3$$

. . . .

برای n امین فاصله
$$f(b)-f(b_{n-1})=\varphi(x'_n)\Delta x_n$$

دو طرف این تساویها را باهم جمع میکنیم :

$$f(b)-f(a)=\varphi(x'_1)\Delta x_1+\varphi(x'_2)\Delta x_2+\cdots+\varphi(x'_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

اما
$$\varphi(x'_1)\Delta x_1=\text{مساحت اولین مستطیل}$$

$\varphi(x'_2)\triangle x_2 =$ مساحت دومین مستطیل

. . . .

بنابراین مجموع طرف راست (۱) برابر مجموع مساحت مستطیلهاست . اما بنابر رابطهٔ (۱) شمارهٔ ۱۵۶ ، طرف‌چپ (۱) برابر سطح بین خم $y=\varphi(x)$ ومحور x ها و دوخط $x=a$ و $x=b$ است . پس مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x'_i)\triangle x_i \tag{۲}$$

برابر مساحت این سطح است . مجموع نظیر به

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\triangle x_i \tag{۳}$$

(که در آن x_i طول یک نقطهٔ **دلخواه** ازفاصلهٔ جزئی $\triangle x_i$ است و مقدار آن از راه شمارهٔ قبل بدست میاید) این مساحت را نمیدهد ، اما نشان میدهند که وقتی n بسمت بینهایت و درازاهای فواصل جزئی بسمت صفر میل کنند ، حاصل جمع های (۲) و (۳) بسمت یک مقدار میل مینمایند . زیرا $|\varphi(x_i)-\varphi(x'_i)|$ از تفاضل بزرگترین و کوچکترین عرض در فاصلهٔ $\triangle x_i$ بزرگتر نیست . از طرف دیگر همواره میتوان * عدهٔ تقسیمات یعنی n را به اندازهٔ کافی بزرگ گرفت بطوریکه قدر مطلق هریک از این تفاضلها از هرعدد اختیاری مثبت و کوچک ε کوچکتر باشد . بدین ترتیب تفاضل مجموعهای (۲) و (۳) ازنظر قدر مطلق از $\varepsilon(b-a)$ یعنی از هرعدد اختیاری مثبت و کوچکی کوچکتر میشود . پس اگر n بسمت بینهایت میل کند ، مجموعهای (۲) و (۳) در حد مساوی خواهند بود و چون مجموع (۲) همواره برابر مساحت سطح مورد نظر است ، رابطهٔ

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\triangle x_i$$

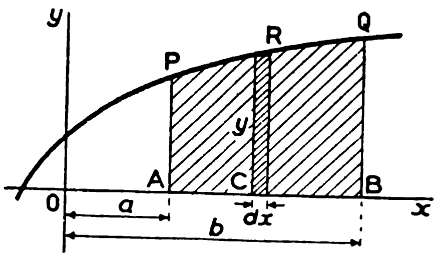
* این مطلب را درکتابهای آنالیز ریاضی ثابت میکنند .

نتیجه میگردد . دراین دستور فاصلهٔ $[a, b]$ به طریق دلخواهی تقسیم شده است و x_i طول یک نقطهٔ دلخواه از فاصلهٔ جزئی Δx_i است .

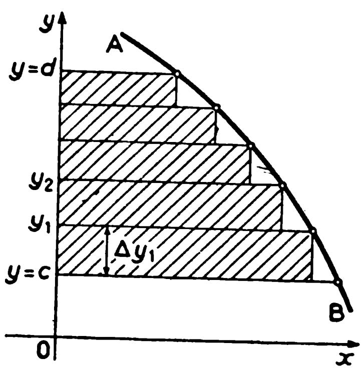
۱۵۸- مساحت سطح محدود بین خمهای مسطح در دستگاه مختصات قائم .- چنانکه دیده‌ایم مساحت سطح محدود بین یک خم و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ با دستور

$$\text{مساحت} = \int_a^b y\,dx \qquad (B)$$

تعیین میشود. مقدار y در(B) به صورت تابعی از x است‌واز معادلهٔ خم‌بدست میایداست.



شکل ۱۲۲



شکل ۱۲۳

معادلهٔ (B) را میتوان‌بآسانی بخاطر سپرد زیرا جزء سطح مستطیلی نظیر CR با پایهٔ dx و ارتفاع y است . مساحت سطح مورد نظر ، ABQP ، برابرحد مجموع مساحت مستطیلهایی مانند $y\,dx$ است که بین دو خط AP و BQ قرار دارند (شکل ۱۲۲) .

اکنون قضیهٔ اساسی (شمارهٔ ۱۵۶) را برای محاسبهٔ مساحت سطحی که بین خم $x=\varphi(y)$ (AB درشکل ۱۲۳) و محور y ها و دو خط افقی $y=c$ و $y=d$ محدود است بکار میبندیم .

عمل اول - مانند شکل ۱۲۳ ، n مستطیل رسم میکنیم. مساحت سطح مورد نظر بروشنی برابر حد مجموع مساحت این مستطیلهاست بشرط آنکه عدهٔ آنها بسمت بینهایت و پهنای هریک از آنها بسمت صفر میل کند .

عمل دوم - درازای فاصله‌های جزئی را که همان پهنای مستطیلهاست Δy_1 ، Δy_2 ، ... وعرض نقاط تقسیم را y_1 ، y_2 ، ... مینامیم. بدین ترتیب پایهٔ مستطیلها بترتیب $\varphi(y_1)$ ، $\varphi(y_2)$ ، ... و مجموع مساحت مستطیلها

$$\varphi(y_1)\Delta y_1+\varphi(y_2)\Delta y_2+\cdots+\varphi(y_n)\Delta y_n=\sum_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\Delta y_i$$

میشود .

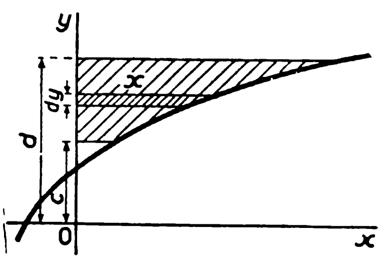
عمل سوم - قضیهٔ اساسی را بکار میبندیم ، داریم :

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\varphi(y_i)\Delta y_i=\int_c^d\varphi(y)\,dy$$

بنابراین مساحت سطح محدود بین یک خم و محور y ها و دو خط افقی $y=c$ و $y=d$ با دستور زیر تعیین میشود :

$$\text{مساحت}=\int_c^d x\,dy \qquad \text{(C)}$$

مقدار x در (C) به‌صورت تابعی از y است واز معادلهٔ خم بدست میاید . دستور (C) را میتوان بدین ترتیب بخاطر سپرد که مساحت خواسته شده حد مجموع تمام نوارهای (مستطیلهای) واقع در فاصلهٔ $[c , d]$ است . قاعده وارتفاع هرنوار x و dy و جزء سطح یکی ازاین مستطیلهاست .

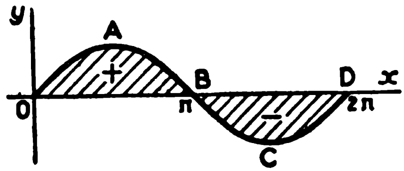


شکل ۱۲۴

معنی علامت منها جلو یك مساحت. - در دستور (B) ، a کوچکتر از b است . چون طرف دوم را به منزلهٔ حد مجموع n جمله نظیر $y_i \Delta x_i$ ، $(i=1, 2, 3, \ldots)$ ، در نظر میگیریم ، اگر y منفی باشد، تمام جملات این مجموع منفی و لذا حاصل دستور (B) عددی منفی میشود . معنی آن این است که سطح مورد نظر زیر محور x هاست .

مثال ۱ ـ مساحت یک طاق نمای سینوسوئید $y = \sin x$ را پیدا کنید.

حل ـ y را صفر میگذاریم و معادله را حل میکنیم، برای x مقادیر زیر بدست میایند:



شکل ۱۲۵

$$x = ۰ \ , \ \pi \ , \ ۲\pi \ , \ \ldots$$

این مقادیر را در (B) میگذاریم:

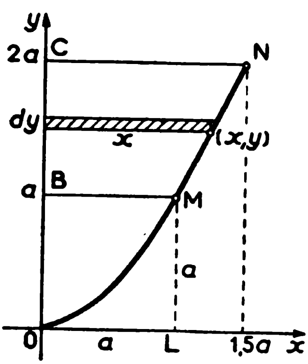
$$[\text{OAB مساحت}] = \int_a^b y\,dx = \int_۰^\pi \sin x\,dx = ۲$$

و نیز

$$[\text{BCD مساحت}] = \int_a^b y\,dx = \int_\pi^{۲\pi} \sin x\,dx = -۲$$

مثال ۲ ـ مساحت‌سطح محدود بین سهمی سمی‌کوبیک $ay^۲ = x^۳$ و محور y ها و دوخط $y = a$ و $y = ۲a$ را حساب کنید.

حل ـ بنابر دستور (C) وشکل ۱۲۶ جزء مساحت $x\,dy = a^{\frac{۱}{۳}} y^{\frac{۲}{۳}} dy$ است. در اینجا بجای x مقدار آن را از معادلهٔ خم قرار داده‌ایم.



شکل ۱۲۶

پس:

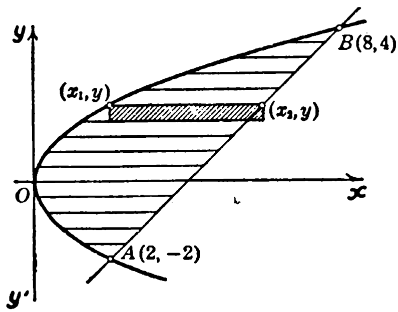
$$[\text{BMNC مساحت سطح}] = \int_a^{۲a} a^{\frac{۱}{۳}} y^{\frac{۲}{۳}} dy = \frac{۳}{۵} a^۲ (\sqrt[۳]{۳۲} - ۱) = ۱{,}۳۰۴a^۲$$

یادداشت ـ $[\text{OLMB مساحت سطح}] = a^۲$ است.

هنگامیکه یکی از حدود محور x هاست، مساحت با دستور (B) و هنگامیکه یکی از حدود محور y هاست، مساحت با دستور (C) تعیین میگردد. اکنون حالتی را درنظر میگیریم که سطح مورد نظر محدود بین دو خم است.

مثال ۳- مساحت‌سطح محدودبین‌سهمی $y^2 = 2x$ و خط $x - y = 4$ را پیدا کنید.

حل - این دو خم یکدیگر را درنقاط $A(2, -2)$ و $B(8, 4)$ قطع میکنند. سطح مورد نظر را به نوارهای‌افقی تقسیم میکنیم. بدین منظورخطوطی‌متساوی‌الفاصله‌موازی محورxها رسم‌مینماییم (شکل ۱۲۷). این خطوط از طرف چپ به قوس AOB از سهمی واز طرف راست به



شکل ۱۲۷

پاره خط AB محدودند و فاصلهٔ هردو خط موازی متوالی dy است. درشکل ۱۲۷ پاره خطی راکه مختصات دوسرش (x_1, y) و (x_2, y) است درنظر میگیریم و از دو سر پاره خط دو عمود به خط موازی مجاورش‌فرود میاوریم. مساحت مستطیلی‌که بدین‌ترتیب بدست میاید عبارتست از:

$$dA = (x_2 - x_1)dy \qquad (x_2 > x_1) \tag{1}$$

dA جزء مساحت است. سطح مورد نظر برابر حد مجموع تمام این مستطیلهاست و بنابر قضیهٔ اساسی

$$\text{مساحت} = \int_c^d (x_2 - x_1)dy \tag{2}$$

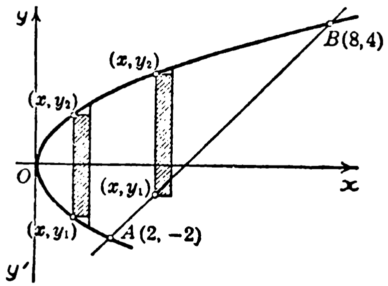
دراین دستور x_2 و x_1 توابعی از y هستند و از روی معادلات خمهای محدود کنندهٔ سطح تعیین میشوند. مثلاً دراینجا ازمعادلهٔ $x - y = 4$ عبارت $x = x_2 = 4 + y$ و ازمعادلهٔ $y^2 = 2x$ عبارت $x = x_1 = \frac{1}{2}y^2$ بدست میاید. این‌مقادیررادر رابطهٔ (۱) قرار میدهیم:

$$dA = (4 + y - \frac{1}{2}y^2)dy \tag{3}$$

این دستور مساحت هرنوار (یعنی مساحت‌هرمستطیل) را میدهد. حد پایین انتگرال درنقطهٔ

A ، $c=-۲$ وحد بالای آن در نقطهٔ B ، $d=۴$ است ، پس :

جواب : $$\text{مساحت}=\int_{-۲}^{۴}(۴+y-\frac{۱}{۲}y^۲)dy=۱۸$$



شکل ۱۲۸

دراین مثال تقسیم سطح با خطوط متساوی‌الفاصلهٔ موازی محور y ها نیز ممکن است . فرض کنیم فاصلهٔ مشترکشان $\triangle x$ باشد . سربالای پاره خط‌های‌واقع‌در داخل سطح همواره روی سهمی است ، اما سرپایین‌آنهادرفاصله‌ای واقع برقوس OA از سهمی و در فاصله‌ای واقع برپاره خط AB است (شکل ۱۲۸) . مختصات سربالا را $(x , y_۲)$ و مختصات سرپایین را $(x , y_۱)$ مینامیم . مساحت هرمستطیل که همان جزء مساحت است ، برابر

$$dA=(y_۲-y_۱)dx \qquad (y_۲ > y_۱) \tag{۴}$$

است . دراین مثال نمیتوان برای محاسبهٔ مساحت یک دستور یگانه بدست آورد . $y_۲$ همواره برابر $\sqrt{۲x}$ است ، درصورتیکه $y_۱$ در فاصله‌ای که سرپایین dA برپاره قوسی از سهمی است ، برابر $-\sqrt{۲x}$ و در فاصله‌ای که سرپایین dA روی پاره خط AB است ، برابر $x-۴$ است . پس تعیین مساحت‌سطح مورد نظر ، اگر بخواهیم‌از دستور (۴) استفاده کنیم ، محاسبهٔ دو انتگرال را ایجاب مینماید .

بطورکلی باید نوارها را طوری درنظرگرفت که برای جزء مساحت تنها یک دستور بدست آید . دستور (۴) وقتی بکار میرود که نوارها موازی محور y ها باشند .

در قضیهٔ اساسی ممکن است بعضی‌از $\varphi(x_i)\triangle x_i$ ها و حتی گاهی همهٔ آنها منفی باشند . پس مقدار یک انتگرال معین که حد مجموع $\varphi(x_i)\triangle x_i$ هاست ، ممکن است صفر یا منفی‌باشد. مثلاً اگر $\varphi(x)=\sin x$ ، $a=۰$ و $b=۲\pi$ باشد ، انتگرال معین (۳) ی شمارهٔ ۱۵۶ صفر است . تعبیر این نتیجه با توجه به مثال ۱ بالا روشن است.

تمرین

۱) مساحت‌سطح محدودبین هذلولی $xy=a^{۲}$ و محور x هاودوخط $x=a$ و $x=۲a$ را حساب کنید.
جواب : $a^{۲} ln\ ۲$

۲) مساحت سطح محدود بین خم $y=ln\ x$ و محور x ها و خط $x=۱۰$ را حساب کنید.
جواب : ۱۴٫۰۲۶

۳) مساحت سطح محدود بین خم $y=xe^{x}$ و محور x ها و خط $x=۴$ را حساب کنید.
جواب : ۱۶۴٫۸

۴) مساحت‌سطح محدودبین پاره سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ومحورهای مختصات را حساب کنید.
جواب : $\frac{۱}{۶}a^{۲}$

۵) مساحت‌سطح کامل هیپوسیکلوئید $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ را حساب کنید.
جواب : $\frac{۳}{۸}\pi a^{۲}$

مساحت سطح محدود بین خمهای زیر را حساب کنید. در هرمسئله خمها را رسم نمایید و جزء سطح را نشان دهید :

۶) $y^{۲}=۶x$ ، $x^{۲}=۶y$ جواب : ۱۲

۷) $y^{۲}=۴x$ ، $x^{۲}=۶y$ ۸

۸) $y^{۲}=۴x$ ، $۲x-y=۴$ ۹

۹) $y=۴-x^{۲}$ ، $y=۴-۴x$ $۱۰\frac{۲}{۳}$

۱۰) $x^{۲}+y^{۲}=۴x$ ، $y^{۲}=۲x$

۱۱) $y=۶x-x^{۲}$ ، $y=x$

۱۲) $y=x^{۳}-۳x$ ، $y=x$

۱۳) $y^{۲}=۴x$ ، $x=۱۲+۲y-y^{۲}$

۱٤) مساحت سطح محدود بین سهمی $y=٦+٤x-x^٢$ و وتر مار بردونقطهٔ (٦- , ٢-) و (٦ , ٤) را حساب کنید . جواب : ٣٦

۱٥) مساحت سطح محدود بین سهمی سمی کوبیک $y^٣=x^٢$ و وترمار بر نقاط (١ , ١-) و (٤ , ٨) را حساب کنید . جواب : ٢٫٧

۱٦) مساحت سطحی را حساب کنید که به هذلولی متساوی‌الساقین $x^٢-y^٢=a^٢$ و محور x ها و خط ماربر مبدأ مختصات و نقطهٔ (x , y) محدود است .

جواب : $\frac{a^٢}{٢} \ln\left(\frac{x+y}{a}\right)$

۱٧) مساحت سطح محدود بین خم $y=x(١\pm\sqrt{x})$ وخط $x=٤$ را حساب کنید . جواب : $\frac{١٢٨}{٥}$

۱٨) مساحت‌سطح محدودبین‌خم $x^٢y=x^٢-١$ وخطوط $y=١$ ، $x=١$ و $x=٤$ را حساب کنید . جواب : $\frac{٣}{٤}$

۱٩) مساحت سطح محدود بین خم $y=x^٣-٩x^٢+٢٤x-٧$ و محور y ها و خط $y=٢٩$ را حساب کنید . جواب : ١٠٨

مربع محدود به خطوط $x=٠$ ، $y=٠$ ، $x=١$ و $y=١$ را درنظر میگیریم . هریک از خمهای زیر این مربع را به دو قسمت تقسیم میکند . نسبت قسمت بزرگتر به قسمت کوچکتر را حساب کنید :

۲٠) $y=x^٢$ جواب : ٢ ۲۱) $y=x^٣$ جواب : ٣

۲۲) $y=x^٤$ ٤ ۲٣) $y^٣=x^٢$ $\frac{٣}{٢}$

۲٤) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=١$ ٥ ۲٥) $x^{\frac{٢}{٣}}+y^{\frac{٢}{٣}}=١$ $\frac{٣٢-٣\pi}{٣\pi}$

۲٦) $y=\sin\frac{\pi x}{٢}$ $\frac{٢}{\pi-٢}$ ۲٧) $y=xe^{x-١}$

۲٨) $y=tg\frac{\pi x}{٤}$ ۲٩) $x^{\frac{١}{٣}}+y^{\frac{١}{٣}}=١$

در هریک‌ازخمهای‌زیر مساحتی‌راحساب کنید که‌در ناحیهٔ اول‌واقع‌است وزیرپاره قوسی قرار دارد که از محور y ها شروع میشود و به اولین نقطهٔ تقاطع خم با محور x ها ختم میگردد :

۳۰) $x+y+y^{۲}=۲$ جواب : $۱\frac{۱}{۶}$

۳۱) $y=x^{۳}-۸x^{۲}+۱۰x$ $۱۰\frac{۳}{۴}$

۳۲) $y=e^{x}\sin x$ ۱۲٫۰۷

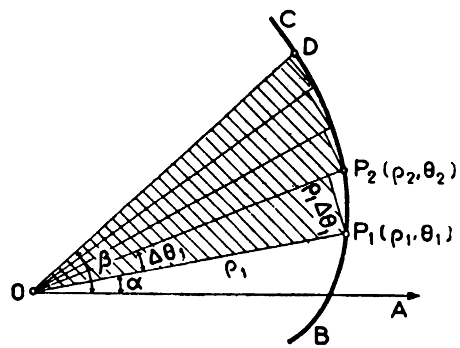
۳۳) $y^{۲}=(۴-x)^{۳}$ ۳۴) $y=e^{\frac{x}{۲}}\cos ۲x$

۳۵) $y=۴e^{-\frac{x}{۲}}\cos\frac{\pi x}{۲}$ ۳۶) $y=\sin(x+۱)$

۱۵۹- محاسبهٔ مساحت در دستگاه مختصات قطبی . - فرض میکنیم سطح مورد نظر سطح محدود بین خم

$$\rho=f(\theta)$$

و دو شعاع حامل $OP_۱$ و OD است (شکل ۱۲۹). زاویهٔ $OP_۱$ و OD با محور قطبی را بترتیب α و β مینامیم و از قضیهٔ اساسی شمارهٔ ۱۵۶ استفاده میکنیم .



شکل ۱۲۹

عمل اول - سطح مورد نظر بروشنی برابر حد مجموع قطاعهای مستدیر رسم شده در شکل ۱۲۹ است .

عمل دوم - زاویهٔ مرکزی‌قطاعهای متوالی‌را $\Delta\theta_1$ ، $\Delta\theta_2$ ، ... وشعاع حامل آنهارا ρ_1 ، ρ_2 ، ... مینامیم. چون مساحت هرقطاع مستدیر برابر حاصل‌ضرب نصف شعاع در طول قوس نظیر آن است ، مساحت i امین قطاع برابر

$$\frac{1}{2}\rho_i \cdot \rho_i \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

و لذا مجموع مساحت قطاعها برابر

$$\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2\Delta\theta_2 + \cdots + \frac{1}{2}\rho_n^2\Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

است .

عمل سوم - قضیهٔ اساسی را بکار میبریم :

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\theta_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

بنابراین مساحت سطحی که با شعاع حامل خم ، هنگام جابجا شدن از وضع OP_1 به وضع OD ، جاروب میشود ، با دستور زیر تعیین میگردد :

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta \qquad \text{(D)}$$

دراین دستور ρ تابعی از θ است و از معادلهٔ خم بدست میاید .

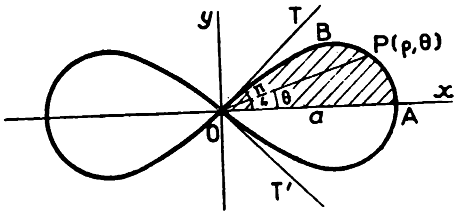
جزء سطح در (D) قطاع مستدیری است که شعاع آن ρ ، زاویهٔ مرکزی آن dθ و مساحت آن $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ است .

مثال - مساحت‌سطح کامل لمنیسکات* $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ راحساب کنید(شکل ۱۳۰) .

حل - چون خم نسبت به هردو محور قرینه است ، مساحت کامل آن چهار برابر مساحت سطح OAB است .

* Lemniscate

وقتی $\theta=\frac{\pi}{۴}$ است ، $\rho=۰$ است . می بینیم که اگر θ از صفر تا $\frac{\pi}{۴}$ تغییر کند ، شعاع حامل OP سطح OAB را جاروب میکند. اگراین مقادیررادر دستور (D) قراردهیم:



شکل ۱۳۰

$$\text{مساحت تمام سطح} = (\text{چهار برابر مساحت } OAB) = ۴\times\frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{۲}d\theta$$

$$=۲a^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\cos ۲\theta\, d\theta=a^{۲}$$

بنابراین مساحت دو حلقه جمعاً برابر مساحت مربعی به ضلع a است .

تمرین

۱) مساحت سطح محدود بین دایرهٔ $\rho=a\cos\theta$ و خطوط $\theta=۰$ و $\theta=۶۰^\circ$ را حساب کنید . جواب : $۰ر۳۷\, a^{۲}$

۲) مساحت سطح کامل محدود به خم $\rho=a\sin ۲\theta$ را حساب کنید .

جواب : $\frac{۱}{۲}\pi a^{۲}$

مساحت سطح محدود به هریک از خمهای زیر را حساب کنید :

۳) $\rho^{۲}=۴\sin ۲\theta$ جواب : ۴

۴) $\rho=a\cos ۳\theta$ $\frac{۱}{۴}\pi a^{۲}$

۵) $\rho=a(۱-\cos\theta)$ $\frac{۳}{۲}\pi a^{۲}$

۶) $\rho=۲-\cos\theta$ $\frac{۹}{۲}\pi$

۷) $\rho=\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}$ جواب : $\frac{۳}{۸}\pi$

۸) $\rho=\frac{۱}{۲}+\cos ۲\theta$ $\frac{۳}{۴}\pi$

۹) $\rho=۲+\sin ۳\theta$ $\frac{۹}{۲}\pi$

۱۰) $\rho=۳+\cos ۳\theta$ ۱۱) $\rho=a\cos\theta+b\sin\theta$

۱۲) $\rho=۲\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}$ ۱۳) $\rho=a\sin n\theta$

۱۴) $\rho=\cos ۳\theta-\cos\theta$ ۱۵) $\rho=\cos ۳\theta-۲\cos\theta$

۱۶) مساحت سطح محدود بین سهمی $\rho(۱+\cos\theta)=a$ و خطوط $\theta=۰$ و $\theta=۱۲۰^\circ$ را حساب کنید . جواب : $۰٫۸۶۶a^{۲}$

۱۷) مساحت سطح محدود بین هذلولی $\rho^{۲}\cos ۲\theta=a^{۲}$ و خطوط $\theta=۰$ و $\theta=۳۰^\circ$ را حساب کنید . جواب : $۰٫۳۳a^{۲}$

۱۸) ثابت کنید که مساحت‌سطحی که باشعاع حامل مارپیچ $\rho=e^{\theta}$ جاروب‌میشود برابر یک چهارم مساحت مربعی است که ضلع آن آخرین شعاع حامل مارپیچ باشد .

۱۹) مساحت سطح محدود بین سهمی $\rho=a\sec^{۲}\frac{\theta}{۲}$ و خط عمود به محورقطبی در قطب را پیدا کنید . جواب : $\frac{۸}{۳}a^{۲}$

۲۰) نشان دهید که مساحت سطح محدود به دو شعاع حامل مارپیچ هذلولی $\rho\theta=a$ متناسب با تفاضل طولهای این دو شعاع حامل است .

۲۱) مساحت بیضی $\rho^{۲}=\frac{a^{۲}b^{۲}}{a^{۲}\sin^{۲}\theta+b^{۲}\cos^{۲}\theta}$ راحساب کنید. جواب : πab

۲۲) مساحت سطح کامل محدود به خم $\rho=a(\sin ۲\theta+\cos ۲\theta)$ را حساب کنید . جواب : $\pi a^{۲}$

۲۳) مساحت سطحی را حساب کنید که زیر محور قطبی Ox قرار دارد و محدود به

خم $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ است . جواب : $\frac{1}{64}(10\pi + 27\sqrt{3})a^2$

۲۴) مساحت سطح محدود به خم $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$ را حساب کنید. جواب : a^2

در هریک از مسائل ۲۵ تا ۲۸ مساحت سطح محدود به خم و خطهای داده شده را حساب کنید :

۲۵) $\rho = tg\,\theta \quad ، \quad \theta = 0 \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

۲۶) $\rho = e^{\frac{\theta}{2}} \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

۲۷) $\rho = \sec\theta + tg\,\theta \quad ، \quad \theta = 0 \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

۲۸) $\rho = a \sin\theta + b \cos\theta \quad ، \quad \theta = 0 \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

مساحت سطح مشترك بين هرزوج خم زير را حساب كنيد :

۲۹) $\rho = 3\cos\theta \quad ، \quad \rho = 1 + \cos\theta$ جواب : $\frac{5}{4}\pi$

۳۰) $\rho = 1 + \cos\theta \quad ، \quad \rho = 1$ $\frac{5}{4}\pi - 2$

۳۱) $\rho = 1 - \cos\theta \quad ، \quad \rho = \sin\theta$ $\frac{\pi}{2} - 1$

۳۲) $\rho^2 = 2\cos 2\theta \quad ، \quad \rho = 1$ $\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$

۳۳) $\rho^2 = \cos 2\theta \quad ، \quad \rho^2 = \sin 2\theta$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

۳۴) $\rho = \sqrt{6} \cos\theta \quad ، \quad \rho^2 = 9\cos 2\theta$ $\frac{1}{2}(\pi + 9 - 3\sqrt{3})$

۳۵) $\rho = \sqrt{2} \sin\theta \quad ، \quad \rho^2 = \cos 2\theta$ $\frac{1}{6}(\pi + 3 - 3\sqrt{3})$

۳۶) $\rho = \sqrt{2} \cos\theta \quad ، \quad \rho^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta$

۳۷) مساحت سطحی را حساب کنید که درون دایرهٔ $۳\rho=\sqrt{۳}\cos\theta$ و درون حلقهٔ خم $\rho=\cos ۲\theta$ از $\theta=-\frac{\pi}{۴}$ تا $\theta=\frac{\pi}{۴}$ قرار دارد.

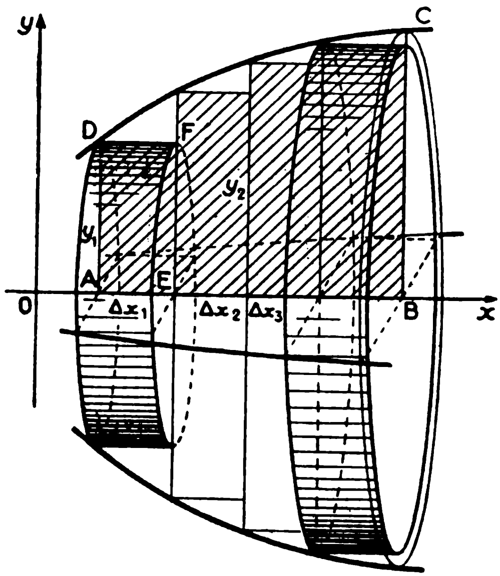
۳۸) $۳\rho=\sqrt{۶}\sin ۲\theta$ ، $\rho^۲=\cos ۲\theta$

۳۹) مساحت حلقهٔ داخلی تریسکتریس $\rho=a(۱-۲\cos\theta)$ را پیدا کنید (برای شکل، لیماسن* را در فصل ۲۶ ببینید). جواب: $\frac{۱}{۲}a^۲(۲\pi-۳\sqrt{۳})$

۱۶۰- حجم اجسام دوار. ـ حجم جسمی را که براثر دوران سطح هامنی ABCD در حول محور x ها حاصل میشود V و معادلهٔ خم هامنی DC را

$$y=f(x)$$

مینامیم و به طریق زیر عمل میکنیم:



شکل ۱۳۱

* Limaçon

عمل اول - پاره‌خط AB را به n قسمت به درازاهای Δx_1 ، Δx_2 ، ... ، Δx_n تقسیم میکنیم و از نقاط تقسیم صفحاتی به محور x ها عمود مینماییم . این صفحات جسم را به n ورق مستدیر تقسیم میکنند . اگر در سطح ABCD مستطیلهایی با پایه‌های Δx_1 ، Δx_2 ، ... ، Δx_n بسازیم و سطح ABCD را در حول محور x ها دوران دهیم ، از دوران هر مستطیل یک استوانهٔ دوار بوجود میاید و به هر ورق مستدیر یک استوانه نظیر میشود (در شکل ۱۳۱ ، $n=4$ گرفته شده و تنها دو استوانهٔ اول و آخر رسم شده است) . حد مجموع حجمهای این n استوانه ، وقتی n بسمت بینهایت میل کند ، حجم خواسته شده است .

عمل دوم - عرض خم DC را در نقاط تقسیم y_1 ، y_2 ، ... ، y_n مینامیم . بنابراین حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل AEFD برابر $\pi y_1^2 \Delta x_1$ و مجموع حجمهای این استوانه‌ها برابر

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \cdots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

است .

عمل سوم - قضیهٔ اساسی را بکار میبریم (حدود انتگرال $OA=a$ و $OB=b$ است) :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx$$

بنابراین اگر سطح محدود به خم $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور x ها دوران دهیم ، حجم جسم حاصل با دستور زیر تعیین میشود :

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad \text{(E)}$$

دراین دستور باید بجای y مقدار آن‌را که از معادلهٔ خم بدست میاید ، و همان $f(x)$ است ، قرار داد .

این‌دستور را میتوان بآسانی بخاطر سپرد : ورقه یاچرخی از جسم را که بین دو صفحهٔ

عمود به محور دوران واقع است درنظر میگیریم و حجم این ورقهٔ مستدیر را بطور تقریب برابر حجم استوانهٔ دواری فرض میکنیم که ارتفاع آن dx و مساحت قاعدهٔ آن πy^2 است . حجم این استوانه که «جزء حجم» است ، $\pi y^2 dx$ است .

به همین طریق اگر محور دوران محور y ها باشد ، دستور زیر را بکار میبندیم

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \qquad \text{(F)}$$

در این دستور باید بجای x مقدار آن را که از معادلهٔ خم بدست میاید قرار داد .

مثال ۱ - بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

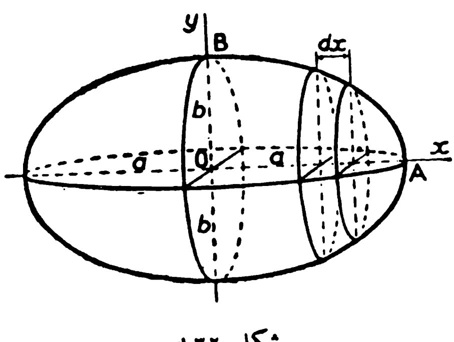
حل - چون $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ و جسم مورد نظردو برابر جسم حاصل ازدوران OAB است ، بنابر دستور (E) داریم :

$$\frac{V_x}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}\pi a b^2$$

پس :

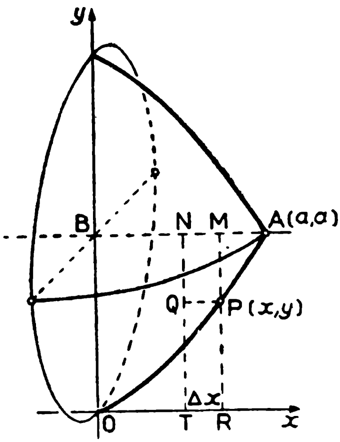
$$V_x = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

برای آزمودن درستی این نتیجه ، $b = a$ قرار میدهیم ، $V_x = \frac{4}{3}\pi a^3$ میشود . این عبارت همان دستور حجم کره است که حالت خاصی از بیضوی است. اگر محور دوران یک



شکل ۱۳۲

بیضوی دوار قطر بزرگتر آن باشد ، بیضوی را کشیده و اگر محور دوران یک بیضوی قطر کوچکترآن باشد ، بیضوی را پهن مینامند .



شکل ۱۳۳

مثال۲- سطح محدود بین سهمی سمی کوبیک

$$(۱) \qquad ay^۲=x^۳$$

و محور y ها و خط AB به معادلهٔ $y=a$ را در حول خط AB دوران دهید و حجم جسم دوار حاصل را حساب کنید .

حل - سطح OPAB را در حول امتداد AB دوران میدهیم (شکل ۱۳۳) . پاره خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم میکنیم و طول هریک از آنها را Δx مینامیم . NM یکی از آنهاست . وقتی مستطیل NMPQ در حول AB دوران کند ، استوانهٔ دواری پدید میاید که حجم آن یک جزء از حجم خواسته شده است . بنابراین

$$\text{جزء حجم}=\pi r^۲h=\pi(a-y)^۲\Delta x$$

است ، زیرا $\quad r=PM=RM-RP=a-y$

و $\quad h=NM=\Delta x$

است ، پس بنابر قضیهٔ اساسی :

$$(۲) \qquad \text{حجم جسم}=V=\pi\int_۰^a (a-y)^۲dx=\pi\int_۰^a (a^۲-۲ay+y^۲)dx$$

زیرا حدود انتگرال $x=۰$ و $x=AB=a$ است . اگر مقدار y را از رابطهٔ (۱) پیدا کنیم و در رابطهٔ (۲) بگذاریم ، جواب بدست میاید : $V=۰٫٤۵\pi a^۳$

این حجم را میتوان با حجم مخروط دواری که ارتفاع آن AB ($=a$) و شعاع قاعدهٔ آن OB ($=a$) است ، مقایسه کرد . حجم اخیر برابر $\frac{۱}{۳}\pi a^۳$ است .

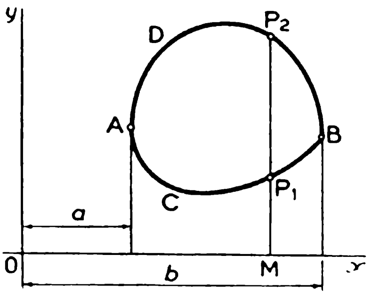
اگر معادلات خم CD (شکل ۱۳۱) به صورت

$$x=f(t) \quad , \quad y=\varphi(t)$$

باشد ، در دستور (E) بجای y و dx ، $\varphi(t)$ و $f'(t)dt$ میگذاریم و حدود انتگرال را به t_1 و t_2 که از معادلات

$$x=a \implies t=t_1 \quad \text{و} \quad x=b \implies t=t_2$$

بدست میایند ، تبدیل میکنیم.



شکل ۱۲٤

حجم چنبره- اگر یک پاره سطح هامنی را در حول محوری که پاره سطح را قطع نمیکند دوران دهیم ، یک چنبره پدید میاید . جسم حاصل از دوران پاره سطح ACBDA درحول محور x ها را درنظر میگیریم(شکل ۱۲٤) وآن‌را با صفحات متساوی‌الفاصلهٔ عمود به محور دوران، Ox ، قطع میکنیم . فاصلهٔ دو صفحهٔ متوالی را Δx مینامیم. بدین‌ترتیب جسم مذکور به یک عده ورقه‌های مستدیرمیان‌تهی به‌ضخامت Δx تقسیم میشود . اگر یکی از صفحات مقسم جسم از M بگذرد ، ورقهٔ مستدیر میان تهی راکه یک قاعدهٔ آن براین صفحه قرار دارد ، میتوان بطور تقریب یک استوانهٔ دوار میان تهی دانست. شعاعهای‌داخلی و خارجی استوانهٔ مذکور بترتیب $MP_1(=y_1)$ و $MP_2(=y_2)$ ، ارتفاع آن Δx و لذا حجم آن $\pi(y_2^2-y_1^2)\Delta x$ است . اگر عدهٔ این استوانه‌ها n باشد ، $b-a=n\Delta x$ است . حد مجموع حجمهای این n استوانهٔ میان تهی ، وقتی n بسمت بینهایت میل کند ، برابرحجم جسم‌دوار مورد نظر است. پس :

$$V_x=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx \qquad (y_2>y_1) \tag{۳}$$

جزء حجم در (۳) استوانه‌ای میان تهی به شعاع داخلی y_1 ، شعاع خارجی y_2 و ارتفاع Δx است . شعاعهای y_1 و y_2 توابعی از $x(=OM)$ هستند و از معادلات خمهای (یا از معادلهٔ خم) محدودکنندهٔ پاره سطح مولد بدست میایند .

مثال ۳- دایره‌ای به شعاع a را در حول محوری که در صفحهٔ دایره و به فاصلهٔ

b از مرکز آن قرار دارد $(b > a)$ ، دوران دهید و حجم چنبرهٔ حاصل را حساب کنید .

حل - محور دوران را محور x ها و قائم مار برمرکز دایره را محور y ها میگیریم . دراین صورت معادلهٔ دایرهٔ مذکور

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2$$

میشود . مقدار y را از این معادله بدست میاوریم :

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{و} \quad y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

پس :
$$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x = 4\pi b \sqrt{a^2 - x^2}\ \Delta x$$

و
$$V_x = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = 2\pi^2 a^2 b$$ جواب :

جسم دوار را به یک عده استوانهٔ توخالی نیز میتوان تجزیه کرد . بدین منظور کافی است یک عده استوانهٔ دوار که محور مشترکشان همان محور دوران باشد از درون جسم عبور دهیم . مثلاً اگر سطح ACBD (شکل ۱۲۴) درحول محور y ها دوران کند ، میتوان نشان داد که

$$V_y = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1) x\ dx \qquad (4)$$

دراین دستور $OM = x$ ، $MP_1 = y_1$ ، $MP_2 = y_2$ و جزء حجم ، dV ، یک استوانهٔ توخالی به شعاع r ، به ارتفاع $y_2 - y_1$ و به ضخامت Δx است . مثال ۳ را با دستور (۴) نیز میتوان حساب کرد .

تمرین

۱) دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ را درحول یکی از قطرهای آن دوران دهید و حجم کرهٔ حاصل را حساب کنید. جواب : $\frac{4}{3}\pi r^3$

۲) سطح محدود به خطوط $y = 6 - x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 4$ را

در حول محور Ox دوران دهید ، حجم مخروط ناقص حاصل را با انتگرال گیری پیدا کنید و درستی نتیجه را با استفاده از دستور هندسهٔ مقدماتی بیازمایید .

* ۳) پاره قوس محدود به مبدأ مختصات و نقطهٔ (x_1 , y_1) از سهمی $y^2=2px$ را درحول محور آن دوران دهید و حجم پارا بلوئید دوار حاصل را حساب کنید .

جواب : $\pi p x_1^2=\frac{1}{2}\pi y_1^2 x_1$ ، یعنی نصف حجم استوانهٔ محیطی آن

۴) پاره قوس مذکوردرمسئلهٔ ۳ را در حول محور Oy دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{1}{5}\pi x_1^2 y_1$ ، یعنی یک پنجم استوانه‌ای به ارتفاع y_1 وشعاع قاعدهٔ x_1.

در هریک‌از مسائل ۵ تا ۲۰ سطح محدود به خمهای مذکور را در حول محور Ox دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید :

۵) $y=x^3$ ، $y=0$ ، $x=2$ جواب : $\frac{128}{7}\pi$

۶) $ay^2=x^3$ ، $y=0$ ، $x=a$ $\frac{1}{4}\pi a^3$

۷) پاره‌سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ، $x=0$ ، $y=0$ $\frac{1}{15}\pi a^3$

۸) هیپوسیکلوئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\frac{32}{105}\pi a^3$

۹) یک طاق‌نما از $y=\sin x$ $\frac{1}{2}\pi^2$

۱۰) یک طاق‌نما از $y=\cos 2x$ $\frac{1}{4}\pi^2$

۱۱) $y=e^{-x}$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $x=5$ $\frac{\pi}{2}(1-e^{-10})$

۱۲) $9x^2+16y^2=144$ 48π

۱۳) $y=xe^x$ ، $y=0$ ، $x=1$ $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$

۱۴) خم آگنزی * $(x^2+4a^2)y=8a^3$ ، $y=0$ جواب : $4\pi^2a^3$

* Agnesi

۱۵) $\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}}=۱$ $\qquad$ $\frac{۳۲}{۳۵}\pi ab^{۲}$

۱۶) $y^{۲}(۲a-x)=x^{۳}$ ، $y=۰$ ، $x=a$ $\qquad$ $۰٫۲۱۱۵\pi a^{۳}$

۱۷) $y=x^{۲}-۶x$ ، $y=۰$

۱۸) $y^{۲}=(۲-x)^{۳}$ ، $y=۰$ ، $x=۰$ ، $x=۱$

۱۹) $y^{۲}(۴+x^{۲})=۱$ ، $y=۰$ ، $x=۰$ ، $x=\infty$

۲۰) $(x-۱)y=۲$ ، $y=۰$ ، $x=۲$ ، $x=۵$

در هریک از مسائل ۲۱ تا ۲۸ سطح محدود به خمهای مذکور را درحول محور Oy دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید :

۲۱) $y=x^{۳}$ ، $y=۰$ ، $x=۲$ $\qquad$ جواب : $\frac{۶۴}{۵}\pi$

۲۲) $۲y^{۲}=x^{۳}$ ، $y=۰$ ، $x=۲$ $\qquad$ $\frac{۳۲}{۷}\pi$

۲۳) $y=e^{x}$ ، $y=۰$ ، $x=۰$ $\qquad$ ۲π

۲۴) $۹x^{۲}+۱۶y^{۲}=۱۴۴$ $\qquad$ ۶۴π

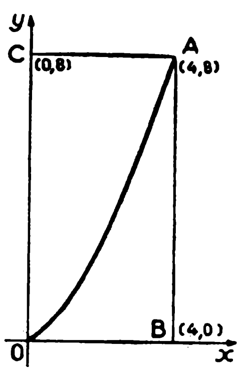
۲۵) $\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}}=۱$ $\qquad$ $\frac{۴}{۵}\pi a^{۲}b$

۲۶) $y^{۲}=۹-x$ ، $x=۰$

۲۷) $x^{۲}=۱۶-y$ ، $y=۰$

۲۸) $y^{۲}=ax$ ، $y=۰$ ، $x=a$

۲۹) معادلهٔ خم OA ، $y^{۲}=x^{۳}$ است (شکل ۱۳۵). درهریک از حالات الف تا ح حجم جسم دوار حاصل را حساب کنید :



شکل ۱۳۵ ←

الف ـ وقتی OAB در حول Ox دوران میکند . جواب : ٦٤π

ب ـ وقتی OAB در حول AB دوران میکند . $\frac{١٠٢٤}{٣٥}\pi$

پ ـ وقتی OAB در حول CA دوران میکند . $\frac{٧٠٤}{٥}\pi$

ت ـ وقتی OAB در حول Oy دوران میکند . $\frac{٥١٢}{٧}\pi$

ث ـ وقتی OAC در حول Oy دوران میکند . $\frac{٣٨٤}{٧}\pi$

ج ـ وقتی OAC در حول CA دوران میکند . $\frac{٥٧٦}{٥}\pi$

چ ـ وقتی OAC در حول AB دوران میکند . $\frac{٣٤٥٦}{٣٥}\pi$

ح ـ وقتی OAC در حول Ox دوران میکند . ١٩٢π

٣٠) بیضی $b^٢x^٢+a^٢y^٢=a^٢b^٢$ را در حول محور y ها دوران دهید و حجم بیضوی حاصل را حساب کنید. جواب : $\frac{٤}{٣}\pi a^٢b$

٣١) ازکره‌ای به شعاع r یک قطعه به ارتفاع h بریده‌ایم . با انتگرال گیری نشان دهید که حجم آن $\frac{١}{٣}\pi h^٢(٣r-h)$ است .

در هریک از مسائل ٣٢ تا ٣٩ آن قطعه از خم را که با خط داده شده بریده شده است درحول خط مذکوردوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید :

٣٢) خط $y=٣$ ، خم $y=٤x-x^٢$ جواب : $\frac{١٦}{١٥}\pi$

٣٣) خط $x=٤$ ، خم $y^٢=x^٣$ $\frac{٢٠٤٨}{٣٥}\pi$

٣٤) خط $y=-٤$ ، خم $y=٤+٦x-٢x^٢$ $\frac{١٢٥٠}{٣}\pi$

۳۵) خط $y=x$ ، خم $y=x^۲$ — $\frac{\pi}{۶۰}\sqrt{۲}$

۳۶) خط $y=x$ ، خم $y=۳x-x^۲$ — $\frac{۸}{۱۵}\pi\sqrt{۲}$

۳۷) خط $۴y=۴x+۳۳$ ، خم $y=۹-x^۲$ — $\frac{۸}{۱۵}\pi\sqrt{۲}$

۳۸) خط $x+y=۱$ ، خم $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ — $\frac{\pi}{۱۵}\sqrt{۲}$

۳۹) خط $x+y=۷$ ، خم $xy=۶$

۴۰) یک طاق‌نما از سیکلوئید

$$x=r\ arc\ vers\ \frac{y}{r}-\sqrt{۲ry-y^۲}$$

را در حول پایهٔ آن ، محور x ها ، دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

راهنمایی - در دستور (E) ی شمارهٔ ۱۶۰ ، $dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{۲ry-y^۲}}$ و حدود را $y=۰$ و $y=۲r$ بگذارید . جواب : $۵\pi^۲r^۳$

۴۱) آن قطعه از منحنی زنجیر $y=\frac{a}{۲}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ را که بین دو خط $x=۰$ و $x=b$ قرار دارد ، در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید . جواب : $\frac{\pi}{۸}a^۳\left(e^{\frac{۲b}{a}}-e^{-\frac{۲b}{a}}\right)+\frac{\pi}{۲}a^۲b$

۴۲) سیسوئید * $y^۲=\frac{x^۳}{۲a-x}$ را درحول مجانب آن ، خط $x=۲a$ ، دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید . جواب : $۲\pi^۲a^۳$

۴۳) خم تراکتریس را که شیب خط مماس به آن $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^۲-y^۲}}$

* Cissoid

است در حول محور Ox دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{2}{3}\pi a^3$

۴۴) سطح محدود به هذلولی متساوی‌الساقین $x^2-y^2=a^2$ و خط $x=2a$ را در حول محور x ها دوران دهید و ثابت کنید که حجم جسم حاصل برابر حجم کره‌ای به شعاع a است .

۴۵) هیپوسیکلوئید

$$x=a\,cos^3\theta \quad , \quad y=a\,sin^3\theta$$

را در حول محور Ox دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{32}{105}\pi a^3$

۴۶) یک طاق‌نما از سیکلوئید

$$x=a(\theta-sin\,\theta) \quad , \quad y=a(1-cos\,\theta)$$

را در حول پایهٔ آن ، Ox ، دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : $5\pi^2a^3$

نشان دهید که اگر این طاق‌نما در حول محور Oy دوران کند ، حجم جسم حاصل برابر $6\pi^3a^3$ است .

۴۷) سطح محدود به خم $y=sec\,\frac{\pi x}{2}$ ، محور x ها و خطوط $x=\pm\frac{1}{2}$ را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید . جواب : ۴

۴۸) سطح زیر خم $y=e^x\,sin\,x$ را ، از $x=0$ تا $x=\pi$ ، در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

۴۹) خم $x=t^2$ ، $y=4t-t^3$ مفروض است . (الف) مساحت سطح داخل حلقهٔ خم را حساب کنید . (ب) سطح داخل حلقه را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را پیدا نمایید . جواب : الف $\frac{256}{15}$ ، ب ۶۷٫۰۲

۵۰) سطح محدود بین دو سهمی $y^2=4x$ و $y^2=5-x$ را یک بار در حول

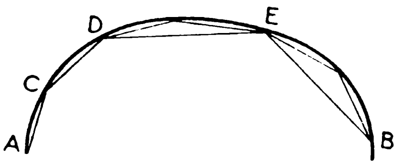
محور x ها ویک بار در حول محور y هادوران دهید و حجم اجسام حاصل را حساب کنید.

جواب : $Ox : ۱۰\pi$ ، $Oy : \frac{۱۷۶\pi}{۳}$

۵۱) قسمتی از سطح کاردیوئید $\rho = ۴ + ۴\cos\theta$ را که به دو خط $\theta = ۰$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ محدود است در حول محور قطبی دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب : ۱۶۰π

۱۶۱- محاسبهٔ طول قوس .ـ عبارت «**طول یك پاره خط**» معمولاً تعداد دفعاتی‌را بخاطر میاورد که میتوان پاره خط دیگری‌را که به‌عنوان واحد انتخاب شده است ، متوالیاً روی‌آن قرار داد. این درست همان کاری است که درودگر با متر چوبیش انجام میدهد.



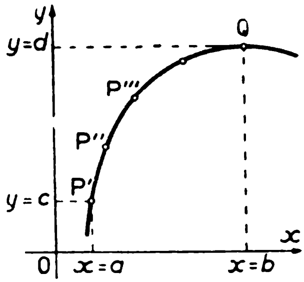
شکل ۱۳۶

چون منطبق کردن یک پاره خط مستقیم بریک خم غیر ممکن است ، اندازه‌گرفتن طول یک پاره خم نیز به طریق مذکور غیر ممکن است و برای این کار به ترتیب زیر عمل میکنند :

خم(مثلا AB) را به‌طرزی دلخواه با نقاطی(مانند C ، D ، E) به‌پاره‌خمهایی‌تقسیم میکنند ونقاط مجاور رابیکدیگروصل مینمایند تاوترهایی(مانند AC ، CD ، DE ، EB) پدیدآیند(شکل ۱۳۶)و **طول قوس‌را با حد مجموع طول وترها ، وقتی عدهٔ وترها بسمت بینهایت و طول هریك از آنها بسمت صفر میل میکند ، تعریف میکنند .**

چون این حد نیز بااندازه‌گیری عده‌یی‌پاره خط مستقیم بدست میاید ، پیدا کردن طول یک پاره خم را «تقویم خم» مینامند . قبلاً نیز در هندسه این تعریف را برای طول یک پاره خم بکار برده‌ایم و محیط دایره را با حد محیط یک‌کثیرالاضلاع منتظم محاطی (یا محیطی) ، وقتی عدهٔ اضلاع‌آن بینهایت زیاد شود ، برابر دانسته‌ایم . روشی که در شمارهٔ بعد برای محاسبهٔ طول قوس بکار میرود براین تعریف مبتنی است‌و خواننده باید به راه‌بکار بستن این تعریف توجه کافی مبذول دارد .

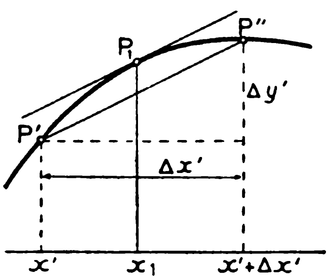
۱۶۲- محاسبهٔ طول‌قوس در دستگاه مختصات قائم . - اکنون با بکار بستن قضیهٔ اساسی به بیان تحلیلی تعریف مذکور در شمارهٔ قبل میپردازیم .



شکل ۱۳۷

خم $y=f(x)$ و دو نقطه از آن مانند $P'(a\,,c)$ و $Q(b\,,d)$ را درنظر میگیریم و برای محاسبهٔ طول پاره خم $P'Q$ به ترتیب زیر عمل میکنیم :

عمل اول - روی پاره خم $P'Q$ نقاط دلخواهی میگیریم و هردونقطهٔ مجاور را بیکدیگر وصل میکنیم(شکل ۱۳۷) . روشن است که طول پاره‌خم $P'Q$ حد مجموع طولهای این وترهاست .



شکل ۱۳۸

عمل دوم - یکی‌از‌این‌وترها مثلاً $P'P''$ را درنظر میگیریم(شکل ۱۳۸) . مختصات دوسر آن عبارتند از

$$P'(x'\,,\,y')$$

و

$$P''(x'+\triangle x'\,,\,y'+\triangle y')$$

پس همان طورکه در شمارهٔ ۹۵ ذکر شده است ، داریم :

$$P'P''=\sqrt{(\triangle x')^{2}+(\triangle y')^{2}}$$

یا

$$P'P''=\left[1+\left(\frac{\triangle y'}{\triangle x'}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\triangle x'$$

[داخل رادیکال را بر $(\triangle x')^2$ تقسیم و خود رادیکال را در $\triangle x'$ ضرب کرده‌ایم.]

اما بنابر دستور میانه (شمارهٔ ۱۱۶) (اگر $\triangle y'$ را $f(b)-f(a)$ و $\triangle x'$ را $b-a$ درنظر بگیریم) داریم :

$$\frac{\triangle y'}{\triangle x'}=f'(x_1) \qquad (x'<x_1<x'+\triangle x')$$

x_1 طول نقطه‌ای از خم مانند P_1 بین P' و P'' است که مماس به خم در آن نقطه موازی وتر $P'P''$ است .

پس طول نخستین وتر $= P'P'' = [1+f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x'$

به همین ترتیب طول دومین وتر $= P''P''' = [1+f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x''$

. . . .

طول n امین وتر $= P^{(n)}Q = [1+f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x^{(n)}$

بنابراین طول خط شکستهٔ محاطی که نقطهٔ P' را به نقطهٔ Q وصل میکند (مجموع وترها) ، مجموع عبارتهای مذکوراست ، یعنی :

$$[1+f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x' + [1+f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x'' + \cdots$$
$$\cdots + [1+f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} [1+f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x^{(i)}$$

عمل سوم - قضیهٔ اساسی را بکار میبریم :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \triangle x^{(i)} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [1+f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \triangle x^{(i)} = \int_a^b [1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

بنابراین اگر طول پاره‌خم $P'Q$ را s بنامیم ، **دستورطول قوس** عبارت میشود از

$$s = \int_a^b [1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

یا

$$s = \int_a^b [1+y'^2]^{\frac{1}{2}} dx \qquad (G)$$

دراین دستور $y'=\frac{dy}{dx}$ است و مقدار آن از معادلهٔ خم بدست میاید .

گاهی بهتراست y را متغیر مستقل بگیریم. برای بدست آوردن‌دستوری که جوابگوی این حالت باشد ، در دستور (G) بجای y' و dx ،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{\frac{dx}{dy}} \quad و \quad dx=x'dy$$

میگذاریم . اگر حدود انتگرال برای y اعداد c و d باشند ، **دستور طول قوس** به صورت زیر در میاید :

$$s=\int_c^d [x'^۲+۱]^{\frac{۱}{۲}}dy \tag{H}$$

دراین دستور $x'=\frac{dx}{dy}$ است و مقدار آن از معادلهٔ خم برحسب y بدست میاید .

دستور (G) را میتوان از راه دیگری نیز بدست آورد . دستور (D) ی شمارهٔ ۹۰ ، یعنی

$$ds=(۱+y'^۲)^{\frac{۱}{۲}}dx \tag{۱}$$

دیفرانسیل طول قوس را میدهد . اگر رابطهٔ (۱) را درنظر بگیریم و به طریق مذکور در شمارهٔ ۱۴۲ عمل کنیم ، دستور (G) بدست میاید. به همین ترتیب از دستور (E) ی شمارهٔ ۹۰ دستور (H) حاصل میشود وسرانجام اگر معادلات پارامتری خم به صورت

$$x=f(t) \quad , \quad y=\varphi(t) \tag{۲}$$

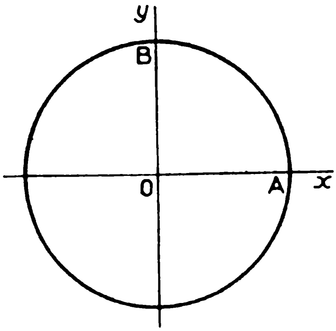
در دست باشد، چون $dx=f'(t)dt$ و $dy=\varphi'(t)dt$ است ، دستور زیر بکار میرود :

$$s=\int (dx^۲+dy^۲)^{\frac{۱}{۲}}=\int_{t_۱}^{t_۲}[f'^۲(t)+\varphi'^۲(t)]^{\frac{۱}{۲}}dt \tag{۳}$$

مثال ۱ - طول محیط دایرهٔ $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ را حساب کنید .

حل - ازدوطرف معادلهٔ دایره دیفرانسیل میگیریم و مقدار $\frac{dy}{dx}$ را پیدا میکنیم :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$



شکل ۱۳۹

این مقدار را در دستور (G) میگذاریم :

$$\text{طول قوس BA}=\int_{0}^{r}\left[1+\frac{x^{2}}{y^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_{0}^{r}\left[\frac{y^{2}+x^{2}}{y^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int_{0}^{r}\left[\frac{r^{2}}{r^{2}-x^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}dx$$

[بجای $y^{2}+x^{2}$ ، r^{2} و بجای y^{2} ، $r^{2}-x^{2}$ گذشته‌ایم تا تابع زیر علامت انتگرال تابعی تنها از x باشد .]

بنابراین
$$(\text{طول قوس BA})=r\int_{0}^{r}\frac{dx}{\sqrt{r^{2}-x^{2}}}=\frac{\pi r}{2}$$

و طول محیط دایره $2\pi r$ است (مثال ۱ شمارهٔ ۱۵٤ را ببینید) .

مثال ۲ - طول قوس یک طاق‌نما از سیکلوئید زیر را حساب کنید :

$$x=a(\theta-\sin\theta)\quad,\quad y=a(1-\cos\theta)$$

مثال ۲ ی شمارهٔ ۸۱ را ببینید .

حل - $dx=a(1-\cos\theta)d\theta \quad , \quad dy=a\sin\theta\, d\theta$

$$dx^{2}+dy^{2}=2a^{2}(1-\cos\theta)d\theta^{2}=4a^{2}\sin^{2}\frac{\theta}{2}\,d\theta^{2}$$

رابطهٔ (۳) را بکار میبریم :

$$s=\int_{۰}^{۲\pi} ۲a\, sin\, \frac{\theta}{۲}\, d\theta=۸a$$: جواب

حدود انتگرال θ های‌نظیر به نقاط O و D یعنی $\theta=۰$ و $\theta=۲\pi$ است (شکل ٦٠ را ببینید) .

مثال ۳- طول‌پاره خمی‌ازمنحنی $۲۵y^۲=x^۵$ راکه‌بین‌دوطول $x=۰$ و $x=۲$ واقع است ، حساب کنید .

حل - y' را حساب میکنیم ، $y'=\frac{۱}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$ ، و در دستور (G) میگذاریم :

$$s=\int_{۰}^{۲}(۱+\frac{۱}{٤}x^۳)^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲}(٤+x^۳)^{\frac{۱}{۲}}dx \qquad (٤)$$

مقدار تقریبی انتگرال(٤)در مثال ۲ ی شمارهٔ ۱٤۸ با دستور ذوزنقه و در مثال ۲ ی شمارهٔ ۱٤۹ با دستور سمپسون حساب شده است و اگر مقدار اخیر را بگیریم :

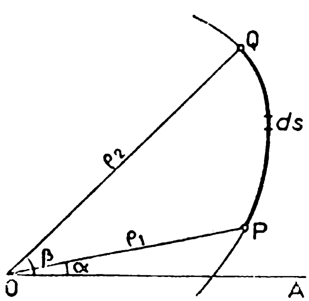
$$s=\frac{۱}{۲}(٤٫۸۲۱)=۲٫٤۱$$ واحد طول

۱٦۳- محاسبهٔ طول قوس دردستگاه مختصات قطبی

مختصات قطبی .- اگر رابطهٔ (I) شمارهٔ ۹٦ رابگیریم‌و مانند شمارهٔ ۱٤۲ عمل کنیم ، **دستور طول قوس** در دستگاه مختصات قطبی بدست میاید :

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\rho^۲+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}d\theta \qquad (I)$$

دراین دستور باید بجای ρ و $\frac{d\rho}{d\theta}$ مقادیرآنها را که از معادلهٔ خم حاصل میشوند ، قرار داد .



شکل ۱٤۰

گاهی معادلهٔ خم به‌صورت $\theta=\varphi(\rho)$ است و بهتر است ρ را متغیر مستقل بگیریم.

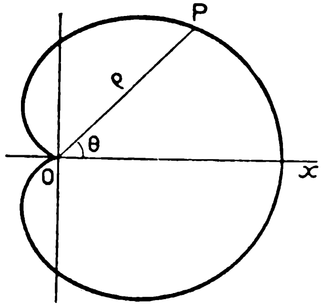
دراین صورت
$$d\theta=\varphi'(\rho)d\rho=\frac{d\theta}{d\rho}\,d\rho$$

است که چون آن را در $[\rho^2 d\theta^2+d\rho^2]^{\frac{1}{2}}$ بگذاریم ، مقدار زیر بدست میاید :

$$\left[\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}d\rho$$

بنابراین اگر حدود انتگرال برای متغیر مستقل ρ ، ρ_1 و ρ_2 باشند ، **دستور طول قوس** به صورت زیر درمیاید :

$$s=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}d\rho \qquad (J)$$



شکل ۱۴۱

دراین دستور باید بجای $\frac{d\theta}{d\rho}$ مقدار آن را که از معادلهٔ خم و برحسب ρ بدست میاید ، قرار داد .

مثال - طول محیط کاردیوئید *

$$\rho=a(1+\cos\theta)$$

را حساب کنید .

حل - دراین مسئله $\frac{d\rho}{d\theta}=-a\sin\theta$ است . اگر θ را از صفر تا π تغییر دهیم ، نصف خم پدید میاید . از دستور (I) استفاده میکنیم :

$$\frac{s}{2}=\int_0^{\pi}[a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

* Cardioid

$$=a\int_{\cdot}^{\pi}(۲+۲\cos\theta)^{\frac{۱}{۲}}d\theta=۲a\int_{\cdot}^{\pi}\cos\frac{\theta}{۲}\,d\theta=۴a$$

پس $s=۸a$: جواب

تمرین

۱) طول پاره خمی از منحنی $y^۳=x^۲$ را که مختصات دو سر آن $(۰,۰)$ و $(۴,۸)$ است، حساب کنید. جواب : ۹٫۰۷

۲) طول پاره قوسی از سهمی سمی‌کوبیک $ay^۲=x^۳$ را که از مبدأ مختصات شروع میگردد وبه نقطه‌ای به‌طول $x=۵a$ ختم میشود،حساب کنید. جواب : $\frac{۳۳۵a}{۲۷}$

۳) طول پاره خمی از منحنی $y=\frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۲x}$ راکه طول دوسر آن $x=۱$ و $x=۳$ است، حساب کنید. جواب : $\frac{۱۴}{۳}$

۴) طول‌پاره قوسی‌از سهمی $y^۲=۲px$ راکه یک سر آن رأس سهمی‌و سردیگر آن واقع برخط عمود به محور x ها درکانون سهمی است، حساب کنید.

جواب : $\frac{p\sqrt{۲}}{۲}+\frac{p}{۲}\ln(۱+\sqrt{۲})$

۵) طول پاره خمی‌از منحنی $y^۲=x^۳$ راکه طول دو سر آن $x=۰$ و $x=\frac{۵}{۹}$ است، حساب کنید. جواب : $\frac{۱۹}{۲۷}$

۶) طول پاره قوسی از سهمی $۶y=x^۲$ راکه از مبدأ مختصات شروع میگردد و به‌نقطهٔ $\left(\frac{۸}{۳},۴\right)$ ختم میشود ، حساب کنید. جواب : ۴٫۹۸

۷) مقدار تقریبی طول‌پاره خمی ازمنحنی $۳y=x^۳$ راکه ازمبدأ مختصات‌شروع

میگردد وبه نقطهٔ $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 1\right)$ ختم میشود ، با دستور سمپسون حساب کنید .

جواب : ۱٫۰۹

۸) طول پاره خمی ازمنحنی $y=\ln \sec x$ راکه ازمبدأ مختصات شروع میگردد وبه نقطهٔ $\left(\ln 2\ ,\ \frac{\pi}{3}\right)$ ختم میشود ، حساب کنید . جواب : $\ln(2+\sqrt{3})$

۹) مقدار تقریبی طول پاره‌قوسی از هذلولی $x^2-y^2=9$ راکه از نقطهٔ $(3\ ,\ 0)$ شروع میگردد وبه‌نقطهٔ $(5\ ,\ 4)$ ختم میشود، بادستورسمپسون حساب کنید. جواب : ۴٫۵۶

۱۰) طول طاق‌نمای سهمی $y=4x-x^2$ را که بالای محور x هاست ، حساب کنید . جواب : ۹٫۲۹

۱۱) طول محیط هیپوسیکلوئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را حساب کنید .

جواب : $6a$

۱۲) طول پاره خمی از منحنی زنجیر $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ را که از نقطهٔ $(0, a)$ شروع میگردد و به نقطهٔ $(x\ ,\ y)$ ختم میشود ، حساب کنید .

جواب : $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$

۱۳) . طول یک طاق‌نما ازسیکلوئید $x=r\ arc\ vers\ \frac{y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}$ را حساب کنید . جواب : $8r$

راهنمایی - دستور (H) شمارهٔ ۱۶۲ را بکار ببندید . دراین مسئله $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}$ است .

۱۴) طول پاره خمی‌از منحنی $9ay^2=x(x-3a)^2$ راکه طول دوسر آن $x=0$ و $x=3a$ است ، حساب کنید . جواب : $2a\sqrt{3}$

۱۵) طول پاره خمی از منحنی $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ را که در یکی از

چهار ناحیه قرار دارد ، حساب کنید . جواب : $\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{a+b}$

۱۶) طول پاره خمی از منحنی $e^{y}=\frac{e^{x}+۱}{e^{x}-۱}$ را که بین دو طول $x=a$ و $x=b$ قرار دارد ، حساب کنید . جواب : $ln\frac{e^{۲b}-۱}{e^{۲a}-۱}+a-b$

۱۷) معادلات گسترندهٔ دایره عبارتند از

$$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}$$

طول پاره خمی از این منحنی را که بین دو نقطهٔ نظیر به $\theta=۰$ و $\theta=\theta_{۱}$ قرار دارد ، حساب کنید . جواب : $\frac{۱}{۲}a\theta_{۱}^{۲}$

۱۸) طول قوس خم $\begin{cases} x=e^{\theta}\sin\theta \\ y=e^{\theta}\cos\theta \end{cases}$ را از $\theta=۰$ تا $\theta=\frac{\pi}{۲}$ حساب کنید.

جواب : $\sqrt{۲}\,(e^{\frac{\pi}{۲}}-۱)$

طول قوس خمهای زیر را حساب کنید :

۱۹) خم $y=ln(۱-x^{۲})$ از $x=۰$ تا $x=\frac{۱}{۲}$

۲۰) خم $y=\frac{x^{۲}}{٤}-\frac{۱}{۲}\,ln\,x$ از $x=۱$ تا $x=۲$

۲۱) خم $y=ln\,cosec\,x$ از $x=\frac{\pi}{٦}$ تا $x=\frac{\pi}{۲}$

۲۲) خم $۳x^{۲}=y^{۳}$ از $y=۱$ تا $y=۲۰$

۲۳) یک طاق‌نما از خم $y=\sin x$

۲٤) طول قوس مارپیچ ارشمیدس $(\rho=a\theta)$ را از مبدأ مختصات تا پایان اولین دوران آن حساب کنید .

جواب : $\pi a\sqrt{۱+٤\pi^{۲}}+\frac{a}{۲}\,ln\,(۲\pi+\sqrt{۱+٤\pi^{۲}})$

۲۰) طول‌قوس مارپیچ $\rho=e^{a\theta}$ را از مبدأ مختصات‌تانقطهٔ (θ , ρ) حساب کنید.

جواب : $\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2+1}$

راهنمایی - دستور (J) را بکار ببندید .

۲۶) طول قوس خم $\rho=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ را از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید .

جواب : $[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]a$

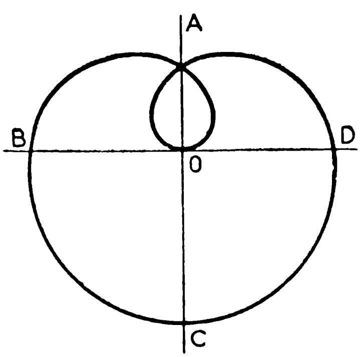
۲۷) طول قوس سهمی $\rho=\frac{2}{1+\cos\theta}$ را از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید.

جواب : $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$

۲۸) طول قوس مارپیچ هذلولی $\rho\theta=a$ را از نقطهٔ (ρ_1 , θ_1) تا نقطهٔ (ρ_2 , θ_2) حساب کنید .

جواب : $\sqrt{a^2+\rho_1^2}-\sqrt{a^2+\rho_2^2}+a\ln\frac{\rho_1(a+\sqrt{a^2+\rho_2^2})}{\rho_2(a+\sqrt{a^2+\rho_1^2})}$

۲۹) نشان دهید که طول خم $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ کلاً برابر $\frac{3\pi a}{2}$ است. نیز نشان دهید که طولهای سه پاره قوس OA ، AB ، BC (شکل ۱۴۲) یک تصاعد حسابی تشکیل میدهند .



شکل ۱۴۲

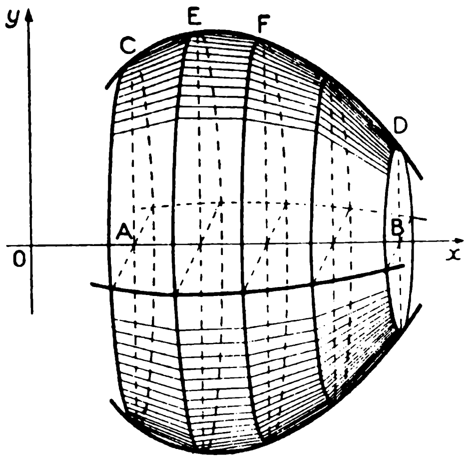
۳۰) طول قوس سیسوئید $\rho=2a\,tg\,\theta\sin\theta$ را از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$ حساب کنید .

۳۱) محیط یک گلبرگ خم $\rho=\sin 2\theta$ را بطور تقریب حساب کنید .

۱۶٤ - محاسبهٔ مساحت سطوح دوار . - اگر پاره خمی از منحنی

$$y=f(x)$$

مانند CD را در حول محوری مانند محور x ها دوران دهیم ، یک سطح دوار پدید میاید. مساحت این سطح را میتوانیم با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب کنیم . برای این کار به طریق زیر عمل مینماییم :



شکل ۱۴۳

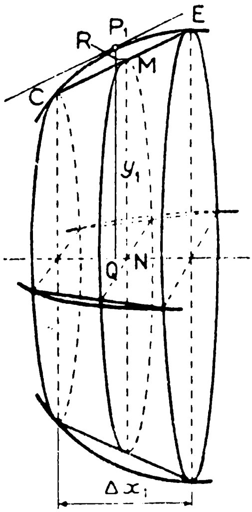
عمل اول - مانند قبل فاصلهٔ AB را به فاصله‌های جزئی Δx_1 ، Δx_2 ، ... تقسیم و از نقاط تقسیم خطوطی به محور x ها عمود میکنیم تا خم را درنقاطی مانند C ، E ، F ، ... ، D قطع کنند . وترهای CE ، EF ، ... را رسم مینماییم . وقتی خم در حول محور x ها میچرخد ، هر وتر یک مخروط ناقص دوار پدید میاورد . مساحت سطح دوار مورد نظر را با حد مجموع سطوح جانبی این مخروطهای ناقص تعریف میکنند .

عمل دوم - برای روشنی بیشتر اولین مخروط ناقص را با مقیاسی بزرگتر رسم میکنیم (شکل ۱۴۴) و نقطهٔ وسط وتر CE را M مینامیم ، بنابراین :

$$\text{مساحت سطح جانبی} = 2\pi NM \cdot CE^{*} \qquad (1)$$

برای آنکه بتوانیم قضیهٔ اساسی را بکار بریم ، باید این حاصل ضرب را به صورت تابعی

* مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوار برابر است با حاصل ضرب محیط مقطع متوسط در مولد آن .



شکل ١٤٤

از طول نقطه‌ای از فاصلهٔ $\triangle x_1$ درآوریم. چنانکه درشمارهٔ ١٦٢ دیده‌ایم، بابکار بردن دستور میانه طول وتر به صورت

$$(٢)\qquad CE=[١+f'(x_1)^٢]^{\frac{١}{٢}}\triangle x_1$$

درمیاید. x_1 طول نقطه‌ای از پاره خم CE مانند $P_1(x_1, y_1)$ است که مماس به خم در آن‌نقطه موازی وتر است. از نقطهٔ M خطی افقی رسم میکنیم تا QP_1 را (که ساربر P_1 و عمود به محور x هاست) در نقطه‌ای مانند R قطع کند. RP_1 را ε_1 * مینامیم. پس

$$(٣)\qquad NM=y_1-\varepsilon_1$$

مقادیر (٢) و (٣) را در معادلهٔ (١) میگذاریم:

$$\text{مساحت سطح جانبی اولین مخروط ناقص}=٢\pi(y_1-\varepsilon_1)[١+f'(x_1)^٢]^{\frac{١}{٢}}\triangle x_1$$

و به همین ترتیب

$$\text{مساحت سطح جانبی دومین مخروط ناقص}=٢\pi(y_٢-\varepsilon_٢)[١+f'(x_٢)^٢]^{\frac{١}{٢}}\triangle x_٢$$

. . . .

$$\text{مساحت سطح جانبی آخرین مخروط ناقص}=٢\pi(y_n-\varepsilon_n)[١+f'(x_n)^٢]^{\frac{١}{٢}}\triangle x_n$$

پس:

$$\sum_{i=١}^{n}٢\pi(y_i-\varepsilon_i)[١+f'(x_i)^٢]^{\frac{١}{٢}}\triangle x_i=\left[\begin{array}{c}\text{مجموع مساحتهای سطوح}\\ \text{جانبی مخروطهای ناقص}\end{array}\right]$$

* باید توجه داشت که ε_1 با $\triangle x_1$ بسمت صفر میل میکند.

این عبارت را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$(٤)\qquad \sum_{i=١}^{n} ٢\pi y_i\,[١+f'(x_i)^٢]^{\frac{١}{٢}}\,\triangle x_i - ٢\pi \sum_{i=١}^{n} \varepsilon_i\,[١+f'(x_i)^٢]^{\frac{١}{٢}}\,\triangle x_i$$

عمل سوم ـ قضیهٔ اساسی را برای مجموع اول بکار میبریم (حدود آن عبارتند از $OA=a$ و $OB=b$) ، داریم :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle x_i \to ٠}} \sum_{i=١}^{n} ٢\pi y_i\,[١+f'(x_i)^٢]^{\frac{١}{٢}}\,\triangle x_i = \int_a^b ٢\pi y[١+f'(x)^٢]^{\frac{١}{٢}}\,dx$$

حد مجموع دوم (٤) وقتی n بسمت بینهایت میل کند صفر است * . بنابراین مساحت سطح دوار حاصل از دوران پاره خم CD در حول محور Ox با دستور زیر تعیین میشود :

$$(K)\qquad S_x = ٢\pi \int_a^b y\left[١+\left(\frac{dy}{dx}\right)^٢\right]^{\frac{١}{٢}} dx$$

دراین دستور S_x همان مساحت سطح مورد نظر است . نیز میتوان این دستور را به صورت زیر نوشت :

---

* این مطلب را میتوان بآسانی ثابت کرد . مجموع دوم را S_n و بزرگترین عدد مجموعهٔ اعداد مثبت $|\varepsilon_١|$ ، $|\varepsilon_٢|$ ، ... ، $|\varepsilon_n|$ را ε مینامیم ، پس

$$S_n \leqslant \varepsilon \sum_{i=١}^{n} [١+f'(x_i)^٢]^{\frac{١}{٢}}\,\triangle x_i$$

است ، مجموع طرف راست ، بنابر شمارهٔ ١٦٢ ، برابر مجموع وترهای CE ، EF ، ... است . اگر این مجموع را l_n بنامیم ، $S_n \leqslant \varepsilon l_n$ است و چون $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon = ٠$ است ، S_n یک بینهایت کوچک است . بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ٠$ است .

$$S_x = ۲\pi \int_a^b y\, ds \qquad \text{(L)}$$

به همین ترتیب اگر محور دوران محور y ها باشد ، دستور زیر را بکار میبندیم :

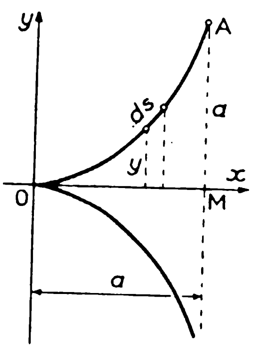
$$S_y = ۲\pi \int_c^d x\, ds \qquad \text{(M)}$$

در دستورهای (L) و (M) ، برحسب آنکه چه چیز را متغیر مستقل انتخاب کرده باشیم ، برای ds یکی از عبارتهای (C) ، (D) یا (E) ی شمارهٔ ۹۵ را بکار میبریم :

$$ds = \left[۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}} dx = \left[۱ + \left(\frac{dx}{dy}\right)^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}} dy = (dx^۲ + dy^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

از عبارت سمت راست وقتی استفاده میکنیم که معادلات پارامتری خم داده شده باشند وهنگام بکار بستن دستور (L) یا (M) نخست ds را حساب مینماییم .

دستور (L) را میتوان بآسانی بخاطر سپرد . برای این کار یک نوار باریک از سطح مورد نظر را که بین دو صفحهٔ عمود به محور دوران قرار دارد درنظر میگیریم و مساحت آن را بطور تقریب با مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دواری با مولد ds و با مقطع متوسطی به محیط $۲\pi y$ برابر فرض میکنیم. بنابراین مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوار و ازآنجا مساحت نوار باریک سطح دوار برابر $۲\pi y\, ds$ است .



شکل ۱۴۵

مثال ۱ - آن پاره خم از سهمی درجهٔ سوم

$$a^۲ y = x^۳ \qquad (۵)$$

را که بین $x = ۰$ و $x = a$ قرار دارد درحول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح دوار حاصل را پیدا کنید .

حل - از معادلهٔ خم مشتق میگیریم :

$$y'=\frac{3x^2}{a^2}$$

بنابراین
$$ds=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{a^2}(a^4+9x^4)^{\frac{1}{2}}dx$$

و
$$\text{جزء مساحت}=2\pi y\, ds=\frac{2\pi}{a^4}(a^4+9x^4)^{\frac{1}{2}}x^3dx$$

پس بنابر دستور (L) :

$$S_x=\frac{2\pi}{a^4}\int_0^a (a^4+9x^4)^{\frac{1}{2}}x^3dx=\frac{\pi}{27a^4}\left[(a^4+9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$\text{جواب :}\quad =\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)a^2=3{,}6a^2$$

مثال ۲- بیضی $x=a\cos\varphi$ ، $y=b\sin\varphi$ رادرحول محور x ها دوران‌دهید و مساحت بیضوی حاصل را حساب کنید .

حل - دراین مثال
$$dx=-a\sin\varphi\, d\varphi \quad , \quad dy=b\cos\varphi\, d\varphi$$

و
$$ds=(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

پس
$$\text{جزء مساحت}=2\pi y\, ds=2\pi b(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\, d\varphi$$

و
$$\frac{1}{2}S_x=2\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\, d\varphi \qquad (6)$$

برای محاسبهٔ آن تغییر متغیر $u=\cos\varphi$ میدهیم ، $du=-\sin\varphi\, d\varphi$ و

$$a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi=a^2(1-\cos^2\varphi)+b^2\cos^2\varphi=a^2-(a^2-b^2)u^2$$

میشود. بنابراین اگر متغیرجدید و حدود $u=1$ و $u=0$ را بکار بریم(شمارهٔ ۱۰۰) :

$$\frac{1}{2} S_x = 2\pi b \int_0^1 [a^2 - (a^2 - b^2)u^2]^{\frac{1}{2}} du \qquad (a > b)$$

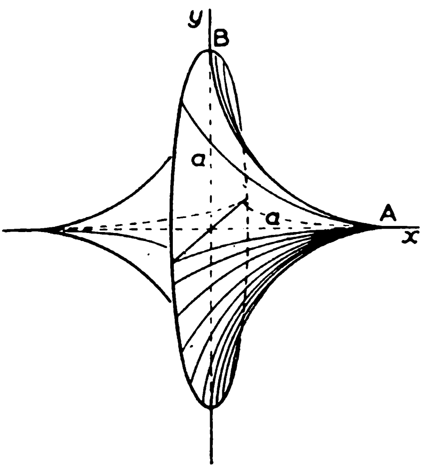
این انتگرال را با مقایسه با انتگرال نمونهٔ (۲۲) محاسبه میکنیم :

جواب : $S_x = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \, arc\ sin\, e$

دراین دستور e خروج از مرکز بیضی و برابر $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ است .

مثال ۳- هیپوسیکلوئید

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ رادرحول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید .



شکل ١٤٦

حل - دراین مثال

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

و

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

و

$$ds = \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

این مقادیر را در دستور (L) میگذاریم . چون سطحی که از دورانِ پاره خم BA پدید میاید ، نیمی از سطح مورد نظر است ، پس :

$$\frac{1}{2}S_x=2\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,x^{-\frac{1}{3}}dx$$

تابع زیر علامت انتگرال به‌ازای $x=0$ منفصل است (زیرا بینهایت میشود) ، لذا تعریف (۱) شمارهٔ ۱۰٤ را بکار میبریم ، داریم :

$$\frac{1}{2}S_x=\frac{6}{5}\pi a^2$$

یا

$$S_x=\frac{12}{5}\pi a^2$$

تمرین

۱) دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ را درحول یکی از قطرهای آن دوران دهید و مساحت کرهٔ حاصل را حساب کنید .
جواب : $4\pi r^2$

۲) مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(a\,,\,b)$ وصل کنید ، پاره خط OA را در حول محور x هادوران دهید ومساحت سطح جانبی مخروط حاصل را باانتگرال گیری حساب‌نمایید.

جواب : $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$

۳) پاره‌ای از خط $y=2x$ راکه بین دو طول $x=0$ و $x=2$ قرار دارد ، یک بار درحول محور Ox و یک‌بار در حول محور Oy دوران دهید و مساحت سطح جانبی این‌دو مخروط را باانتگرال گیری حساب کنید. درستی‌جوابهایتان را باراه هندسی بیازمایید.

٤) پاره‌ای از خط $2y=x-4$ راکه بین دو طول $x=0$ و $x=5$ قرار دارد در حول Ox دوران‌دهیدو مساحت سطح جانبی مخروط ناقص حاصل‌را با انتگرال گیری حساب کنید . درستی جوابتان را با راه هندسی بیازمایید .

۵) پاره‌ای‌از سهمی $y=x^2$ را که بین دو عرض $y=0$ و $y=2$ قرار دارد در حول محور Oy دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{13}{3}\pi$

۶) پاره‌ای از سهمی $y=x^{۲}$ را که بین دو نقطهٔ $(۰ , ۰)$ و $(۲ , ۴)$ قرار دارد در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

۷) پاره‌ای از سهمی $y^{۲}=۴-x$ را که در ناحیهٔ اول قرار دارد در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید. جواب : ۳۶ر۱۸

۸) پاره‌ای از سهمی $y^{۲}=۲px$ را که بین دو طول $x=۰$ و $x=۴p$ قرار دارد در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب : $\frac{۵۲}{۳}\pi p^{۲}$

۹) پاره‌ای از خم $y=x^{۳}$ را که بین دو نقطهٔ $(۰ , ۰)$ و $(۲ , ۸)$ قرار دارد در حول محور Oy دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

هریک از پاره خمهای زیر را در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید :

۱۰) خم $۹y=x^{۳}$ از $x=۰$ تا $x=۲$ — جواب : $\frac{۹۸}{۸۱}\pi$

۱۱) خم $y^{۲}=۹x$ از $x=۰$ تا $x=۴$ — ۴۹π

۱۲) خم $y^{۲}=۲۴-۴x$ از $x=۳$ تا $x=۶$ — $\frac{۵۶}{۳}\pi$

۱۳) خم $۶y=x^{۲}$ از $x=۰$ تا $x=۴$ — $\frac{\pi}{۷۲}(۸۲۰-۸۱\ln ۳)$

۱۴) خم $y=e^{-x}$ از $x=۰$ تا $x=\infty$ — $\pi[\sqrt{۲}+\ln(۱+\sqrt{۲})]$

۱۵) حلقهٔ خم $۹ay^{۲}=x(۳a-x)^{۲}$ — $۳\pi a^{۲}$

۱۶) خم $۶a^{۲}xy=x^{۴}+۳a^{۴}$ از $x=a$ تا $x=۲a$ — $\frac{۴۷}{۱۶}\pi a^{۲}$

۱۷) یک حلقه از خم $۸a^{۲}y^{۲}=a^{۲}x^{۲}-x^{۴}$ — $\frac{۱}{۴}\pi a^{۲}$

۱۸) خم $y^{۲}+۴x=۲\ln y$ از $y=۱$ تا $y=۲$ — $\frac{۱۰}{۳}\pi$

۱۹) سیکلوئید $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ جواب : $\frac{64}{3}\pi a^2$

۲۰) کاردیوئید $\begin{cases} x=a(2\cos\theta-\cos 2\theta) \\ y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta) \end{cases}$ $\frac{128}{5}\pi a^2$

۲۱) خم $y^2=4x$ از $x=0$ تا $x=3$

۲۲) دایرهٔ $x^2+y^2=4$ از $x=1$ تا $x=2$

۲۳) بیضی $x^2+4y^2=36$

۲۴) بیضی $9x^2+4y^2=36$

هریک از پاره خمهای زیر را در حول محور Oy دوران دهید ومساحت سطح حاصل را حساب کنید :

۲۵) خم $x=y^3$ از $y=0$ تا $y=3$ جواب : $\frac{\pi}{27}[(730)^{\frac{3}{2}}-1]$

۲۶) خم $y=x^3$ از $y=0$ تا $y=3$

۲۷) خم $6a^2xy=x^4+3a^4$ از $x=a$ تا $x=3a$ $(20+\ln 3)\pi a^2$

۲۸) خم $4y=x^2-2\ln x$ از $x=1$ تا $x=4$ 24π

۲۹) خم $2y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x-\sqrt{x^2-1})$
از $x=2$ تا $x=5$ 78π

۳۰) خم $y^2=x^3$ از $x=0$ تا $x=8$ ۷۱۳

۳۱) خم $4y=x^2$ از $y=0$ تا $y=4$ ۳۲) بیضی $x^2+4y^2=16$

۳۳) خم $9x=y^3$ از $y=0$ تا $y=3$ ۳۴) بیضی $4x^2+y^2=64$

هریک از خمهای زیر را در حول محورهای مختصات دوران دهید و مساحت سطوح حاصل را حساب کنید :

۳۵) بیضی $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$

جواب : درحول Oy $\quad 2\pi a^{2}+\frac{\pi b^{2}}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$

یادداشت - e خروج از مرکز بیضی و برابر $\frac{\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{a}$ است .

۳۶) منحنی زنجیر $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ از $x=0$ تا $x=a$ (شکل خم را در فصل ۲۶ ببینید) .

جواب : درحول Ox $\quad \frac{\pi}{4}a^{2}(e^{2}+4-e^{-2})$ ، درحول Oy $\quad 2\pi a^{2}(1-e^{-1})$

۳۷) خم $x^{4}+3=6xy$ از $x=1$ تا $x=2$

جواب : در حول Ox $\quad \frac{47}{16}\pi$ ، در حول Oy $\quad \pi(\frac{15}{4}+\ln 2)$

۳۸) خم $\begin{cases} x=e^{\theta}\sin\theta \\ y=e^{\theta}\cos\theta \end{cases}$ از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$

جواب : در حول Ox $\quad \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi}-2)$ ، درحول Oy $\quad \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2e^{\pi}+1)$

۳۹) بیضی $3x^{2}+4y^{2}=3a^{2}$

جواب : درحول Ox $\quad \left(\frac{3}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\pi a^{2}$ ، درحول Oy $\quad \frac{\pi a^{2}}{2}(4+3\ln 3)$

۴۰) شیب تراکتریس در هرنقطه از قسمتی از آن که در ناحیهٔ اول واقع است ، برابر $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{\sqrt{c^{2}-y^{2}}}$ است . یک قطعه از آن را که بین دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) قرار دارد در حول محور Ox دوران دهید و ثابت کنید که مساحت سطح حاصل برابر $2\pi c(y_1-y_2)$ است (آخرین شکل فصل ۲۶ را ببینید) .

۴۱) سطح واقع در ناحیهٔ اول و محدود به خمهای $y=x^۳$ و $y=۴x$ را در حول محور Ox دوران دهید و مساحت تمام سطح جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : ۴۱۰٫۳

۴۲) سطح محدود به محور y ها و خمهای $x^۲=۴y$ و $x-۲y+۴=۰$ را در حول محور Oy دوران دهید و مساحت تمام سطح جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : ۱۴۱٫۵

۴۳) پاره‌ای از خم $y=\frac{x^۳}{۶}+\frac{۱}{۲x}$ را که بین دو طول $x=۱$ و $x=۳$ قرار دارد در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{۲۰۸\pi}{۹}$

۴۴) سطح محدود به‌دو سهمی $y^۲=۴x$ و $y^۲=x+۳$ را در حول محور Ox دوران دهید و مساحت تمام سطح جسم حاصل را حساب کنید .

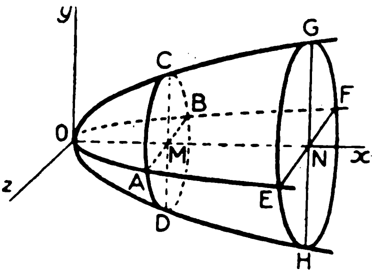
جواب : $\frac{\pi}{۶}(۱۷\sqrt{۱۷}+۳۲\sqrt{۲}-۱۷)=۵۱٫۵۳$

۴۵) یک طاق‌نما ازخم $y=\sin x$ را در حول محور Ox دوران دهید و مساحت سطح جسم حاصل را حساب کنید . جواب : ۱۴٫۴۲

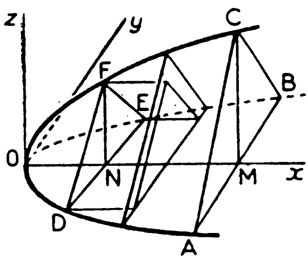
۱۶۵- محاسبهٔ حجم اجسامی که مقاطع موازی آنها در دست است. - در شمارهٔ ۱۶۰ حجم جسم دوار (مانند شکل ۱۴۷) را حساب کردیم . اگر این جسم را با صفحاتی عمود به محور x ها قطع کنیم ، تمام مقاطع دایره است و اگر معادلهٔ خم مولد ، OCG ، را $y=\varphi(x)$ و $OM=x$ و $MC=y$ فرض کنیم ،

$$(۱)\qquad \pi y^۲=\pi[\varphi(x)]^۲=(\text{ACBD مساحت مقطع})$$

است . بنابراین **مساحت مقطع جسم که با صفحه‌ای عمود به محور Ox بریده شده باشد ، تابعی از فاصلهٔ مبدأ مختصات از صفحهٔ قاطع ، یعنی تابعی از x ، است .**



شکل ۱۴۷



شکل ۱۴۸

اکنون به محاسبهٔ حجم جسمی میپردازیم که دوار نیست ولی اگر آن را با صفحات موازی ببریم ، مساحت هرمقطع برحسب تابعی از فاصلهٔ آن تا نقطهٔ ثابتی (مانند O) در دست است .

جسمی را که در شکل ۱۴۸ می‌بینید با صفحات متساوی‌الفاصله و عمود به محور x ها به n ورق به ضخامت Δx تقسیم میکنیم . اگر FDE یک‌وجه از یکی از این ورقها باشد و طول ON را x بنامیم ، بنابر فرض

$$\text{FDE مساحت} = A(x) \qquad (۲)$$

و مقدار تقریبی حجم این ورق

(ارتفاع × قاعده)

$$(\text{FDE مساحت}) \cdot \Delta x = A(x)\Delta x \qquad (۳)$$

است . مجموع حجم این ورق‌ها $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$ و حجم خواسته شده بروشنی برابر حد این مجموع است . پس بنابر قضیهٔ اساسی

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \int A(x)dx$$

است و دستور زیر بدست میاید :

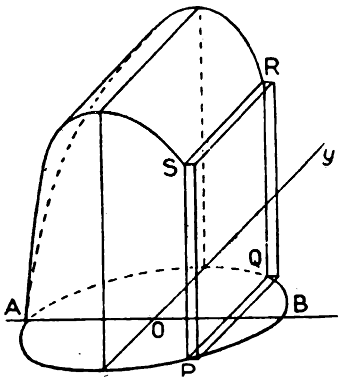
$$V = \int A(x)dx \qquad (N)$$

دراین دستور $A(x)$ با رابطهٔ (۲) تعریف شده است .

جزء حجم ، منشوری (وگاهی‌استوانه‌ای) به ارتفاع dx و سطح قاعدهٔ $A(x)$ است، بنابراین :

$$dV = A(x)dx$$

مثال ۱ - جسمی است که پایهٔ آن دایره‌ای به شعاع r است و مقاطع عمود به یک قطر ثابت دایرهٔ پایه همگی مربع‌اند . حجم این جسم را حساب کنید .



شکل ۱۴۹

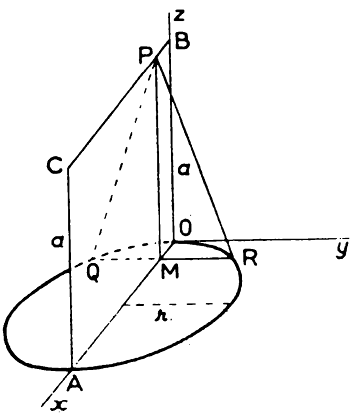
حل - درصفحهٔ مختصات دایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ را پایهٔ جسم و قطر عمود به صفحات مقطع را Ox فرض میکنیم . بنابر فرض مقطع PQRS که عمود به Ox است ، مربع است وچون $PQ=2y$ است ، مساحت این مربع $4y^2$ است (درشکل ۱۴۹ آن قسمت از جسم که طرف راست مقطع PQRS قرار دارد ، برداشته شده است) . بدین ترتیب

$$A(x)=4y^2=4(r^2-x^2)$$

است و بنابر دستور (N)

$$\text{جواب :}\quad \text{حجم جسم}=4\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}r^3$$

مثال ۲ - حجم کنوئید* قائمی را حساب کنید که قاعدهٔ آن دایره‌ای به شعاع r و ارتفاع آن a است .



شکل ۱۵۰

حل - قاعدهٔ کنوئید را درصفحهٔ مختصات طوری قرار میدهیم (مانند شکل ۱۵۰) که معادلهٔ آن به صورت $(x-r)^2+y^2=r^2$ درآید . مقطع PQR را که عمود به Ox است در نظر میگیریم . این مقطع یک مثلث متساوی‌الساقین ، $MP=a$ و $RM=\sqrt{2rx-x^2}$ است .

مقدار RM همان مقدار y است که‌ازمعادلهٔ دایرهٔ ORAQ بدست آمده است. بنابراین مساحت سطح مقطع

---

* Conoid

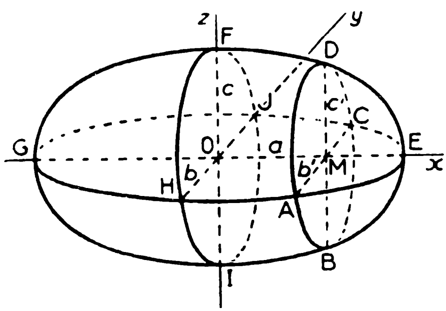
$$A(x)=a\sqrt{2rx-x^2}$$

است . این مقدار را در دستور (N) میگذاریم ، حجم کنوئید بدست میاید :

$$V=a\int_0^{2r}\sqrt{2rx-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi r^2 a \quad : \text{جواب}$$

این حجم نصف حجم استوانه‌ای است که دارای همین قاعده و ارتفاع باشد .

مثال ۳- حجم بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را تنها با محاسبهٔ یک انتگرال پیدا کنید .



شکل ۱۵۱

حل - یک مقطع عمود به Ox مانند ABCD رادرنظر میگیریم و نصف قطرهای آن را b' و c' مینامیم . معادلهٔ بیضی HEJG در صفحهٔ xOy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

است . از این معادله مقدار y (یعنی b') را برحسب تابعی از x (یعنی برحسب تابعی از OM) بدست میاوریم :

$$b'=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

به همین ترتیب از معادلهٔ بیضی EFGI واقع در صفحهٔ xOz

$$c'=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

بدست میاید . بنابراین مساحت مقطع (ABCD)

$$\pi b'c' = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) = A(x)$$

است . این مقدار را در دستور (N) میگذاریم ، حجم بیضوی پیدا میشود :

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi abc$$ جواب :

تمرین

۱) پایهٔ جسمی دایره‌ای به شعاع r است . خط AB یکی از قطرهای پایهٔ آن است. حجم این جسم را حساب کنید درصورتیکه میدانیم مقاطع عمود به خط AB همگی

الف ـ مثلثهای متساوی‌الاضلاع اند . جواب : $\frac{4}{3}r^3\sqrt{3}$

ب ـ مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای هستند که وترآنها برپایهٔ جسم قرار دارد.

جواب : $\frac{4}{3}r^3$

پ ـ مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای هستند که یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آنها برپایهٔ جسم قرار دارد . جواب : $\frac{8}{3}r^3$

ت ـ مثلثهای متساوی‌الساقینی هستند که ارتفاع آنها ۲۰ اینچ است .

جواب : $10\pi r^2$

ث ـ مثلثهای متساوی‌الساقینی هستند که ارتفاع آنها برابر پایهٔ آنهاست.

جواب : $\frac{8}{3}r^3$

۲) پایهٔ جسمی یک بیضی به‌قطر بزرگتر ۲۰ اینچ و قطر کوچکتر ۱۰ اینچ است. حجم این جسم را حساب کنید درصورتیکه میدانیم مقاطع عمود به قطر بزرگتر پایهٔ آن همگی

الف ـ مربع اند . جواب : ۱۳۳۳ اینچ مکعب

ب ـ مثلثهای متساوی‌الاضلاع اند . جواب : ۵۷۷٫۳ اینچ مکعب

پ ـ مثلثهای متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۱۰ اینچ اند .

جواب : ٤٫۷۸۵ اینچ مکعب

۳) پایهٔ جسمی قطعه‌ای از یک سهمی است که بایک وتر از آن بریده شده است . وتر مذکور به محور سهمی عمود است و به فاصلهٔ ۸ اینچ از رأس آن قرار دارد . طول این وتر ۱۶ اینچ است . حجم جسم را حساب کنید درصورتیکه میدانیم مقاطع عمود به محور پایه همگی

الف ـ مربع اند . جواب : ۱۰۲٤ اینچ مکعب

ب ـ مثلثهای متساوی‌الاضلاع اند . ٤٫٤۳ ٤ اینچ مکعب

پ ـ مثلثهای متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۱۰ اینچ اند. ٤۲٦٫۷ اینچ مکعب

٤) بزرگترین مقطع مسطح یک توپ رگبی * که ازیک درز آن میگذرد یک بیضی به قطرهای ۱٦ و ۸ اینچ است. حجم توپ‌را حساب کنید درصورتیکه میدانیم مقاطع عمود به بزرگترین محور توپ همگی : الف ـ مربع اند ، ب ـ دایره‌اند .

جواب : الف ـ $\frac{۱}{۳}$ ۳٤۱ اینچ مکعب ، ب ـ ۵۳۵٫۹ اینچ مکعب

۵) از یک استوانهٔ‌دوار به قطر ۱۰ اینچ ، با دو صفحه ، قطعه‌ای جدا کرده‌ایم . صفحهٔ اول به محور استوانه عمود است . صفحهٔ دوم از یک قطر مقطع صفحهٔ اول میگذرد و با این صفحه زاویهٔ °٤۵ میسازد . حجم این جسم را حساب کنید .

جواب : $\frac{۲۵۰}{۳}$ اینچ مکعب

٦) محورهای دو استوانهٔ دوار که شعاع هردوی آنها r است یکدیگر را قطع میکنند ودرنقطهٔ تقاطع بیکدیگرعمودند. حجم مشترک بین‌این‌دو استوانه را حساب کنید .

جواب : $\frac{۱٦}{۳} r^۳$

۷) سطح محدود بین هرزوج خم زیر را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید :

* Rugby

الف - $y=6x-x^2$ و $y=x$ جواب : $\frac{125}{3}\pi$

ب - $y^2=4x$ و $2x-y=4$ $\frac{64}{3}\pi$

۸) مثلث متساوی‌الاضلاعی طوری حرکت میکند که صفحهٔ آن همواره عمود به محور x ها باقی میماند و یک رأس آن خم $y^2=16ax$ و یک رأس دیگر آن خم $y^2=4ax$ را میپیماید . صفحهٔ مثلث از $x=0$ تا $x=a$ تغییرمکان میدهد . حجم جسم حاصل از حرکت مثلث را حساب کنید . جواب : $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

۹) مستطیلی ازنقطهٔ ثابت O شروع به حرکت میکند. یک ضلع آن ، درهرلحظه، برابر فاصلهٔ صفحهٔ مستطیل ازنقطهٔ O و ضلع دیگر آن برابرمجذور این فاصله است. مستطیل از نقطهٔ O دو فوت دور میشود . حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : ۴ فوت مکعب

۱۰) صفحهٔ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای از ابتدا تا انتهای قطر بزرگتر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تغییرمکان میدهد و همواره عمود به این قطر باقی میماند . وتر مثلث مذکور درهرلحظه همان‌وتر بیضی است. حجم جسم حاصل از حرکت این مثلث را حساب کنید . جواب : $\frac{4}{3}ab^2$

در هریک از مسائل ۱۱ تا ۱۶ حجم محدود بین سطوح مذکور را حساب کنید :

۱۱) $z=x^2+4y^2$ ، $z=1$ جواب : $\frac{\pi}{4}$

۱۲) $4x^2+9z^2+y=0$ و $y+1=0$ $\frac{\pi}{12}$

۱۳) $x^2+4y^2=1+z^2$ و $z+1=0$ و $z-1=0$ $\frac{4\pi}{3}$

۱۴) $25y^2+9z^2=1+x^2$ و $x=0$ و $x=2$ $\frac{14\pi}{45}$

۱۵) $x^2+4y^2+9z^2=1$ جواب : $\frac{2\pi}{9}$

۱۶) $z^2=x^2+9y^2$ و $z+1=0$ $\frac{\pi}{9}$

۱۷) سهمی $z=4-x^2$ در صفحهٔ xz و دایرهٔ $x^2+y^2=4$ در صفحهٔ xy مفروضند. از هرنقطهٔ واقع برآن قسمت از سهمی که بالای صفحهٔ xy است ، دوخط موازی صفحهٔ yz ومتکی به دایرهٔ مذکوردرنظر میگیریم. حجم جسمی را که بین دسته‌خط اخیرو صفحهٔ xy محدود است‌حساب کنید. جواب : 6π

۱۸) حجم جسم محدود به هیپربلوئید یک پارچهٔ $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1$ و صفحات $x=0$ و $x=a$ را حساب کنید . جواب : $\frac{4}{3}\pi abc$

۱۹) حجم محدود به یک دامن * از هیپر بلوئید دو پارچهٔ $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ و صفحهٔ $x=2a$ را حساب کنید . جواب : $\frac{4}{3}\pi abc$

۲۰) حجم‌محدودبه سطح $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را حساب کنید .

جواب : $\frac{8}{5}\pi abc$

تمرین اضافی

۱) مساحت حلقهٔ خم $y^2=(x+4)(x^2-x+2y-4)$ را حساب کنید .

جواب : $\frac{256}{15}$

۲) نقطهٔ متحرك M روی سهمی به کانون F طوری‌حرکت میکند که مساحت‌سطح جاروب شده باشعاع حامل FM متناسب بازمان است. نقطهٔ M برای رفتن از رأس‌سهمی

---

* Nappe

به نقطهٔ M' که طول آن برابر طول F است ، یک ثانیه وقت میگذارد . جای نقطهٔ را در پایان هشتمین ثانیه پس‌ازعبور از M' پیدا کنید .

جواب : [فاصلهٔ MF] $= M'F\ \frac{5}{2}$

۳) طول محیط شکلی را که به خط $y = 1$ و خم $4y = e^{2x} + e^{-2x}$ محدود است حساب کنید . جواب : $3{,}05 = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$

۴) پاره خم OP ازمنحنی $xy = x - y$ مبدأ مختصات‌را به نقطهٔ $P(x_1 , y_1)$ وصل مینماید و با محور x ها و خط $x = x_1$ سطحی به نام A را محدود میکند . همین پاره خم با محور y ها و خط $y = y_1$ سطح دیگری به نام B را محدود مینماید . نشان دهید که حجم جسم حاصل‌از دوران A در حول محور x ها برابر حجم جسم حاصل ازدوران B در حول محور y هاست .

۵) سطح محدود به خم $16y^2 = (x+4)^3$ و خط مماس به آن در نقطهٔ (۱۶ , ۱۲) را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

جواب : $\frac{1024}{9}\pi$

۶) پایهٔ جسمی‌سطح محدود به سهمی $y^2 = 2px$ و وتری عمود به محور x ها و ماربر کانون سهمی است . مقاطع جسم که با صفحات عمود به وتر مذکور بدست میایند، همگی مستطیل‌اند و ارتفاع هرمستطیل برابر فاصلهٔ آن تا محورسهمی است . حجم جسم حاصل را حساب کنید. جواب : $\frac{1}{4}p^3$

۷) بیضی (E) به‌معادلهٔ $9x^2 + 25y^2 = 225$ مفروض است. این‌بیضی درون جسمی قرار دارد که وقتی‌آن را با صفحات‌عمود به محور x ها ببریم ، جمیع مقاطع‌بیضی‌اند. دو کانون هریک ازاین‌بیضی‌ها روی بیضی (E) و دو قطر هریک‌از آنها متناسب با قطرهای بیضی (E) هستند . حجم این جسم را حساب کنید . جواب : $\frac{225}{4}\pi$

۸) اگر (x , y) نقطه‌ای از خم شمارهٔ ۱۵۹ (شکل ۱۲۹) ، O مبدأ مختصات و OA محور x ها باشد ، نشان دهید که‌دستور (D) را میتوان با استفاده از تبدیلات (۵)

صفحهٔ ۸ به صورت

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}\int (x\,dy - y\,dx) \qquad (۱)$$

درآورد . حدود انتگرال از روی مختصات دو سر پاره خم تعیین میشوند .

۹) با استفاده از یک شکل و دستورهای (B) و (C) ی شمارهٔ ۱۰۸ دستور مسئلهٔ قبل را مستقیماً بدست آورید .

دستور (۱) مسئلهٔ ۸ بخصوص وقتی بکار میرود که معادلات پارامتری خم در دست باشند . مساحت هریک از سطوح زیر را با دستور (۱) حساب کنید :

۱۰) معادلهٔ گسترندهٔ یک دایره به صورت زیر است :

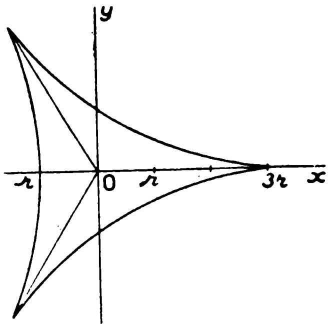
$$x = r\cos\theta + r\theta\sin\theta \quad , \quad y = r\sin\theta - r\theta\cos\theta$$

مساحت سطح بین محور x هاواین گسترنده را (که مانند شکل ماقبل آخر فصل ۲۶ بسمت چپ باز شده است) حساب کنید .

۱۱) مساحت هیپوسیکاوئید

$$\begin{cases} x = ۲r\cos\theta + r\cos ۲\theta \\ y = ۲r\sin\theta - r\sin ۲\theta \end{cases}$$

را حساب کنید . این هیپوسیکلوئید سه نقطهٔ بازگشت دارد (شکل ۱۵۲) .



شکل ۱۵۲

جواب : $۲\pi r^۲$

۱۲) یک میلهٔ مستقیم وهمگن نقطهٔ مادی P راکه در امتداد میله است ولی روی آن نیست بنابر قانون جاذبه بسمت خود میکشد . نشان دهیدکه اگر تمام جرم میله در نقطه‌ای ازمیله متمرکزمیشدکه فاصلهٔ آن ازدوسر میله متناسب با فاصلهٔ دو سر میله از نقطهٔ P میبود ، مقدارکشش عوض نمیشد .

۱۳) مساحت حلقهٔ فلیوم دکارت به معادلهٔ

$$x^۳ + y^۳ = ۳axy$$

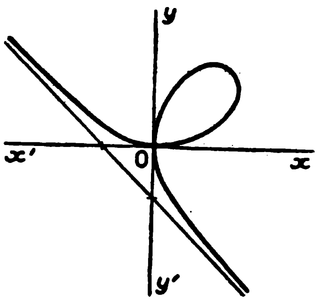
را حساب کنید .

راهنمایی - اگر $y=tx$ بگذارید، معادلات پارامتری خم و dx به صورت زیر در میایند:

$$x=\frac{۳at}{۱+t^۳}$$

$$y=\frac{۳at^۲}{۱+t^۳}$$

$$dx=\frac{۱-۲t^۳}{(۱+t^۳)^۲}\,۳a\,dt$$



شکل ۱۰۳

دراین صورت دو حد انتگرال برای t ، صفر و ∞ است .

فصل شانزدهم

راههای گوناگون محاسبهٔ انتگرالها

۱۶۶ - مقدمه . - راههای گوناگون محاسبهٔ انتگرالها سرانجام منجر به استفاده از یک جدول انتگرال میشود . اگر انتگرال مورد نظر شبیه به هیچیک از انتگرالهای جدول نباشد ، باید آن را با تغییر شکل به صورت یکی از آنها درآورد . برای این کار میتوان از راههای زیر استفاده کرد :

الف - راه جزء به جزء (شمارهٔ ۱۳۶) .

ب - بکار بستن نظریهٔ کسرهای گویا .

پ - استفاده از تغییر متغیرهای مناسب .

ما دراین فصل به مطالعهٔ راههای ب و پ میپردازیم .

۱۶۷ - انتگرال کسرهای گویا . - کسر گویا کسری است که صورت و مخرج آن کثیرالجمله های تامی از متغیر باشند ، یعنی در هیچیک از جملات صورت و مخرج متغیر به قوهای منفی یا کسری نرسیده باشد . اگر درجهٔ صورت مساوی یا بیشتر از درجهٔ مخرج باشد ، باید صورت کسر را به مخرج آن تقسیم کرد و بدین ترتیب کسر را به مجموع یک کثیرالجمله و یک کسر که درجهٔ صورت آن از درجهٔ مخرجش کمتر باشد ، تبدیل نمود . مثلاً

$$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}=x^2+x-3+\frac{5x+3}{x^2+2x+1}$$

محاسبهٔ انتگرال جملات غیرکسری آسان است . دراینجا به محاسبهٔ انتگرال کسر سمت راست میپردازیم .

برای محاسبهٔ انتگرال چنین کسری باید آن را به کسرهای سادهتری تبدیل کرد ، یعنی باید بجای آن مجموع جبری کسرهایی را گذاشت که محاسبهٔ انتگرال آنها ممکن است . در جبر نشان میدهند که این کار وقتی میسر است که مخرج کسر قابل تجزیه به عوامل اول حقیقی باشد .

حالت I . ـ عوامل مخرج همه از درجهٔ اول اند و هیچیک از آنها تکرار نشده است .

در این حالت به هریک از عوامل خطی تکرار نشده مانند $x-a$ یک کسر ساده به صورت

$$\frac{A}{x-a}$$

که در آن A عدد ثابتی است ، نظیر میشود و کسر داده شده به صورت مجموع جبری کسرهایی به این شکل درمیاید . مثالهای زیر این روش را نشان میدهند .

مثال ـ انتگرال $\int \frac{(۲x+۳)dx}{x^۳+x^۲-۲x}$ را پیدا کنید.

حل ـ چون عوامل مخرج x ، $x-۱$ و $x+۲$ هستند ، مینویسیم * :

$$\frac{۲x+۳}{x(x-۱)(x+۲)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{x+۲} \qquad (۱)$$

A و B و C اعدادی ثابتند و باید آنها را پیدا کرد .

در تساوی (۱) مخرجها را ازبین میبریم ، داریم :

$$۲x+۳=A(x-۱)(x+۲)+B(x+۲)x+C(x-۱)x \qquad (۲)$$

$$۲x+۳=(A+B+C)x^۲+(A+۲B-C)x-۲A$$

چون این معادله یک اتحاد است ، ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم، سه معادلهٔ زیر بدست میایند :

$$\begin{cases} A+B+C=۰ \\ A+۲B-C=۲ \\ -۲A=۳ \end{cases} \qquad (۳)$$

دستگاه معادلات (۳) را حل میکنیم :

$$A=-\frac{۳}{۲} \quad , \quad B=\frac{۵}{۳} \quad , \quad C=-\frac{۱}{۶}$$

* در تجزیهٔ کسر نه علامت $\int$ و نه علامت دیفرانسیل dx ، هیچیک را نمینویسیم .

این مقادیر را در (۱) میگذاریم :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$$

پس

$$\int\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)+\ln c$$

جواب : $=\ln\dfrac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}$

باروش کوتاهتردیگری‌نیز میتوان مقادیر A و B و C را از رابطهٔ (۲) بدست‌آورد .

عامل اول را مساوی صفر قرار میدهیم : $x=0$ ، پس $3=-2A$ و $A=-\frac{3}{2}$ میشود .

عامل‌دوم‌رامساوی‌صفر قرارمیدهیم : $x-1=0$ ، پس $x=1$ وازآنجا $3B=5$ و $B=\frac{5}{3}$ میشود .

عامل سوم را مساوی صفر قرار میدهیم : $x+2=0$ ، پس $x=-2$ وازآنجا $6C=-1$ و $C=-\frac{1}{6}$ میشود .

در تمام کسرهای گویا **عدهٔ اعداد ثابتی که باید پیدا کرد برابر درجهٔ مخرج است .**

حالت II . - عوامل مخرج همه از درجهٔ اول‌اند و بعضی از آنها تکرار شده‌اند .

به هرعامل خطی که n مرتبه تکرارشده و به صورت $(x-a)^n$ است ، مجموع n کسر ساده به صورت

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{L}{x-a}$$

که در آنها A و B و ... و L اعدادی ثابتند ، نظیر میشود و انتگرال این کسرهای ساده بآسانی بدست میاید . مثلاً

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{(۱-n)(x-a)^{n-۱}} + C$$

مثال - انتگرال $\int \frac{x^۳+۱}{x(x-۱)^۳}\,dx$ را پیدا کنید .

حل - چون عامل $x-۱$ سه مرتبه تکرار شده است ، مینویسیم :

$$\frac{x^۳+۱}{x(x-۱)^۳} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-۱)^۳} + \frac{C}{(x-۱)^۲} + \frac{D}{x-۱}$$

مخرجها را ازبین میبریم :

$$x^۳+۱ = A(x-۱)^۳ + Bx + Cx(x-۱) + Dx(x-۱)^۲$$

$$x^۳+۱ = (A+D)x^۳ + (-۳A+C-۲D)x^۲ + (۳A+B-C+D)x - A$$

ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم ، دستگاه معادلات زیر بدست میاید :

$$A+D=۱$$

$$-۳A+C-۲D=۰$$

$$۳A+B-C+D=۰$$

$$-A=۱$$

پس از حل دستگاه داریم : $A=-۱\ ,\ B=۲\ ,\ C=۱\ ,\ D=۲$

و
$$\frac{x^۳+۱}{x(x-۱)^۳} = -\frac{۱}{x} + \frac{۲}{(x-۱)^۳} + \frac{۱}{(x-۱)^۲} + \frac{۲}{x-۱}$$

پس
$$\int \frac{x^۳+۱}{x(x-۱)^۳}\,dx = -\ln x - \frac{۱}{(x-۱)^۲} - \frac{۱}{x-۱} + ۲\ln(x-۱) + C$$

جواب :
$$= -\frac{x}{(x-۱)^۲} + \ln\frac{(x-۱)^۲}{x} + C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = ln \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C$

۲) $\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x} = ln\, x^3(x^2-1) + C$

۳) $\int \frac{(4x+3)dx}{4x^3+8x^2+3x} = -\frac{1}{2}\, ln \frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2} + C$

۴) $\int \frac{(4x^3+2x^2+1)dx}{4x^3-x} = x + \frac{1}{2}\, ln \frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2} + C$

۵) $\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2} = ln\,(x+1)(x-1)^2 - \frac{1}{x+1} + C$

۶) $\int \frac{z^2dz}{(z-1)^3} = ln\,(z-1) - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z-1)^2} + C$

.۷) $\int \frac{(y^4-8)dy}{y^3+2y^2} = \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{4}{y} + 2ln\,(y^2+2y) + C$

۸) $\int_1^2 \frac{(x-3)dx}{x^3+x^2} = 4ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -0{,}3492$

۹) $\int_2^4 \frac{(x^3-2)dx}{x^3-x^2} = \frac{5}{2} + ln\frac{4}{3} = 2{,}7877$

۱۰) $\int_1^3 \frac{(2-x^2)dx}{x^3+3x^2+2x} = ln\frac{9}{10} = -0{,}1054$

۱۱) $\int_2^3 \frac{(3-x)dx}{x^3+4x^2+3x} = ln\frac{81}{80} = 0{,}0125$

۱۲) $\int_{۰}^{۱} \frac{(۳x^{۲}+۷x)dx}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)} = ln\frac{۴}{۳} = ۰٫۲۸۷۷$

۱۳) $\int_{۰}^{۵} \frac{(x^{۲}-۳)dx}{(x+۲)(x+۱)^{۲}} = ln\frac{۷}{۲} - \frac{۵}{۳} = -۰٫۴۱۳۹$

۱۴) $\int_{۰}^{۴} \frac{۹x^{۲}dx}{(۲x+۱)(x+۲)^{۲}} = ۵ln\,۳ - ۴ = ۱٫۴۹۳۰$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۵) $\int \frac{۸\,dx}{x^{۳}-۴x}$

۱۶) $\int \frac{(۵x^{۲}-۹)dx}{x^{۳}-۹x}$

۱۷) $\int \frac{(۳z+۷)dz}{(z+۱)(z+۲)(z+۳)}$

۱۸) $\int \frac{(۳x^{۲}+۱۱x+۲)dx}{(x+۳)(x^{۲}-۱)}$

۱۹) $\int \frac{x^{۲}dx}{(۲x+۳)(۴x^{۲}-۱)}$

۲۰) $\int \frac{(t^{۴}+۱)dt}{t^{۳}-t}$

۲۱) $\int \frac{(x^{۲}-x-۵)dx}{x^{۳}+۵x^{۲}}$

۲۲) $\int \frac{(۵x^{۲}+۱۴x+۱۰)dx}{(x+۲)(x+۱)^{۲}}$

۲۳) $\int \frac{(۲۴y^{۲}+۱۰y+۵)dy}{(۲y-۱)(۲y+۱)^{۲}}$

۲۴) $\int \frac{(x+۲)dx}{x^{۴}+۲x^{۳}+x^{۲}}$

۲۵) $\int \frac{(x^{۳}-۲x-۴)dx}{x^{۴}+۲x^{۳}}$

۲۶) $\int \frac{(۲x^{۲}+۱)dx}{(x-۲)^{۳}}$

۲۷) $\int \frac{(y^{۴}-۳y^{۳})dy}{(y^{۲}-۱)(y-۲)}$

۲۸) $\int \frac{(۲t^{۴}+۳t^{۳}-۲۰t-۲۸)dt}{(t^{۲}-۴)(۲t-۱)}$

حالت III . ـ مخرج شامل عوامل درجهٔ دوم تکرار نشده نیز میباشد.

به هرعامل درجهٔ دوم تکرار نشده ، مانند $x^{۲}+px+q$ ، یک کسر ساده به‌صورت

$$\frac{Ax+B}{x^{۲}+px+q}$$

نظیر میشود . روش محاسبهٔ انتگرال این کسر در مثال ۲ ی صفحهٔ ۳۴۱ ذکر شده است.

وقتی p مخالف صفر است ، دو جملهٔ اول مخرج را مجذور کامل میکنیم :

$$x^{۲}+px+\frac{۱}{۴}p^{۲}+q-\frac{۱}{۴}p^{۲}=\left(x+\frac{p}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۴}(۴q-p^{۲})$$

$$(۴q>p^{۲})$$

تغییر متغیر $u=\frac{p}{۲}+x$ میدهیم ، $x=u-\frac{p}{۲}$ و $dx=du$ میشود .

مقادیر اخیر را در انتگرال میگذاریم ، انتگرالی با متغیر u بدست میاید که محاسبهٔ آن آسان است .

مثال ۱- انتگرال $\int\frac{۴dx}{x^{۳}+۴x}$ را پیدا کنید.

حل - مینویسیم : $\frac{۴}{x(x^{۲}+۴)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+۴}$

مخرجها را ازبین میبریم :

$$۴=A(x^{۲}+۴)+x(Bx+C)=(A+B)x^{۲}+Cx+۴A$$

ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم ، داریم :

$$A+B=۰\quad,\quad C=۰\quad,\quad ۴A=۴$$

پس $A=۱\quad,\quad B=-۱\quad,\quad C=۰$

و $\frac{۴}{x(x^{۲}+۴)}=\frac{۱}{x}-\frac{x}{x^{۲}+۴}$

بنابراین $\int\frac{۴\,dx}{x(x^{۲}+۴)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^{۲}+۴}$

جواب : $=\ln x-\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۴)+\ln c=\ln\frac{cx}{\sqrt{x^{۲}+۴}}$

مثال ۲- نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{12}\sqrt{3}\, arc\, tg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

حل - مخرج را تجزیه میکنیم :

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+4}+\frac{C}{x+2}$$

$$1=(Ax+B)(x+2)+C(x^2-2x+4)$$

$$1=(A+C)x^2+(2A+B-2C)x+2B+4C$$

پس

$$A=-\frac{1}{12} \quad , \quad B=\frac{1}{3} \quad , \quad C=\frac{1}{12}$$

و

$$\int \frac{dx}{x^3+8}=\int \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx+\int \frac{\frac{1}{12}dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{12}\int \frac{4-x}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{12}\ln(x+2)+C \qquad (4)$$

اما $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ است . تغییر متغیر $u=x-1$ میدهیم ، $x=u+1$ و $dx=du$ میشود و انتگرال اخیر به صورت زیر در میاید :

$$\int \frac{4-x}{x^2-2x+4}dx=\int \frac{3-u}{u^2+3}du=\sqrt{3}\, arc\, tg\frac{u}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(u^2+3)$$

بجای u از نو $x-1$ میگذاریم و مقداراخیر را در رابطهٔ (۴) میبریم ، جواب بدست میاید .

حالت IV . - مخرج شامل عوامل درجهٔ دوم است و بعضی از آنها تکرار شده‌اند .

به هرعامل درجهٔ دوم که n مرتبه تکرار شده وبه‌صورت $(x^2+px+q)^n$ است ، مجموع n کسر ساده به صورت

$$\frac{Ax+B}{(x^{۲}+px+q)^{n}}+\frac{Cx+D}{(x^{۲}+px+q)^{n-۱}}+\cdots+\frac{Lx+M}{x^{۲}+px+q}$$

نظیر میشود .

برای محاسبهٔ انتگرال هریک ازکسرهای اخیر «دستورکاهش» *

$$\int\frac{du}{(u^{۲}+a^{۲})^{n}}=\frac{۱}{۲(n-۱)a^{۲}}\left[\frac{u}{(u^{۲}+a^{۲})^{n-۱}}+(۲n-۳)\int\frac{du}{(u^{۲}+a^{۲})^{n-۱}}\right] \qquad (۵)$$

راکه در فصل بعد ذکر شده است ، بکار میبندیم . اگر n بزرگتر از ۲ باشد ، باید دستور (۵) راچند بار بکار بست. اگر p مخالف صفرباشد ، دو جملهٔ اول را مجذورکامل میکنیم :

$$x^{۲}+px+q=(x+\frac{p}{۲})^{۲}+\frac{۱}{۴}(۴q-p^{۲})=u^{۲}+a^{۲}$$

الی آخر مانند قبل .

مثال ـ نشان دهیدکه :

$$\int\frac{۲x^{۳}+x+۳}{(x^{۲}+۱)^{۲}}dx=\ln(x^{۲}+۱)+\frac{۱+۳x}{۲(x^{۲}+۱)}+\frac{۳}{۲}\,arc\,tg\,x+C$$

حل ـ چون عامل $x^{۲}+۱$ دو مرتبه تکرار شده است ، مینویسیم :

$$\frac{۲x^{۳}+x+۳}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{Ax+B}{(x^{۲}+۱)^{۲}}+\frac{Cx+D}{x^{۲}+۱}$$

مخرجها را ازبین میبریم :

$$۲x^{۳}+x+۳=Ax+B+(Cx+D)(x^{۲}+۱)$$

ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم ، دستگاه حاصل را حل میکنیم ، داریم :

$$A=-۱\quad,\quad B=۳\quad,\quad C=۲\quad,\quad D=۰$$

Reduction formula *

پس
$$\int \frac{۲x^۳+x+۳}{(x^۲+۱)^۲}dx=\int\frac{-x+۳}{(x^۲+۱)^۲}dx+\int\frac{۲x\,dx}{x^۲+۱}$$
$$=ln\,(x^۲+۱)-\int\frac{x\,dx}{(x^۲+۱)^۲}+۳\int\frac{dx}{(x^۲+۱)^۲}$$

ازاین دو انتگرال ، انتگرال اول را با دستور (۴) صفحهٔ ۳۱۲ و انتگرال دوم را با دستور (۵) مذکور در بالا با قرار دادن $u=x$ ، $a=۱$ و $n=۲$ حل میکنیم ، داریم :

$$\int \frac{۲x^۳+x+۳}{(x^۲+۱)^۲}dx=ln\,(x^۲+۱)+\frac{۱}{۲(x^۲+۱)}$$
$$+\frac{۳}{۲}\left[\frac{x}{x^۲+۱}+arc\,tg\,x\right]+C$$

اگر این مقدار را مختصر کنیم ، جواب مسئله بدست میاید .

نتیجه . ـ هرتابع گویا را میتوان به صورت حاصل تقسیم دوکثیرالجمله یعنی به صورت یک کسر گویا در آورد . اگر مخرج کسر اخیر قابل تجزیه به عوامل حقیقی درجهٔ اول و دوم باشد ، آن تابع را میتوان به صورت مجموع جبری یک کثیرالجملهٔ تام و چند کسر ساده درآورد و انتگرال آن را ، چنانکه در صفحات اخیر ذکرشد ، بدست آورد .

قضیه ـ انتگرال هر تابع گویایی راکه مخرج آن قابل تجزیه به عوامل حقیقی درجهٔ اول و دوم باشد ، میتوان بدست آورد . جواب آن به صورت مجموع توابع جبری ، لگاریتمی و مثلثاتی معکوس است .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int\frac{(۴x^۲+۶)dx}{x^۳+۳x}=ln\,x^۲(x^۲+۳)+C$

۲) $\int\frac{(x^۲+x)dx}{(x-۱)(x^۲+۱)}=ln\,(x-۱)+arc\,tg\,x+C$

$$۳)\quad \int \frac{(۲t^۲-۸t-۸)dt}{(t-۲)(t^۲+۴)} = ۲\ln \frac{t^۲+۴}{t-۲} + C$$

$$۴)\quad \int \frac{(x^۲+x-۱۰)dx}{(۲x-۳)(x^۲+۴)} = \frac{۱}{۲} \ln \frac{x^۲+۴}{۲x-۳} + arc\ tg \frac{x}{۲} + C$$

$$۵)\quad \int \frac{(x-۱۸)dx}{۴x^۳+۹x} = \ln \frac{۴x^۲+۹}{x^۲} + \frac{۱}{۶} arc\ tg \frac{۲x}{۳} + C$$

$$۶)\quad \int \frac{(۲y^۳+y^۲+۲y+۲)dy}{y^۴+۳y^۲+۲} = \ln (y^۲+۲) + arc\ tg\, y + C$$

$$۷)\quad \int \frac{dz}{z^۴+z^۲} = -\frac{۱}{z} - arc\ tg\, z + C$$

$$۸)\quad \int \frac{۲x\, dx}{(x^۲+۱)(x+۱)^۲} = arc\ tg\, x + \frac{۱}{x+۱} + C$$

$$۹)\quad \int \frac{(x^۳+۳x)dx}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۱}{۲} \ln (x^۲+۱) - \frac{۱}{x^۲+۱} + C$$

$$۱۰)\quad \int \frac{(x^۵+۹x^۳-۹x^۲-۹)dx}{x^۳+۹x} = \frac{x^۳}{۳} - \ln x(x^۲+۹)^۴ + C$$

$$۱۱)\quad \int \frac{(۴x^۲+۲x+۸)dx}{x(x^۲+۲)^۲} = \ln \frac{x^۲}{x^۲+۲} + \frac{x}{۲x^۲+۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} arc\ tg \frac{x}{\sqrt{۲}} + C$$

$$۱۲)\quad \int \frac{t^۵ dt}{(t^۲+۴)^۲} = \frac{t^۲}{۲} - ۴\ln (t^۲+۴) - \frac{۸}{t^۲+۴} + C$$

$$۱۳)\quad \int \frac{dx}{x^۳+x^۲+x} = -\frac{۱}{۲} \ln \frac{x^۲+x+۱}{x^۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} arc\ tg \frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}} + C$$

$$۱۴)\quad \int \frac{(x^۵+۴x^۳)dx}{(x^۲+۲)^۳} = \frac{۱}{۲} \ln (x^۲+۲) + \frac{۱}{(x^۲+۲)^۲} + C$$

۱۰) $$\int \frac{4\,dx}{x^4-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} - 2\,arc\,tg\,x + C$$

۱۶) $$\int \frac{(2z^2+3z+2)dz}{(z+2)(z^2+2z+2)} = 2\ln(z+2) - arc\,tg(z+1) + C$$

۱۷) $$\int \left(\frac{t+3}{t^2+4t+5}\right)^2 dt = arc\,tg(t+2) - \frac{1}{t^2+4t+5} + C$$

۱۸) $$\int_1^4 \frac{(5x^2+4)dx}{x^3+4x} = 3\ln 4 = 4{,}1589$$

۱۹) $$\int_0^1 \frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)} = \ln\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4} = 0{,}667$$

۲۰) $$\int_0^1 \frac{(2x^2+x+3)dx}{(x+1)(x^2+1)} = \ln 4 + \frac{\pi}{4} = 2{,}171$$

۲۱) $$\int_0^1 \frac{(4x^2+2x)dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 = 0{,}592$$

۲۲) $$\int_3^4 \frac{(5t^3-4t)dt}{t^4-16} = \ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13} = 1{,}522$$

۲۳) $$\int_0^2 \frac{(z^3+2z^2+6z+8)dz}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} = 1{,}257$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۲۴) $$\int \frac{(6x^2+3x+4)dx}{x^3+4x}$$

۲۵) $$\int \frac{(z^4+3)dz}{(z+1)(z^2+1)}$$

۲۶) $$\int \frac{(3x^3+3x+1)dx}{x^4+3x^2}$$

۲۷) $$\int \frac{(3x^3+x^2+3)dx}{x^4+3x^2}$$

۲۸) $$\int \frac{(5x^2+12x+9)dx}{x^3+3x^2+3x}$$

۲۹) $$\int \frac{(4x^3+3x^2+18x+12)dx}{(x^2+4)^2}$$

۳۰) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8y\,dy}{(2y+1)(4y^2+1)}$ ۳۱) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x^3-4)dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$

۳۲) $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x+10)dx}{x^3+2x^2+5x}$ ۳۳) $\displaystyle\int_0^3 \frac{(2x^3+18)dx}{(x+3)(x^2+9)}$

۱۶۸ - محاسبهٔ انتگرال با استفاده از تغییر متغیر وگویا کردن توابع .-

در شمارهٔ اخیر نشان دادیم که انتگرال توابع گویایی که مخرج آنها قابل تجزیه به عوامل حقیقی درجهٔ اول و دوم است ، قابل محاسبه است . دربین توابع جبری گنگ (یعنی دربین آنها که شامل رادیکال‌اند) نیز عدهٔ کوچکی وجود دارد که میتوان انتگرال آنها را به صورت انتگرال توابع ساده درآورد و آنها را حساب کرد . بعضی از این توابع با تغییر متغیر مناسبی به‌صورت یکی ازنمونه های مقدماتی (شمارهٔ ۱۲۸) درمیایند. این روش را «محاسبهٔ انتگرال با گویا کردن تابع زیر علامت انتگرال» مینامند . یعنی نخست با تغییر متغیر مناسبی تابع زیر علامت انتگرال را گویا مینمایند و سپس انتگرال تابع جدید را پیدا میکنند . تغییر متغیر در محاسبهٔ انتگرالها نقش بزرگی دارد و ما اکنون چند نوع از مهمترین آنها را بیان میکنیم .

وقتی تابع زیر علامت انتگرال تنها شامل قوای کسری x است ، تغییر متغیر

$$x = z^n$$

میدهیم . n کوچکترین مخرج مشترك قوای کسری x است .

با این تغییر متغیر x و dx و تمام رادیکالها به صورت توابع گویایی از z درمیایند .

مثال ۱- نشان دهید که :

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right) + C$$

حل- دراین مثال $n=4$ است. پس تغییرمتغیر $x=z^4$ میدهیم . دراین صورت

$$x^{\frac{1}{2}} = z^2 \quad , \quad x^{\frac{3}{4}} = z^3 \quad , \quad dx = 4z^3dz$$

و
$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}}=\int \frac{z^2}{1+z^3}\,4z^3dz=4\int \frac{z^5}{1+z^3}\,dz$$

$$=4\int\left(z^2-\frac{z^2}{1+z^3}\right)dz=\frac{4}{3}\,z^3-\frac{4}{3}\,ln\,(1+z^3)+C$$

اکنون اگر بجای z ، $x^{\frac{1}{4}}$ بگذاریم ، جواب بدست میاید .

تابع زیر علامت انتگرال دراین نوع مسائل به صورت

$$R(x^{\frac{1}{n}})$$

و R تابع گویایی از $x^{\frac{1}{n}}$ است .

وقتی تابع زیر علامت انتگرال تنها شامل قوای کسری $a+bx$ است ، تغییر متغیر

$$a+bx=z^n$$

میدهیم . n کوچکترین مخرج مشترك قوای کسری $a+bx$ است .

بااین تغییر متغیر x و dx و تمام رادیکالها به‌صورت‌توابع گویایی از z در میایند.

مثال ۲- انتگرال $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ را پیدا کنید .

حل - تغییر متغیر $1+x=z^2$ میدهیم. دراین صورت :

$$dx=2z\,dz \quad , \quad (1+x)^{\frac{3}{2}}=z^3 \quad , \quad (1+x)^{\frac{1}{2}}=z$$

پس :
$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{2z\,dz}{z^3+z}=2\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$=2\,arc\,tg\,z+C=2\,arc\,tg(1+x)^{\frac{1}{2}}+C$$

تابع زیر علامت انتگرال دراین نوع مسائل به صورت

$$R[x\,,\,(a+bx)^{\frac{1}{n}}]$$

و R تابعی گویاست .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $$\int \frac{(5x+9)dx}{(x-9)x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + C$$

۲) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{3}} + C$$

۳) $$\int \frac{dx}{x-x^{\frac{4}{3}}} = 3\ln\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{1}{3}}} + C$$

۴) $$\int \frac{(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}})dx}{6x^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{27}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{13}x^{\frac{13}{12}} + C$$

۵) $$\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{6x^2+6x+1}{12(4x+1)^{\frac{3}{2}}} + C$$

۶) $$\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}} = \frac{8x^{\frac{3}{8}}}{3} + 2\ln\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1} + 4\,\mathrm{arc\,tg}\,x^{\frac{1}{8}} + C$$

۷) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}} + C$$

۸) $\int y\sqrt[۳]{a+y}\,dy=\frac{۳}{۲۸}(٤y-۳a)(a+y)^{\frac{٤}{۳}}+C$

۹) $\int\frac{(\sqrt{x+۱}+۱)dx}{\sqrt{x+۱}-۱}=x+۱+٤\sqrt{x+۱}+٤ln(\sqrt{x+۱}-۱)+C$

۱۰) $\int\frac{dx}{۱+\sqrt[۳]{x+a}}=\frac{۳}{۲}(x+a)^{\frac{۲}{۳}}-۳(x+a)^{\frac{۱}{۳}}+۳ln(۱+\sqrt[۳]{x+a})+C$

۱۱) $\int\frac{(t+٥)dt}{(t+٤)\sqrt{t+۲}}=۲\sqrt{t+۲}+\sqrt{۲}\,arc\,tg\sqrt{\frac{t+۲}{۲}}+C$

۱۲) $\int_{۰}^{۳}\frac{dx}{(x+۲)\sqrt{x+۱}}=۲arc\,tg\,۲-\frac{\pi}{۲}$

۱۳) $\int_{۰}^{٤}\frac{dx}{۱+\sqrt{x}}=٤-۲ln\,۳$

۱٤) $\int_{۱}^{٤}\frac{y\,dy}{\sqrt{۲+٤y}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

۱٥) $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}\frac{dt}{\sqrt{۲t}(۹+\sqrt[۳]{۲t})}=۳-۹\,arc\,tg\,\frac{۱}{۳}$

۱٦) $\int_{۰}^{۱}\frac{x^{\frac{۳}{۲}}dx}{x+۱}=\frac{\pi}{۲}-\frac{٤}{۳}$

۱۷) $\int_{۱}^{٦٤}\frac{dt}{۲\sqrt{t}+\sqrt[۳]{t}}=٥{,}۳۱$

۱۸) $\int_{۳}^{۲۹}\frac{(x-۲)^{\frac{۲}{۳}}dx}{(x-۲)^{\frac{۲}{۳}}+۳}=۸+\frac{۳}{۲}\pi\sqrt{۳}$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۹) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+۲\sqrt{x}+۵}$

۲۰) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(۱-\sqrt[۳]{x})}$

۲۱) $\displaystyle\int\frac{(x+۲)dx}{x\sqrt{x-۳}}$

۲۲) $\displaystyle\int\frac{y\,dy}{(۲y+۳)^{\frac{۴}{۳}}}$

۲۳) $\displaystyle\int\frac{dt}{(t+۱)^{\frac{۱}{۴}}-(t+۱)^{\frac{۵}{۴}}}$

۲۴) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}-(x-۲)^{\frac{۳}{۴}}}$

۲۵) $\displaystyle\int\frac{(x+۳)dx}{(x+۵)\sqrt{x+۴}}$

۲۶) $\displaystyle\int\frac{(۲-\sqrt{۲x+۳})dx}{۱-۲x}$

۲۷) مساحت سطح محدود به خم $y=x+\sqrt{x+۱}$ ، محور x ها و خطوط $x=۳$ و $x=۸$ را حساب کنید . جواب : $۴۰\frac{۱}{۶}$

۲۸) سطح مذکور در مسئلهٔ قبل را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

۲۹) مساحت سطح محدود به هریک از خمهای زیر و محورهای مختصات و واقع در ناحیهٔ اول را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

(a) $y=۲-\sqrt{x}$

(b) $y=۲-\sqrt[۳]{x}$

(c) $y=a-\sqrt{ax}$

(d) $y=۴-x^{\frac{۲}{۳}}$

۳۰) مساحت سطح محدود به خمهای $y=۲x+\sqrt{۲x+۱}$ و $y=x-\sqrt{۲x+۱}$ و خطوط $x=۴$ و $x=۱۲$ را حساب کنید .

۳۱) مساحت سطح محدود به خم $(x-۱)y^۲=(x+۱)(۲y-۱)$ و خطوط

$x=۳$ و $x=۸$ را حساب کنید.   جواب : $۴\left[\sqrt{۲}+ln\frac{۴+\sqrt{۲}}{۴-\sqrt{۲}}\right]$

۱۶۹ـ انتگرال دیفرانسیلهای دو جمله‌ای .ـ عبارت

$$x^m(a+bx^n)^p\, dx \qquad (۱)$$

را **دیفرانسیل دوجمله‌ای** مینامند. m و n و p اعدادی گویا و a و b اعدادی ثابتند.

تغییر متغیر
$$x=z^\alpha$$

میدهیم ، دراین صورت
$$dx=\alpha z^{\alpha-۱}\, dz$$

و
$$x^m(a+bx^n)^p\, dx=\alpha z^{m\alpha+\alpha-۱}\,(a+bz^{n\alpha})^p\, dz$$

میشود . اگر بتوان عدد صحیح α را طوری انتخاب کرد که $m\alpha$ و $n\alpha$ هردو صحیح باشند *، دیفرانسیل داده شده به شکل دیفرانسیلی به همان صورت اول درمیاید با این تفاوت که بجای m و n دو عدد صحیح قرار دارند .

نیز میتوان نوشت :

$$x^m(a+bx^n)^p\, dx=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\, dx \qquad (۲)$$

بدین ترتیب دیفرانسیل داده شده به شکل دیفرانسیلی به همان صورت درمیاید با این تفاوت که بجای n ، $-n$ قرار دارد. بنابراین همواره میتوان قوهٔ x را در داخل پرانتز مثبت پنداشت.

اگر p عددی صحیح ومثبت باشد ، دو جمله‌ای رابسط میدهیم و انتگرال آن راحساب مینماییم . در زیر p را عددی کسری به صورت $\frac{r}{s}$ فرض میکنیم . r و s اعدادی صحیح اند ** .

هر دیفرانسیل دو جمله‌ای را میتوان به صورت

---

* همواره میتوان عدد α را طوری انتخاب کرد که $m\alpha$ و $n\alpha$ هردو صحیح باشند . برای این کار کافی است α را کوچکترین مضرب مشترك مخرجهای m و n بگیریم .

** حالت p صحیح نیز حالت خاصی از $\frac{r}{s}$ است $(s=۱\ ,\ r=p)$.

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$$

درآورد . m و n و r و s اعدادی صحیح و n مثبت است .

در شمارهٔ بعد خواهیم دیدکه عبارت (۱) را میتوان با شرایط زیر گویا کرد :

حالت I . - اگر $\frac{m+1}{n}$ **عددی صحیح یا صفر باشد ، با تغییرمتغیر**

$$a+bx^n=z^s$$

حالت II . - اگر $\frac{r}{s}+\frac{m+1}{n}$ **عددی صحیح یا صفر باشد ، با تغییر متغیر**

$$a+bx^n=z^s x^n$$

مثال ۱-

$$\int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2a+bx^2}{b^2\sqrt{a+bx^2}}+C$$

حل - در این مثال $m=3$ ، $n=2$ ، $r=-3$ ، $s=2$ و لذا $\frac{m+1}{n}=2$

و مسئله از نوع مذکور در **حالت** I است . تغییر متغیر $a+bx^2=z^2$ میدهیم :

$$x=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad dx=\frac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad (a+bx^2)^{\frac{3}{2}}=z^3$$

$$\int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{z^3}$$

$$=\frac{1}{b^2}\int(1-az^{-2})dz=\frac{1}{b^2}(z+az^{-1})+C$$

$$= \frac{2a+bx^2}{b^2\sqrt{a+bx^2}} + C$$

مثال ۲-
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C$$

حل - دراین‌مثال $m=-4$ ، $n=2$ ، $\frac{r}{s}=-\frac{1}{2}$ ، $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-2$

و مسئله از نوع مذکور در **حالت** II است . تغییر متغیر $1+x^2=z^2x^2$ ،

$z=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$ میدهیم :

$$x^2=\frac{1}{z^2-1} \quad , \quad 1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1} \quad , \quad \sqrt{1+x^2}=\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x=\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad x^4=\frac{1}{(z^2-1)^2} \quad , \quad dx=-\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(z^2-1)^2}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}} = -\int (z^2-1)dz$$

$$= z-\frac{z^3}{3}+C = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

١) $$\int x^{٥}\sqrt{١+x^{٣}}\,dx=\frac{٢(٣x^{٣}-٢)(١+x^{٣})^{\frac{٣}{٢}}}{٤٥}+C$$

٢) $$\int\frac{x^{٥}dx}{\sqrt{١+x^{٣}}}=\frac{٢(x^{٣}-٢)\sqrt{١+x^{٣}}}{٩}+C$$

٣) $$\int x^{٥}(٨+x^{٣})^{\frac{٣}{٢}}dx=\frac{٢(٥x^{٣}-١٦)(٨+x^{٣})^{\frac{٥}{٢}}}{١٠٥}+C$$

٤) $$\int\frac{x^{٥}dx}{(a+bx^{٣})^{\frac{٣}{٢}}}=\frac{٢(٢a+bx^{٣})}{٣b^{٢}\sqrt{a+bx^{٣}}}+C$$

٥) $$\int\frac{dx}{x^{٢}(١+x^{٣})^{\frac{٢}{٣}}}=-\frac{(١+x^{٣})^{\frac{١}{٣}}}{x}+C$$

٦) $$\int\frac{dx}{x^{٣}(١+x^{٣})^{\frac{١}{٣}}}=-\frac{(١+x^{٣})^{\frac{٢}{٣}}}{٢x^{٢}}+C$$

٧) $$\int\frac{dx}{x^{٢}(١+x^{٤})^{\frac{٣}{٤}}}=-\frac{(١+x^{٤})^{\frac{١}{٤}}}{x}+C$$

٨) $$\int\frac{dx}{x^{n}(١+x^{n})^{\frac{١}{n}}}=-\frac{(١+x^{n})^{\frac{n-١}{n}}}{(n-١)x^{n-١}}+C$$

۹) $$\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1+3x^3}{2x^2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}} + C$$

۱۰) $$\int \frac{2\sqrt{1+x^4}\,dx}{x^2} = \ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۱) $$\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$$

۱۲) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^3}}$$

۱۳) $$\int x^5(a^3-x^3)^{\frac{3}{2}}dx$$

۱۴) $$\int \frac{(x^5+2x^2)dx}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

۱۵) $$\int x(1+x^3)^{\frac{1}{3}}dx$$

۱۷۰- شرایط لازم برای گویا کردن دیفرانسیل دو جمله‌ای

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx \qquad \text{(A)}$$

حالت I . ـ تغییر متغیر $a+bx^n=z^s$ میدهیم :

$$(a+bx^n)^{\frac{1}{s}}=z \quad \text{و} \quad (a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=z^r$$

$$x=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{و} \quad x^m=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$dx=\frac{s}{bn}z^{s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$$

این مقادیر را در (A) میگذاریم :

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{s}{bn}\, z^{r+s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

طرف دوم این عبارت وقتی گویاست که

$$\frac{m+1}{n}$$

عددی صحیح یا صفر باشد .

حالت II . ـ تغییر متغیر $a+bx^n=z^s x^n$ میدهیم :

$$x^n=\frac{a}{z^s-b} \quad \text{و} \quad a+bx^n=z^s x^n=\frac{az^s}{z^s-b}$$

$$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\frac{r}{s}}z^r$$

$$x=a^{\frac{1}{n}}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}} \quad , \quad x^m=a^{\frac{m}{n}}(z^s-b)^{-\frac{m}{n}}$$

$$dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}z^{s-1}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}dz$$

این مقادیر را در (A) میگذاریم :

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=-\frac{s}{n}\, a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)}z^{r+s-1}dz$$

طرف دوم این عبارت وقتی گویاست که $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ عددی صحیح یا صفر باشد .

بنابراین دیفرانسیل دو جمله‌ای

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$$

را وقتی میتوان گویا کرد که یکی از شرایط مذکور در شمارهٔ قبل برقرار باشد .

۱۷۱- تغییر متغیر در دیفرانسیلهای مثلثاتی .

قضیه - اگر تابع زیر علامت انتگرال تابع گویایی از $\sin u$ و $\cos u$

باشد ، تغییر متغیر $$tg\frac{u}{۲}=z \qquad (۱)$$

که همان تغییر متغیر

$$\sin u=\frac{۲z}{۱+z^۲}\quad,\quad \cos u=\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}\quad,\quad du=\frac{۲\,dz}{۱+z^۲} \qquad (۲)$$

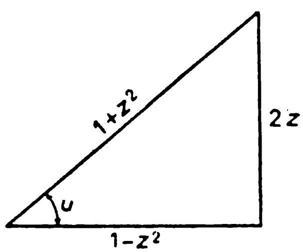
است ، آن را به تابع گویای دیگری از z تبدیل میکند .

اثبات - دو طرف تساوی $tg\frac{u}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos u}{۱+\cos u}}$ [دستورهای (۵) شمارهٔ ۲] را مجذور میکنیم :

$$tg^۲\frac{u}{۲}=\frac{۱-\cos u}{۱+\cos u}$$

اگر تغییر متغیر $tg\frac{u}{۲}=z$ بدهیم و $\cos u$ را پیدا کنیم ، یکی از دستورهای (۲) بدست میاید :

$$\cos u=\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲} \qquad (۳)$$



شکل ۱۵۴

مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۵۴ که در آن رابطهٔ (۳) برقرار است ، برای $\sin u$ همان مقدار مذکور در (۲) را میدهد و سرانجام از رابطهٔ (۱)

$$u=۲arc\ tg\ z$$

و از آنجا

$$du=\frac{۲\,dz}{۱+z^۲}$$

نتیجه میشود . پس تساویهای (۲) محققاند .

روشن است که اگر تابع زیر علامت انتگرال تابع گویایی از $tg\,u$ ، $cotg\,u$ ، $sec\,u$ و $cosec\,u$ باشد ، بازهم قضیهٔ مذکور صحیح است ، زیرا این چهار تابع را

میتوان با عبارتهای گویایی از $\sin u$ یا از $\cos u$ یا از $\sin u$ و $\cos u$ بیان کرد .
بنابراین **انتگرال هر دیفرانسیل مثلثاتی گویایی را که پس از تغییر متغیر قابل تجزیه به کسرهای ساده‌ای از z باشد ، میتوان محاسبه نمود** (شمارهٔ ۱۶۷ را ببینید) .

مثال - نشان دهید که : $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5\operatorname{tg} x+4}{3}\right)+C$

حل - تغییر متغیر $2x=u$ میدهیم ، $x=\frac{u}{2}$ و $dx=\frac{du}{2}$ میشود . این مقادیر را در انتگرال میگذاریم و از دستورهای (۲) استفاده میکنیم :

$$\int \frac{dx}{5+4\sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{5+4\sin u} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5+\frac{8z}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{5z^2+8z+5} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5z+4}{3}\right)+C$$

از نو $z=\operatorname{tg}\frac{u}{2}=\operatorname{tg} x$ میگذاریم ، جواب بالا بدست میاید .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int \frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+C$

۲) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$

۳) $\int \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+C$

$$۴)\quad \int \frac{dx}{۴+۵\cos x} = \frac{۱}{۳} \ln\left(\frac{tg\,\frac{x}{۲}+۳}{tg\,\frac{x}{۲}-۳}\right)+C$$

$$۵)\quad \int \frac{d\alpha}{۳+\cos\alpha} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\, arc\,tg\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\, tg\frac{\alpha}{۲}\right)+C$$

$$۶)\quad \int \frac{dx}{۲\sin x-\cos x+۳} = arc\,tg\left(۱+۲tg\,\frac{x}{۲}\right)+C$$

$$۷)\quad \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{۵-۳\cos\theta} = -\frac{\theta}{۳}+\frac{۵}{۶}\, arc\,tg\left(۲tg\,\frac{\theta}{۲}\right)+C$$

$$۸)\quad \int \frac{dx}{۴\sec x+۵} = \frac{۲}{۵}\, arc\,tg\left(tg\,\frac{x}{۲}\right)+\frac{۴}{۱۵}\ln\left(\frac{tg\,\frac{x}{۲}-۳}{tg\,\frac{x}{۲}+۳}\right)+C$$

$$۹)\quad \int_{۰}^{\pi} \frac{d\theta}{۴-۳\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{۷}}$$

$$۱۰)\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{۱۲+۱۳\cos\theta} = \frac{۱}{۵}\ln\frac{۳}{۲}$$

$$۱۱)\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{۲+\sin x} = \frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

$$۱۲)\quad \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\alpha}{۳+۵\sin\alpha} = \frac{۱}{۴}\ln ۳$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$۱۳)\quad \int \frac{dx}{۱+\sin x-\cos x}$$

$$۱۴)\quad \int \frac{d\theta}{cotg\,\theta+cosec\,\theta}$$

$$۱۵)\quad \int \frac{d\theta}{۱۳-۵\cos\theta}$$

$$۱۶)\quad \int \frac{dt}{۱۳\cos t-۵}$$

$$۱۷)\quad \int \frac{dx}{۲\cos x+۱}$$

$$۱۸)\quad \int \frac{d\alpha}{۲+\sin\alpha}$$

۱۹) $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$ ۲۰) $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{5+4\sin\theta}$

۲۱) $\int \frac{dt}{5\sec t-4}$ ۲۲) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$

۲۳) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$ ۲۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2+\cos\alpha}$

۱۷۲ - تغییر متغیرهای دیگر . - تغییر متغیرهای مذکوردر شماره‌های اخیربرای گویا کردن تابع زیر علامت انتگرال است . ولی در بسیاری از موارد میتوان برای محاسبهٔ انتگرالها ازتغییر متغیرهای دیگری استفاده کرد. برای این تغییر متغیرها قاعدهٔ کلی وجود ندارد و تنها تجربهٔ کافی که براثر حل مسائل فراوان بدست میاید ، میتواند راهنمای کار باشد . یکی از تغییر متغیرهایی که زیاد بکار میرود ، تغییر متغیر

$$x=\frac{1}{z} \quad , \quad dx=-\frac{dz}{z^2}$$

است .

مثال - انتگرال $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ را پیدا کنید .

حل - تغییر متغیر $x=\frac{1}{z}$ ، $dx=-\frac{dz}{z^2}$ میدهیم :

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\int (a^2z^2-1)^{\frac{1}{2}}z\,dz=-\frac{(a^2z^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$$

$$=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$$۱)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{۱+x+x^{۲}}} = ln\left(\frac{cx}{۲+x+۲\sqrt{۱+x+x^{۲}}}\right)$$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

$$۲)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}-x+۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\, ln\left(\frac{\sqrt{x^{۲}-x+۲}+x-\sqrt{۲}}{\sqrt{x^{۲}-x+۲}+x+\sqrt{۲}}\right)+C$$

تغییر متغیر $\sqrt{x^{۲}-x+۲}=z-x$ بدهید .

$$۳)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}} = ۲\,arc\ tg\ (x+\sqrt{x^{۲}+۲x-۱})+C$$

تغییر متغیر $\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}=z-x$ بدهید .

$$٤)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{۲+x-x^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\, ln\left(\frac{\sqrt{۲+۲x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۲+۲x}+\sqrt{۲-x}}\right)+C$$

تغییر متغیر $\sqrt{۲+x-x^{۲}}=(x+۱)z$ بدهید .

$$۵)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{۵x-٦-x^{۲}}} = -\sqrt{\frac{۲}{۳}}\ arc\ tg\sqrt{\frac{۲(۳-x)}{۳(x-۲)}}+C$$

تغییر متغیر $\sqrt{۵x-٦-x^{۲}}=(x-۲)z$ بدهید .

$$٦)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{۳x^{۲}-۲x-۱}} = -arc\ sin\left(\frac{۱+x}{۲x}\right)+C$$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۷) $\int \frac{-dx}{x\sqrt{۱+۴x+۵x^{۲}}} = \ln\left(\frac{۱+۲x+\sqrt{۱+۴x+۵x^{۲}}}{x}\right)+C$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۸) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+۴x-۴}} = -\frac{۱}{۲}\,\arcsin\left(\frac{۲-x}{x\sqrt{۲}}\right)+C$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۹) $\int \frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۱+۲x+۳x^{۲}}} = -\frac{\sqrt{۱+۲x+۳x^{۲}}}{x}$

$+\ln\left(\frac{۱+x+\sqrt{۱+۲x+۳x^{۲}}}{x}\right)+C$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۱۰) $\int \frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۲۷x^{۲}+۶x-۱}} = \frac{\sqrt{۲۷x^{۲}+۶x-۱}}{x}$

$-۳\arcsin\left(\frac{۱-۳x}{۶x}\right)+C$

تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۱۱) $\int_{\frac{۱}{۳}}^{۱} \frac{(x-x^{۳})^{\frac{۱}{۳}}dx}{x^{۴}} = ۶$ تغییر متغیر $x=\frac{۱}{z}$ بدهید .

۱۲) $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{۴}$ تغییر متغیر $e^{x}=z$ بدهید .

۱۳) $\int_{۰}^{a} \frac{dx}{\sqrt{ax-x^{۲}}} = \pi$ تغییر متغیر $x=a\sin^{۲}z$ بدهید .

۱۴) $\int_{0}^{1} \sqrt{2t+t^2}\, dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln (2+\sqrt{3})$

تغییر متغیر $z = t+1$ بدهید .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۵) $\int \frac{4\, dx}{x\sqrt{x^2-2x+3}}$ تغییر متغیر $\sqrt{x^2-2x+3} = z-x$ بدهید .

۱۶) $\int \frac{4x\, dx}{(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}}$ تغییر متغیر $\sqrt{x^2-2x+3} = z-x$ بدهید .

۱۷) $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ تغییر متغیر $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$ بدهید .

۱۸) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ تغییر متغیر $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$ بدهید .

فصل هفدهم

دستورهای کاهش ـ استفاده از جدول انتگرال

۱۷۳ - مقدمه . ـ دراین فصل به کامل کردن دستورهای محاسبهٔ انتگرالهای عادی میپردازیم و چون هدف ما بخصوص راهنمایی برای استفاده از جدول انتگرال است ، چند دستور کلی را که در تمام جدولها مندرجند وبه **دستورهای کاهش** موسومند مطالعه میکنیم .

۱۷۴ - دستورهای کاهش برای دیفرانسیلهای دوجمله‌ای . ـ اگر نتوانیم انتگرال دیفرانسیل دو جمله‌ای را با روشهای مذکور در فصل اخیر بآسانی محاسبه کنیم ، از**دستورهای کاهش** استفاده مینماییم . این دستورها ضمن بکار بستن روش جزء به جزء بدست میایند و انتگرال داده شده را به مجموع دو جمله تبدیل میکنند : جملهٔ اول فاقد علامت‌انتگرال‌است ، جملهٔ دوم‌انتگرالی کاملاً شبیه به انتگرال داده شده است‌ولی محاسبهٔ آن از محاسبهٔ انتگرال داده شده آسانتر است . چهار دستور اصلی کاهش عبارتند از :

$$\text{(A)}\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b} - \frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$\text{(B)}\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

$$\text{(C)}\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$(D)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{np+n+m+1}{n(p+1)a}\int x^m (a+bx^n)^{p+1}dx$$

بخاطر سپردن این دستورها لازم نیست . اما باید خاصیت هریک از آنها را بشناسیم و نیز بدانیم که درچه مواردی بکار بستن آنها نادرست است .

دستور (A) n واحد از قوهٔ m میکاهد ،
اگر $np+m+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .

دستور (B) یک واحد از قوهٔ p میکاهد ،
اگر $np+m+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .

دستور (C) n واحد به قوهٔ m میفزاید ،
اگر $m+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .

دستور (D) یک واحد به قوهٔ p میفزاید ،
اگر $p+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .

I- دستور (A) . - برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

از راه جزء به جزء از دستور

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (1)$$

استفاده میکنیم . مینویسیم :

$$u = x^{m-n+1}\,* \qquad \text{و} \qquad dv = (a+bx^n)^p x^{n-1}\,dx$$

$$du = (m-n+1)x^{m-n}\,dx \qquad \text{و} \qquad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

این مقادیر را در (۱) میگذاریم :

* برای آنکه انتگرال dv با دستور (٤) صفحهٔ ۳۱۲ قابل محاسبه باشد ، باید قوهٔ x در بیرون پرانتز $n-1$ باشد . $n-1$ را از m کم میکنیم قوهٔ x در u ، $m-n+1$ میشود .

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx \qquad (2)$$

اما
$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx = \int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\,dx$$
$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, dx + b\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

مقدار انتگرال اخیر را در (۲) میگذاریم :

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

آخرین جملهٔ طرف راست را به طرف چپ میبریم ، دو انتگرال را با یکدیگر جمع میکنیم و دو طرف را به ضریب طرف چپ تقسیم مینماییم ، دستور (A) بدست میاید .

چنانکه از دستور (A) برمیاید ، محاسبهٔ انتگرال $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$ به محاسبهٔ انتگرالی به همان صورت منجر میگردد بااین تفاوت که در تابع زیر علامت انتگرال قوهٔ x از m به $m-n$ تبدیل میشود و اگر دستور (A) را چند بار بکار ببندیم ، از m ضریبی از n کاسته میگردد .

وقتی $np+m+1=0$ است ، بکار بستن دستور (A) جایز نیست زیرا مخرج صفر میشود . اما دراین حالت

$$\frac{m+1}{n}+p=0$$

است و میتوان روش مذکور در شمارهٔ ۱۶۹ را بکاربست .

II- **دستور** (B) . - مینویسیم :

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \int x^m (a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)dx \quad (۳)$$

$$= a\int x^m (a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$+ b\int x^{m+n} (a+bx^n)^{p-1}dx$$

اکنون دستور (A) را برای محاسبهٔ آخرین جملهٔ (۳) بکار میبندیم :

$$b\int x^{m+n} (a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}$$

$$-\frac{a(m+1)}{np+m+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}dx$$

این نتیجه را در (۲) میگذاریم ، مختصر میکنیم ، دستور (B) بدست میاید .

III- **دستور** (C) . - از دستور (A) مقدار

$$\int x^{m-n} (a+bx^n)^p dx$$

را پیدا میکنیم و بجای m ، $m+n$ میگذاریم ، دستور (C) بدست میاید .

بنابراین هرمرتبه که دستور (C) را بکار ببندیم ، m به $m+n$ تبدیل میشود .
وقتی $m+1=0$ است ، بکار بستن دستور (C) جایز نیست. اما دراین حالت انتگرال داده شده را میتوان با روش مذکور در شمارهٔ ۱۶۹ پیدا کرد .

IV- **دستور** (D) . - از دستور (B) مقدار

$$\int x^m (a+bx^n)^{p-1}dx$$

را پیدا میکنیم و بجای p ، $p+1$ میگذاریم ، دستور (D) بدست میاید .

هرمرتبه که دستور (D) را بکار ببندیم ، یک واحد به p افزوده میشود .

وقتی $p+1=0$ است ، بکار بستن دستور (D) نادرست است . اما دراین حالت $p=-1$ و دیفرانسیل داده شده گویاست .

دستور (۵) حالت IV شمارهٔ ۱۶۷ حالت خاصی از (D) است که در آن $m=0$ ، $p=-n$ ، $n=2$ ، $a=a^2$ و $b=1$ است .

مثال ۱- نشان دهید که :

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

حل - دراین مثال $m=3$ ، $n=2$ ، $p=-\frac{1}{2}$ ، $a=1$ و $b=-1$ است . دستور (A) را بکار میبندیم ، محاسبهٔ انتگرال داده شده به محاسبهٔ $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ منجر میگردد و این انتگرال را میتوان با استفاده از دستور (۴) صفحهٔ ۲۱۲ پیدا کرد .

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{3-2+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)}$$

$$-\frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)}\int x^{3-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

مثال ۲- نشان دهید که :

$$\int \frac{x^{4}dx}{(a^{2}-x^{2})^{\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{1}{4}x^{3}+\frac{3}{8}a^{2}x\right)\sqrt{a^{2}-x^{2}} + \frac{3}{8}a^{4}\, arc\sin\frac{x}{a}+C$$

دستور (A) را دوبار بکار میبندیم ، جواب بدست میاید .

مثال ۳- نشان دهید که :

$$\int (a^{2}+x^{2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}+x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^{2}+x^{2}}\right)+C$$

در این مثال $m=0$ ، $n=2$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، $a=a^{2}$ ، $b=1$ است. دستور(B) را یک بار بکار میبندیم ، جواب بدست میاید .

مثال ٤- نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x^{3}\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{(x^{2}-1)^{\frac{1}{2}}}{2x^{2}}+\frac{1}{2}\, arc\sec x+C$$

دستور (C) را یک بار بکار میبندیم ، جواب بدست میاید .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $$\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\, arc\sin\frac{x}{a}+C$$

۲) $$\int \frac{x^{3}dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}=\frac{1}{3}(x^{2}-2a^{2})\sqrt{a^{2}+x^{2}}+C$$

۳) $$\int \frac{x^{5}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=-\frac{1}{15}(3x^{4}+4x^{2}+8)\sqrt{1-x^{2}}+C$$

$$\text{۴)}\quad \int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\,arc\sin\frac{x}{a}+C$$

$$\text{۵)}\quad \int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\,arc\,tg\frac{x}{a}+C$$

$$\text{۶)}\quad \int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$$

$$\text{۷)}\quad \int\frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

$$\text{۸)}\quad \int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{x(3a^2-2x^2)}{3a^4(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}+C$$

$$\text{۹)}\quad \int(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{8}x(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}$$
$$+\frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

$$\text{۱۰)}\quad \int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{8}x(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}$$
$$-\frac{1}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

$$\text{۱۱)}\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}}{2}$$
$$+\frac{3a^2}{2}\,arc\cos\left(1-\frac{x}{a}\right)+C$$

بنویسید $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int x^{\frac{3}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ و دستور (A) را دوبار بکار ببندید .

$$\text{۱۲)}\quad \int \frac{y^3dy}{\sqrt{4y-y^2}} = -\frac{1}{3}(y^2+5y+30)\sqrt{4y-y^2} + 20\, arc\cos\left(1-\frac{y}{2}\right)+C$$

$$\text{۱۳)}\quad \int \frac{ds}{(a^2+s^2)^3} = \frac{s}{4a^2(a^2+s^2)^2} + \frac{3s}{8a^4(a^2+s^2)} + \frac{3}{8a^5}\, arc\, tg\frac{s}{a}+C$$

$$\text{۱۴)}\quad \int \frac{y^2dy}{\sqrt{9-4y^2}} = -\frac{1}{8}y\sqrt{9-4y^2} + \frac{9}{16}\, arc\sin\frac{2y}{3}+C$$

$$\text{۱۵)}\quad \int \frac{t^3dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{24}(2t^2-1)\sqrt{1+4t^2}+C$$

$$\text{۱۶)}\quad \int y^2\sqrt{4-9y^2}\,dy = \frac{1}{36}y(9y^2-2)\sqrt{4-9y^2} + \frac{2}{27}\, arc\sin\frac{3y}{2}+C$$

$$\text{۱۷)}\quad \int \frac{t^3dt}{(1+9t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9t^2+2}{81\sqrt{1+9t^2}}+C$$

$$\text{۱۸)}\quad \int t^2\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{32}t(1+8t^2)\sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{64}\ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)+C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

$$\text{۱۹)}\quad \int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2} \qquad\qquad \text{۲۰)}\quad \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲۱) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^4}$ ۲۲) $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{4-x^6}}$

۲۳) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,dx}{x}$ ۲۴) $\int \frac{(1-x^3)^{\frac{5}{2}}dx}{x}$

۲۵) $\int \frac{s^7 ds}{(a+bs^4)^{\frac{2}{3}}}$ ۲۶) $\int \frac{z^8 dz}{\sqrt{5-z^3}}$

۲۷) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2}$ ۲۸) $\int \frac{dt}{t^3\sqrt{1-4t^2}}$

۲۹) $\int (9y^2+4)^{\frac{3}{2}}dy$

۱۷۵- دستورهای کاهش برای دیفرانسیلهای مثلثاتی . . روش شمارهٔ اخیر که محاسبهٔ انتگرال مورد نظر را به محاسبهٔ انتگرال دیگری به همان صورت منجر میسازد به **روش کاهش متوالی** موسوم است .

اکنون همین روش را در دیفرانسیلهای مثلثاتی بکار میبندیم و ضمن پیدا کردن $\int sin^m x\, cos^n x\, dx$ دستورهای کاهش مثلثاتی زیر را بدست میاوریم :

$$\text{(E)}\quad \int sin^m x\, cos^n x\, dx = \frac{sin^{m+1} x\, cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int sin^m x\, cos^{n-2} x\, dx$$

$$\text{(F)}\quad \int sin^m x\, cos^n x\, dx = -\frac{sin^{m-1} x\, cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int sin^{m-2} x\, cos^n x\, dx$$

$$\text{(G)} \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx$$

$$\text{(H)} \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx$$

باید بخاطر داشت که :

دستور (E) ۲ واحد از قوهٔ n میکاهد ،
اگر $m+n=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .
دستور (F) ۲ واحد از قوهٔ m میکاهد ،
اگر $m+n=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .
دستور (G) ۲ واحد به قوهٔ n میفزاید ،
اگر $n+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .
دستور (H) ۲ واحد به قوهٔ m میفزاید ،
اگر $m+1=0$ باشد ، بکار بستن آن نادرست است .

برای بدست آوردن این دستورها ، مانند قبل ، دستور محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء ، یعنی

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \qquad (1)$$

را بکار میبندیم . میگیریم :

$$u = \cos^{n-1} x \quad \text{و} \quad dv = \sin^m x \cos x \, dx$$

بنابراین :

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x \, dx \quad \text{و} \quad v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

این مقادیر را در دستور (۱) میگذاریم :

$$(٢) \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = +\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx$$

به همین طریق اگر

$$u = \sin^{m-1} x \quad و \quad dv = \cos^n x \sin x\, dx$$

بگیریم ، داریم :

$$(٣) \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx$$

اما :

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx = \int \sin^m x (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

مقدار اخیر را در (٢) میگذاریم ، مختصر میکنیم و از معادلهٔ حاصل $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ را پیدا مینماییم ، دستور (E) بدست میاید .

اگر در تساوی (٣) نیز به همین ترتیب عمل کنیم ، دستور (F) نتیجه میشود .

از دستور (E) انتگرال طرف راست را پیدا مینماییم و به n ، ٢ واحد میفزاییم ، دستور (G) بدست میاید .

به همین طریق از دستور (F) دستور (H) نتیجه میگردد .

اگر $m+n=0$ باشد ، بکاربستن دستورهای (E) و (F) نادرست است . اگر $n+1=0$ باشد ، بکار بستن دستور (G) نادرست است و اگر $m+1=0$ باشد ، بکار بستن دستور (H) نادرست است . اما در هریک ازاین موارد انتگرال داده شده با روشهایی که قبلاً ذکر شده‌اند ، قابل محاسبه است .

روشن است که وقتی m و n اعدادی صحیح اند ، محاسبهٔ انتگرال

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

را میتوان بااستفاده از دستورهای کاهش (E) تا (H) به محاسبهٔ یکی از انتگرالهای

$$\int dx \quad , \int \sin x\, dx \quad , \int \cos x\, dx \quad , \int \sin x \cos x\, dx \quad ,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x\, dx \quad , \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx \quad , \int \frac{dx}{\cos x \sin x} \quad ,$$

$$\int tg\, x\, dx \quad , \int cotg\, x\, dx$$

منجر ساخت . محاسبهٔ این انتگرالها را نیز قبلاً آموخته‌ایم .

مثال ۱- نشان دهید که :

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{1}{16}(\sin x \cos x + x) + C$$

حل - نخست دستور (F) را بکار میبندیم ، دراین مثال $m=2$ و $n=4$ است:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{1}{6}\int \cos^4 x\, dx \qquad (4)$$

اکنون دستور (E) را برای انتگرال طرف راست (۴) بکار میبندیم ، دراینجا $m=0$ و $n=4$ است :

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx \qquad (5)$$

مجدداً دستور (E) را برای انتگرال طرف راست (۵) بکار میبندیم :

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} \qquad (6)$$

نتیجهٔ (۶) را در (۵) و حاصل‌آن را در (۴) میگذاریم ، جواب بدست میاید .

مثال ۲- نشان دهید که :

$$\int \frac{tg^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{4} \sec 2x\, tg\, 2x - \frac{1}{4} \ln(\sec 2x + tg\, 2x) + C$$

حل -
$$\frac{\sin^2 2x}{\cos^3 2x}=\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}=\frac{tg^2 2x}{\cos 2x}$$

تغییر متغیر $2x=u$ میدهیم ، $x=\frac{u}{2}$ ، $dx=\frac{du}{2}$ میشود و داریم :

$$\int \sin^2 2x \cos^{-3} 2x\, dx=\frac{1}{2}\int \sin^2 u \cos^{-3} u\, du \qquad (7)$$

درانتگرال طرف راست(۷)، $m=2$ و $n=-3$ است . دستور (G) را بکار میبندیم:

$$\int \sin^2 u \cos^{-3} u\, du=-\frac{\sin^3 u \cos^{-2} u}{-2}+\frac{1}{-2}\int \sin^2 u \cos^{-1} u\, du \qquad (8)$$

در انتگرال طرف راست (۸) دستور (F) را بکار میبندیم :

$$\int \sin^2 u \cos^{-1} u\, du=-\sin u+\int \cos^{-1} u\, du \qquad (9)$$
$$=-\sin u+\ln(\sec u+tg\, u)$$

نتایج (۹) و (۸) را در (۷) میگذاریم ، مختصر میکنیم و بجای u ، $2x$ قرار میدهیم ، جواب بدست میاید .

تمرین

درستی انتگرالهای زیر را بیازمایید :

۱) $$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx=\sin x \cos x\left[\frac{1}{6}\sin^4 x-\frac{1}{24}\sin^2 x-\frac{1}{16}\right]+\frac{x}{16}+C$$

۲) $$\int tg^3\frac{x}{3}\, dx=\frac{3}{2}\, tg^2\frac{x}{3}+3\ln\cos\frac{x}{3}+C$$

۳) $$\int cotg^4\theta\, d\theta=-\frac{cotg^3\theta}{3}+cotg\,\theta+\theta+C$$

۴) $\int sec^3 t\, dt = \frac{1}{2} sec\, t\, tg\, t + \frac{1}{2} ln\,(sec\, t + tg\, t) + C$

۵) $\int cosec^3 x\, dx = -\frac{1}{2} cosec\, x\, cotg\, x + \frac{1}{2} ln\,(cosec\, x - cotg\, x) + C$

۶) $\int cosec^5 \theta\, d\theta = -\frac{cosec\,\theta\, cotg\,\theta}{4}\left(cosec^2\theta + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8} ln\,(cosec\,\theta - cotg\,\theta) + C$

۷) $\int sin^2\theta\, cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{8} sin\,\theta\, cos\,\theta(2 sin^2\theta - 1) + \frac{1}{8}\theta + C$

۸) $\int \frac{cotg^2 2\theta\, d\theta}{sin\, 2\theta} = -\frac{1}{4} cotg\, 2\theta\, cosec\, 2\theta - \frac{1}{4} ln\,(cosec\, 2\theta - cotg\, 2\theta) + C$

۹) $\int \frac{dx}{sin^4 x} = -\frac{cos\, x}{3 sin^3 x} - \frac{2 cos\, x}{3 sin\, x} + C$

۱۰) $\int cos^6\theta\, d\theta = \frac{cos\,\theta\, sin\,\theta}{48}[8 cos^4\theta + 10 cos^2\theta + 15] + \frac{5\theta}{16} + C$

۱۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}$

۱۲) $\int_0^{\pi} cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{8}$

۱۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 2\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{32}$

۱۴) $\int_0^{\pi} sin^8\theta\, d\theta = \frac{35\pi}{128}$

۱۵) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4 x\, dx}{sin^2 x} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۶) $\int sin^4 2\theta\, d\theta$

۱۷) $\int cosec^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta$

۱۸) $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^5 x}$ ۱۹) $\int \frac{d\theta}{\sin^4\theta \cos^2\theta}$

۲۰) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^3 \frac{\theta}{2} d\theta$ ۲۱) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$

۲۲) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta$ ۲۳) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^4 d\theta$

۱۷۶- استفاده ازجدول انتگرال . - هدف روشهای مذکور در فصول دوازدهم و شانزدهم و هفدهم تبدیل انتگرال داده شده به یک (یا به مجموع چند) انتگرال نمونهٔ مقدماتی مذکور در شمارهٔ ۱۲۸ است . این روشها عبارتند از :

محاسبهٔ انتگرال از راه جزء به جزء (شمارهٔ ۱۳۶) ،

محاسبهٔ انتگرال بوسیلهٔ کسرهای گویای ساده (شماره ۱۶۷) ،

محاسبهٔ انتگرال بوسیلهٔ تغییر متغیر (شماره‌های ۱۶۸ تا ۱۷۲) ،

بکار بستن دستورهای کاهش (شماره‌های ۱۷۴ و ۱۷۵) .

اما اگر یک جدول کم‌وبیش جامع انتگرال در دست باشد ، هنگام محاسبهٔ هرانتگرالی نخست باید در جدول گشت و نمونه‌ای پیدا کرد که جواب انتگرال را ، بدون بکار بستن هرگونه روشی ، بدست دهد . در فصل بیست‌وهفتم یک جدول مندرج است و ما اکنون با استفاده از آن جواب چند انتگرال را بدست میاوریم .

مثال ۱- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} ln\left(\frac{2+x}{x}\right) + C$$

حل - ازانتگرال‌نمونهٔ ۱۴ استفاده میکنیم : $a=2$ ، $b=1$ و $u=x$ است.
اگر جدول در دست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید از **حالت** II ی شمارهٔ ۱۶۷ استفاده کنیم .

مثال ۲- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x(9+4x^2)} = \frac{1}{18} ln\left(\frac{x^2}{9+4x^2}\right) + C$$

حل - ازانتگرال نمونهٔ ۲۲ استفاده میکنیم : $a=۳$ ، $b=۲$ و $u=x$ است.
اگر جدول در دست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید از **حالت III** ی شمارهٔ ۱۶۷ استفاده کنیم .

مثال ۳- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{٤+۳x}} = \frac{۱}{۲}\, ln\, \frac{\sqrt{٤+۳x}-۲}{\sqrt{٤+۳x}+۲} + C$$

حل - ازانتگرال نمونهٔ ۲۱ استفاده میکنیم : $a=٤$ ، $b=۳$ و $u=x$ است .
اگر جدول در دست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید مانند شمارهٔ ۱۶۸ تغییر متغیر $٤+۳x=z^۲$ بدهیم .

مثال ٤- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۳x^۲+٤x-۷}} = \frac{\sqrt{۳x^۲+٤x-۷}}{۳}$$

$$-\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}\, ln\,(٦x+٤+۲\sqrt{۳}\sqrt{۳x^۲+٤x-۷})+C$$

حل - از انتگرال نمونهٔ ۱۱۲ استفاده میکنیم : $a=-۷$ ، $b=٤$ ، $c=۳$ و $u=x$ است .

اگرجدول دردست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید مانند مثال ۲ ی صفحهٔ ۳۲۷ عمل کنیم .

مثال ۵- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int e^{۳x}\cos ۲x\, dx = \frac{۱}{۱۳}\, e^{۳x}\,(۲\sin ۲x+۳\cos ۲x)+C$$

حل - ازانتگرال نمونهٔ ۱۰٤ استفاده میکنیم : $a=۳$ ، $n=۲$ و $u=x$ است.
اگر جدول در دست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید از راه جزء به جزء عمل کنیم . مثال ٦ شمارهٔ ۱۳٦ را ببینید .

در بسیاری از مسائل انتگرال داده شده را نمیتوان به آسانی مثالهای مذکور با یکی

از انتگرالهای جدول مقایسه کرد . دراین صورت باید انتگرال داده شده را با تغییر متغیر ساده‌ای به صورت یکی از انتگرالهای جدول درآورد . این روش در فصل دوازدهم و در مثالهای آن مکرر بکار رفته است.

مثال ۶- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{۴x^۲+۹}} = \frac{۱}{۳}\, ln\, \frac{۲x}{۳+\sqrt{۴x^۲+۹}} + C$$

حل - این انتگرال به انتگرال نمونهٔ ۴۷ شبیه است. تغییر متغیر $u=۲x$ میدهیم، $x=\frac{u}{۲}$ و $dx=\frac{du}{۲}$ میشود . این مقادیر را در انتگرال داده شده میگذاریم، داریم :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{۴x^۲+۹}} = \int \frac{\frac{du}{۲}}{\frac{u}{۲}\sqrt{u^۲+۹}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^۲+۹}}$$

ازانتگرال نمونهٔ ۷۴ استفاده میکنیم ، $a=۳$ است. درحاصل آن بجای u ، $۲x$ وبجای a ، ۳ میگذاریم ، داریم :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{۴x^۲+۹}} = -\frac{۱}{۳}\, ln\left(\frac{۳+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۲x}\right)+C$$

اگر جدول در دست نباشد ، برای محاسبهٔ این انتگرال باید مانند مثال ۲ ی شمارهٔ ۱۳۵ عمل کنیم .

مثال ۷- با استفاده از جدول انتگرال نشان دهید که :

$$\int \frac{\sqrt{۹x-۴x^۲}}{x^۳}\, dx = -\frac{۲(۹x-۴x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۲۷x^۳} + C$$

حل - این انتگرال به انتگرال نمونهٔ ۸۴ شبیه است. تغییر متغیر $u=۲x$ میدهیم، $x=\frac{u}{۲}$ و $dx=\frac{du}{۲}$ میشود. این مقادیررا درانتگرال داده شده میگذاریم، داریم:

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{\frac{1}{8}u^3}\,\frac{du}{2} = 4\int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{u^3}\,du$$

ازانتگرال‌نمونهٔ ۸۴ (با $a=\frac{9}{4}$) استفاده میکنیم ودرنتیجه‌ای که بدست میاید بجای u ، 2x میگذاریم ، جواب پیدا میشود .

اگر نتوان هیچیک از دستورهای جدول را ، مانند دو مثال اخیر ، بکار بست ، باید انتگرال داده شده را با استفاده از یک یا چند روش مذکور در آغاز این شماره به یک یا چند انتگرال دیگر که با انتگرالهای جدول قابل مقایسه باشند ، تبدیل نمود . برای این کار دستورالعمل و راه کلی دیگری جز آنچه تا کنون گفته‌ایم وجود ندارد .

نظم جدول را باید خوب‌آموخت. هریک از انتگرالهای نمونهٔ مقدماتی شمارهٔ ۱۲۸ نیز درجای مخصوص به خود مندرج است . دستورهای کاهش شمارهٔ ۱۷۴ ، با جزئی تغییر ، در ردیفهای ۹۶ تا ۱۰۴ و دستورهای کاهش شمارهٔ ۱۷۵ ، با چند دستور اضافی ، در ردیفهای ۱۵۷ تا ۱۷۴ ذکر شده‌اند . روشن است که در محاسبهٔ انتگرالها سرعت به نسبت آشنایی با جدول و مهارت در بکار بردن آن زیاد میگردد .

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int x^3\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{15}(3x^2-10)(x^2+5)^{\frac{3}{2}}+C$

۲) $\int \frac{dt}{(1-4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-4t^2}}+C$

۳) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9x^2-4}} = \frac{x}{18}\sqrt{9x^2-4}+\frac{2}{27}\ln(3x+\sqrt{9x^2-4})+C$

۴) $\int \frac{d\theta}{۲-\cos ۲\theta}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\, arc\, tg\,(\sqrt{۳}\, tg\,\theta)+C$

۵) $\int \frac{x^{۵}dx}{(۱-x^{۴})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{x^{۲}}{۲\sqrt{۱-x^{۴}}}-\frac{۱}{۲}\, arc\sin x^{۲}+C$

۶) $\int \frac{(a^{۲}-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}dx}{x^{۲}}=-\frac{(x^{۲}+۲a^{۲})\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}{۲x}$

$-\frac{۳a^{۲}}{۲}\, arc\sin\frac{x}{a}+C$

۷) $\int e^{t}\sin^{۲}\frac{t}{۲}dt=\frac{۱}{۴}e^{t}(۲-\sin t-\cos t)+C$

۸) $\int \frac{\sin ۲\theta\, d\theta}{۱+\cos\theta}=۲\ln(۱+\cos\theta)-۲\cos\theta+C$

۹) $\int \frac{dx}{۲+۲x+x^{۲}}=arc\, tg\,(x+۱)+C$

۱۰) $\int x^{۳}\sin x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\sin x^{۲}-\frac{۱}{۲}x^{۲}\cos x^{۲}+C$

۱۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-۱)(۲-x)}}=۲\, arc\sin\sqrt{x-۱}+C$

۱۲) $\int \frac{\sqrt{۹t^{۲}+۴}\,dt}{t}=\sqrt{۹t^{۲}+۴}-۲\ln\left(\frac{۲+\sqrt{۹t^{۲}+۴}}{t}\right)+C$

۱۳) $\int \frac{du}{u^{۴}\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}=-\frac{(a^{۲}+۲u^{۲})\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}{۳a^{۴}u^{۳}}+C$

۱۴) $\int \frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۴-x}}=\frac{۱}{۱۶}\ln\left(\frac{\sqrt{۴-x}-۲}{\sqrt{۴-x}+۲}\right)-\frac{\sqrt{۴-x}}{۴x}+C$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱٥) $\int \frac{x^{٥}dx}{٥+٤x^{٢}}$

۱٦) $\int (a^{٢}-u^{٢})^{\frac{٣}{٢}}du$

۱۷) $\int \frac{dx}{x^{٢}+٤x+٢}$

۱۸) $\int \frac{cotg\, t\, dt}{a+b\, sin\, t}$

۱۹) $\int \sqrt{\frac{١+٢y}{١-٢y}}\,dy$

۲۰) $\int \frac{\sqrt{٤x^{٢}-٢٥}\,dx}{x^{٢}}$

۲۱) $\int \frac{x^{٣}dx}{\sqrt{a+bx^{٢}}}$

۲۲) $\int \frac{dy}{y^{٢}\sqrt{y-١}}$

۲۳) $\int \sqrt{\frac{٣+x^{٢}}{٢+x^{٢}}}\,x\,dx$

۲٤) $\int \frac{d\theta}{٥+٣sin\,٢\theta}$

۲٥) $\int \frac{d\theta}{٣+٥sin\,٢\theta}$

۲٦) $\int \frac{dx}{x^{٤}\sqrt{x^{٦}+a^{٦}}}$

۲۷) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{٢}+٢x+٤}}$

۲۸) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{٤+٢x-x^{٢}}}$

۲۹) $\int \frac{dx}{(١+e^{x})^{٢}}$

۳۰) $\int \frac{\sqrt{x^{٣}-١}\,dx}{x}$

۳۱) $\int \frac{\sqrt{x+٤}\,dx}{x}$

۳۲) $\int e^{t}\,cos^{٢}t\,dt$

۳۳) $\int \frac{cotg\,\theta\,d\theta}{٤+sin^{٢}\theta}$

انتگرالهای معین زیر را حساب کنید :

۳٤) $\int_{٠}^{٣} \frac{x\,dx}{(١+x)^{٣}}=٠٫٦٣٦$

۳٥) $\int_{١}^{\frac{٥}{٣}} \frac{dx}{x^{٢}\sqrt{٢٥-٩x^{٢}}}=\frac{٤}{٢٥}$

۳۶) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{45}$

۳۷) $\int_{1}^{2} \frac{dt}{t(5-t^2)} = 0/277$

۳۸) $\int_{0}^{2} (4x^2+9)^{\frac{3}{2}} dx = 112/9$

۳۹) $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-u}{a+u}}\, du = \pi a$

۴۰) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-2x^2}} = 1/338$

۴۱) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{9-2x^2}\, dx}{x^2} = 1/129$

۴۲) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{9-2x^2}\, dx}{x} = 1/467$

۴۳) $\int_{0}^{1} t^2 e^{-t} dt = 0/1605$

۴۴) $\int_{1}^{2} \frac{dy}{y^2\sqrt{4y^2+5}}$

۴۵) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^4\theta \, d\theta$

۴۶) $\int_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$

۴۷) $\int_{0}^{1} e^{-\frac{t}{5}} \cos \frac{\pi t}{2} dt$

۴۸) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}$

۴۹) $\int_{0}^{\pi} \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta$

تمرین اضافی

۱) درستی نتایج زیر را بیازمایید :

(a) $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \ln 3$

(b) $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \frac{2}{3}$

۲) سهمی (c) از مبدأ مختصات و نقطهٔ (۲ , ۱) میگذرد و محور آن موازی محور

y هاست . نیز میدانیم که مساحت سطح محدود به سهمی (c) و محور x ها ماکزیمم یا مینیمم است . معادلهٔ سهمی (c) را پیدا کنید .

جواب : $y = ۶x - ۴x^۲$ ، مساحت مینیمم است.

۳) خم نمایش $y\sqrt{x} = ln\, x$ را رسم کنید . سطح محدود بین این خم و محور x ها و خطوط موازی محور y ها ومار برنقاط ماکزیمم و عطف را در حول محور x ها دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید . جواب : $\frac{۲۹۶}{۸۱}\pi$

۴) قطرقاعدهٔ مخروط قائم دوار توپری ۶ فوت ، ارتفاع آن ۳ فوت و وزن مخصوص آن درهرنقطه ، مانند P ، برابر $(۵ - r) ۲۰$ پاوند در فوت مکعب است . r فاصلهٔ نقطهٔ P از محور مخروط و برحسب فوت است . وزن مخروط را حساب کنید .

جواب : ۶۳۰π پاوند

راهنمایی - وزن یک استوانهٔ توخالی به ضخامت dr را که وزن مخصوص آن در تمام نقاط یکی است ، جزء وزن بگیرید .

۵) شعاع داخلی و خارجی یک کرهٔ توخالی بترتیب ۶ و ۱۰ اینچ است. وزن مخصوص آن درهرنقطه به نسبت عکس فاصلهٔ نقطه تا مرکز کره تغییر میکند و در سطح خارجی آن برابر ۲ آونس در اینچ مکعب است . وزن کره را حساب کنید .

جواب : ۲۵۶۰π آونس

۶) n عددی صحیح و زوج است . نشان دهید که:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{n}\, x\, dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} cos^{n}\, x\, dx = \frac{(n-۱)(n-۳)\ldots(۱)}{n(n-۲)\ldots(۲)}\ \frac{\pi}{۲}$$

۷) n عددی صحیح و فرد است . مقدار انتگرال زیر را حساب کنید :

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{n}\, x\, dx$$

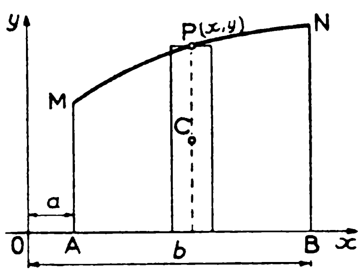
فصل هجدهم

مرکز ثقل هندسی، فشار مایعات و موارد استعمال دیگر

۱۷۷- گشتاور سطح ـ مرکز ثقل هندسی. ـ یک قطعه مقوای مسطح، نازک، سخت و همگن را درنظر میگیریم. بنابر تعریف نقطه‌ای از مقوا راکه مقوا روی آن افقی و به حال تعادل باقی میماند، مرکز ثقل هندسی آن مینامیم.

در بعضی از شکلهای سادهٔ هندسی مکان مرکز ثقل معین است. در مستطیل‌ودایره مرکز ثقل هندسی همان مرکز شکل است. بطورکلی هر شکل مسطح هندسی که یک مرکز تقارن داشته باشد، مرکز ثقل هندسی آن همان مرکز تقارن آن است و اگر شکل مسطحی یک محور تقارن داشته باشد، مرکز ثقل هندسی آن شکل برمحور تقارن آن قرار دارد.

ما در زیر راههای ریاضی پیداکردن مرکز ثقل هندسی را بیان میکنیم ولی از آزمودن درستی این مطالب بااستدلالهای مکانیکی صرف‌نظر مینماییم.



شکل ۱۰۰

پاره سطح AMPNB را درنظر میگریم (شکل ۱۰۰) وآن‌را، مانند قبل، به n مستطیل که پایهٔ هریک ازآنها $\triangle x$ است،تقسیم میکنیم. در شکل ۱۰۰ تنها یکی‌ازاین مستطیلها رسم شده است. مساحت این مستطیل را dA ومرکزثقل هندسی آن را $C(h, k)$ مینامیم، دراین صورت

$$dA = y\,dx \quad , \quad h = x \quad , \quad k = \frac{y}{۲} \qquad (۱)$$

است. **گشتاور سطح** این مستطیل جزئی نسبت به Ox (یا نسبت به Oy) برابر

است با حاصل‌ضرب مساحت آن درفاصلهٔ مرکزثقل هندسی آن از Ox (یا از Oy) . اگر این گشتاورها را بترتیب dM_x و dM_y بنامیم ، داریم :

$$dM_x = k\,dA \quad , \quad dM_y = h\,dA \tag{A}$$

گشتاور سطح شکل AMPNB با بکار بستن قضیهٔ اساسی (شمارهٔ ۱۰۶) برمجموع گشتاورهای سطح n مستطیل جزئی بدست میاید . بنابراین :

$$M_x = \int k\,dA \quad , \quad M_y = \int h\,dA \tag{B}$$

سرانجام اگر مختصات مرکز ثقل هندسی پاره سطح AMPNB را $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و مساحت آن را A بنامیم ، روابط (B) ، یعنی روابط بین گشتاورهای سطح و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، به صورت زیر در میایند :

$$A\bar{x} = M_y \quad , \quad A\bar{y} = M_x \tag{C}$$

برای تعیین $\bar{x}$ و $\bar{y}$ گشتاورهای M_x و M_y را حساب میکنیم . از روابط (۱) و (B) و با توجه به شکل ۱۰۵ داریم :

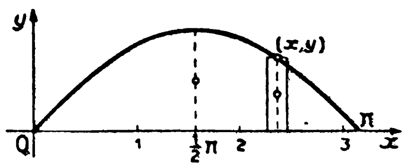
$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_a^b y^۲ dx \quad , \quad M_y = \int_a^b xy\,dx \tag{۲}$$

y تابعی از x است و باید مقدار آن را از معادلهٔ خم MPN بدست آورد ودر دستورهای (۲) قرار داد .

اگر مقدار A در دست باشد ، از روابط (C) تساویهای

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} \tag{۳}$$

نتیجه میشوند . اگر مقدار A در دست نباشد ، باید آن را به همان طریقی که در شمارهٔ ۱۴۵ ذکر شده است ، حساب کرد .



شکل ۱۵۶

مثال ۱ - مرکز ثقل هندسی

سطح زیر یک طاق‌نمای خم $y=\sin x$ (٤)
را پیدا کنید .

حل - یک مستطیل جزئی رسم میکنیم ، داریم :

$$dA=y\,dx=\sin x\,dx \tag{٥}$$

$$dM_x=k\,dA=\frac{1}{2}y^2dx=\frac{1}{2}\sin^2x\,dx$$

$$dM_y=h\,dA=xy\,dx=x\sin x\,dx$$

حدود انتگرالها $x=0$ و $x=\pi$ است ، بنابراین :

$$A=\int_0^\pi \sin x\,dx=2$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2x\,dx=\frac{\pi}{4} \tag{٦}$$

$$M_y=\int_0^\pi x\sin x\,dx=\pi$$

پس بنابر روابط (۳) ، $\bar{x}=\frac{\pi}{2}$ و $\bar{y}=\frac{\pi}{8}$ است .

مقدار $\bar{x}$ را بدون محاسبه نیز میتوان بدست آورد زیرا خط $x=\frac{\pi}{2}$ محور تقارن طاق‌نماست .

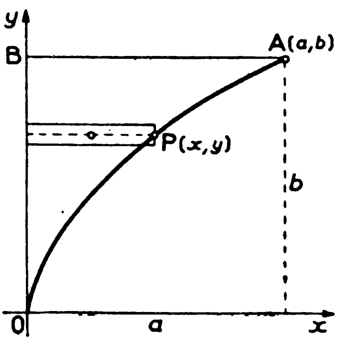
مثال ۲ - درشکل ۱۵۷ خم OPA پاره قوسی از سهمی $y^2=2px$ است . مرکز ثقل هندسی سطح OPAB را پیدا کنید .

حل - یک مستطیل جزئی رسم میکنیم و مختصات مرکز ثقل هندسی آن را $(h\,,k)$ مینامیم ، پس :

$$dA=x\,dy$$

$$h=\frac{x}{2}$$

$$k=y$$



شکل ۱۵۷

دستورهای (A) را بکار میبندیم :

$$dM_x = k\, dA = xy\, dy \quad , \quad dM_y = \bar{h}\, dA = \frac{1}{2} x^2 dy$$

مقدار x را از معادلهٔ $y^2 = 2px$ پیدا میکنیم و در روابط اخیر میگذاریم و انتگرال آنها را بین دوحد $y = 0$ و $y = b$ حساب مینماییم ، داریم :

$$A = \frac{b^3}{6p} \quad , \quad M_x = \frac{b^4}{8p} \quad , \quad M_y = \frac{b^5}{40p^2}$$

بنابراین $\bar{x} = \frac{3b^2}{20p}$ و $\bar{y} = \frac{3b}{4}$ است . اما $x = a$ و $y = b$ در معادلهٔ $y^2 = 2px$ صدق میکنند ، پس $b^2 = 2pa$ و مختصات مرکز ثقل $\left(\frac{3a}{10} , \frac{3b}{4}\right)$ است .

تمرین

در هریک از مسائل ۱ تا ۱۳ مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین خمهای مذکور را پیدا کنید :

۱) $y^2 = 2px$ و $x = h$ جواب : $\left(\frac{3h}{5} , 0\right)$

۲) $y = x^3$ و $x = 2$ و $y = 0$ $\left(\frac{8}{5} , \frac{16}{7}\right)$

۳) پاره سطح واقع درناحیهٔ اول و محدود بین خم $y = x^3$ و خط $y = 4x$

$\left(\frac{16}{15} , \frac{64}{21}\right)$

۴) $x = 4y - y^2$ و $y = x$ $\left(\frac{12}{5} , \frac{3}{2}\right)$

۵) $y^2 = 4x$ و $2x - y = 4$ $\left(\frac{8}{5} , 1\right)$

۶) $y = x^2$ و $y = 2x + 3$ $\left(1 , \frac{17}{5}\right)$

۷) $y=x^2-2x-3$ و $y=6x-x^2-3$ جواب : $(1\ ,\ 2)$

۸) $y=x^3$ و $y=8$ و $x=0$

۹) $y=6x-x^2$ و $y=x$

۱۰) $y=4x-x^2$ و $y=2x-3$

۱۱) $y=x^3-3x$ و $y=x$ (پاره سطح واقع در ناحیهٔ اول)

۱۲) $y^2=a^2-ax$ و $x=0$ و $y=0$ (پاره سطح واقع در ناحیهٔ اول)

۱۳) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و $y=0$ و $x=2a$ (پاره سطح واقع در ناحیهٔ اول)

۱۴) مرکز ثقل هندسی سطح محدود به محورهای مختصات و پاره سهمی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ را پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{5}$

۱۵) مرکز ثقل هندسی حلقهٔ خم $y^2=4x^2-x^3$ را پیدا کنید .

جواب : $\bar{x}=\frac{16}{7}\ ,\ \bar{y}=0$

۱۶) مرکز ثقل هندسی آن قسمت از بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را که درناحیهٔاول مختصات واقع است ، پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}\ ,\ \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$

۱۷) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین سهمی $y^2=2px$ و خط $y=mx$ را پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=\frac{4p}{5m^2}\ ,\ \bar{y}=\frac{p}{m}$

۱۸) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین دو سهمی $y^2=ax$ و $x^2=by$ را پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=\frac{9}{20}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\ ,\ \bar{y}=\frac{9}{20}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

۱۹) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین سیسوئید $y^2(2a-x)=x^3$ و خط $x=2a$ را پیدا کنید (خط مذکور مجانب سیسوئید است) .

جواب : $\bar{x}=\frac{5a}{3}\ ,\ \bar{y}=0$

۲۰) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین خم آگنزی* $x^2y=4a^2(2a-y)$ و محور x ها را پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=0 \quad , \quad \bar{y}=\frac{a}{2}$

۲۱) فاصلهٔ مرکز دایره از مرکز ثقل هندسی سطح قطاعی که زاویهٔ مرکزی آن 2θ است ، چقدر است ؟ جواب : $\frac{2r \sin\theta}{3\theta}$

۲۲) فاصلهٔ مرکز دایره از مرکز ثقل هندسی سطح قطعه‌ای که زاویهٔ مرکزی آن 2θ است ، چقدر است ؟ جواب : $\frac{2r \sin^3\theta}{3(\theta-\sin\theta\cos\theta)}$

۲۳) مرکز ثقل هندسی سطح محدود به کاردیوئید $\rho=a(1+\cos\theta)$ را پیدا کنید . جواب : $\bar{x}=\frac{5a}{6} \quad , \quad \bar{y}=0$

۲۴) مرکز ثقل هندسی سطح محدود به یک حلقه ازخم $\rho=a\cos 2\theta$ را پیدا کنید . جواب : فاصلهٔ مرکز ثقل از مبدأ مختصات $=\frac{128a\sqrt{2}}{105\pi}$

۲۵) مرکز ثقل هندسی سطح محدود به یک حلقه از خم $\rho=a\cos 3\theta$ را پیدا کنید . جواب : فاصلهٔ مرکز ثقل از مبدأ مختصات $=\frac{81a\sqrt{3}}{80\pi}$

۱۷۸- مرکز ثقل هندسی جسم دوار . - مرکز ثقل هندسی یک جسم ، بنابر تعریف ، مرکز ثقل جسم همگنی است که همان قسمت از فضا را اشغال کرده باشد. روشن است که اگر جسم یک صفحهٔ تقارن داشته باشد ، مرکز ثقل هندسی جسم برآن صفحه واقع است .

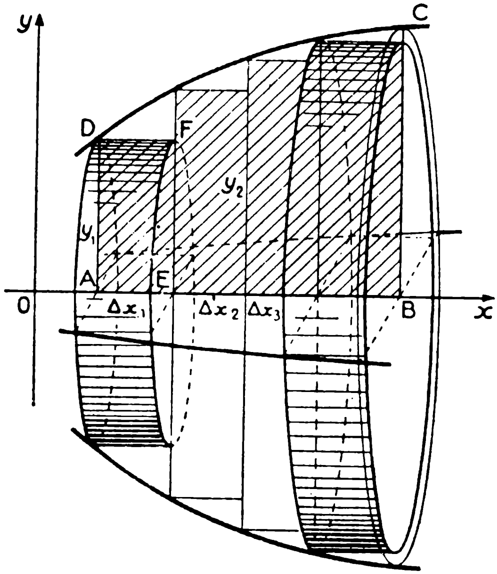
برای پیدا کردن مرکز ثقل هندسی جسم دوار تنها لازم است در جزئیات مطالب مذکور در شمارهٔ قبل تغییر مختصری بدهیم .

فرض میکنیم Ox محور دوران جسم است . روشن است که مرکز ثقل هندسی جسم

* The Witch of Agnesi

برآن‌واقع است. dV ، جزء حجم ، حجم استوانهٔ دواری به ارتفاع Δx و به شعاع قاعدهٔ y و لذا برابر $\pi y^{2}\Delta x$ است . **گشتاور حجم** این استوانه نسبت به صفحهٔ ماربر Oy و عمود به Ox عبارتست از

$$dM_y = x\,dV = \pi x y^{2}\Delta x \qquad (۱)$$



شکل ۱۵۸

گشتاور حجم جسم با بکار بستن قضیهٔ اساسی بدست میاید و $\bar{x}$ با دستور زیر تعیین میشود :

$$V\bar{x} = M_y = \int \pi x y^{2} dx \qquad (۲)$$

مثال - مرکز ثقل هندسی مخروط دوار را پیدا کنید .

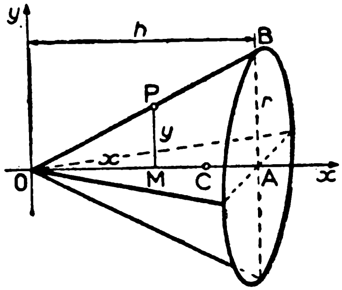
حل - معادلهٔ مولد OB عبارتست از

$$\frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{rx}{h}$$

از آنجا

$$M_y=\int_{\circ}^{h} \pi x \frac{r^{2}x^{2}}{h^{2}} dx=\frac{1}{4} \pi r^{2}h^{2}$$

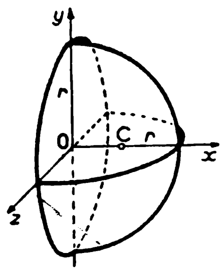
چون $V=\frac{1}{3} \pi r^{2}h$ است ، $\bar{x}=\frac{3}{4} h$ است .



شکل ۱۵۹

تمرین

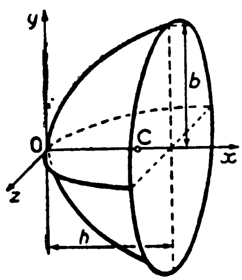
۱) مرکز ثقل هندسی نیمکره را پیدا کنید (شکل ۱٦۰) . جواب : $\bar{x}=\frac{3}{8} r$



شکل ۱٦۰

۲) مرکز ثقل هندسی پارا بلوئید دوار را پیدا کنید (شکل ۱٦۱) .

جواب : $\bar{x}=\frac{2}{3} h$



شکل ۱٦۱

در هریک از مسائل ۳ تا ۸ سطح محدود به Ox و خمهای مذکور را در حول محور Ox دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید :

۳) $x^{2}-y^{2}=a^{2}$ و $x=2a$

٤) $2xy=a^{2}$ و $x=\frac{a}{2}$ و $x=2a$

۵) $ay=x^{2}$ و $x=a$

جواب : $\bar{x}=\frac{5}{6} a$

٦) $y^{2}=4x$ و $x=1$ و $x=4$

۷) $x^{2}+y^{2}=4$ و $x=\circ$ و $x=1$

جواب : $\bar{x}=\frac{21}{44}$

۸) $y=a\sin x$ و $x=\frac{\pi}{۲}$

در هریک از مسائل ۹ تا ۱۱ سطح محدود به Oy و خمهای مذکور را در حول محور Oy دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید :

۹) $y^۲=۴ax$ و $y=b$ جواب : $\bar{y}=\frac{۵}{۶}b$

۱۰) $x^۲-y^۲=۱$ و $y=۰$ و $y=۱$ $\bar{y}=\frac{۹}{۱۶}$

۱۱) $ay^۲=x^۳$ و $y=a$

۱۲) شعاعهای قاعده‌های مخروط دوار ناقصی بترتیب ۳ اینچ و ۶ اینچ و ارتفاع آن ۸ اینچ است . مرکز ثقل هندسی آن را پیدا کنید .

۱۳) پاره سطح واقع درناحیهٔ اول و محدود به سهمی $y^۲=۴ax$ و خطوط $y=۰$ و $x=a$ را در حول محور y ها دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید . جواب : $\bar{y}=\frac{۵}{۶}a$

۱۴) آن قسمت از سطح بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ راکه در ناحیهٔ اول واقع است در حول محور x ها دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید .

جواب : $\bar{x}=\frac{۳}{۸}a$

۱۵) پاره سطح واقع در ناحیهٔ اول و محدود به هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و خطوط $y=۰$ و $x=۲a$ را در حول محور x هادوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم‌حاصل‌را پیدا کنید .

۱۶) سطح محدود بین هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}+۱=۰$ و خطوط $x=۰$ و $x=a$ و $y=۰$ را درحول محور x ها دوران‌دهید و مرکز ثقل هندسی‌جسم حاصل‌را پیدا کنید.

۱۷) سطح محدود بین خم $y=\sin ۲x$ و خطوط $y=۰$ و $x=\frac{\pi}{۴}$ را در حول محور x ها دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید .

۱۸) سطح محدود بین خم $y=e^x$ و خطوط $x=0$ و $x=a$ و $y=0$ را در حول محور x ها دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید .

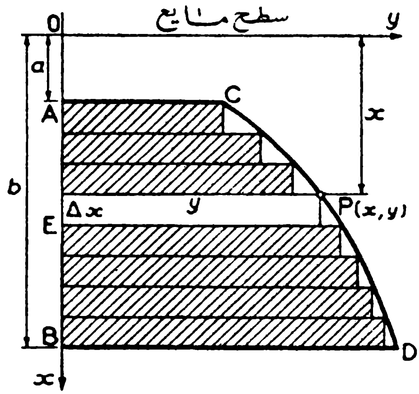
۱۹) پاره سطح محدود به «یک سهمی و محور آن و خط قائم به محور سهمی در کانون» را در حول خط اخیر دوران دهید و مرکز ثقل هندسی جسم حاصل را پیدا کنید.

جواب : فاصلهٔ مرکز ثقل از کانون = پنج شانزدهم پارامتر سهمی

۱۷۹- فشارمایعات. - اکنون به مطالعهٔ فشارمایعات میپردازیم و روش محاسبه‌ای را میاموزیم که مقدار فشار مایع به جدار قائم ظرف را بدست میدهد .

فرض میکنیم ABDC یک قسمت از سطح قائم جدار یک مخزن است. میخواهیم مقدار فشاری راکه مایع به این پاره سطح وارد میاورد تعیین کنیم .

محورهای مختصات را آن‌طورکه در شکل ۱۶۲ رسم شده‌اند درنظر میگیریم. محور y ها برسطح مایع قرار دارد . AB را به n قسمت جزئی تقسیم میکنیم و در داخل سطح



شکل ۱۶۲

ABDC مستطیلهایی افقی رسم مینماییم. بدین ترتیب مساحت هرمستطیل (مانند EP) برابر $y\Delta x$ است . اگر این مستطیل راکه درعمق x قرار دارد افقی فرض کنیم ، فشار وارد برآن برابر

$$Wxy\Delta x$$

(W وزن یک واحد حجم از مایع است)

است ، زیرا فشار مایع برهرسطح افقی برابر وزن ستونی از همان مایع است که قاعدهٔ آن سطح

افقی داده شده وارتفاع آن برابر فاصلهٔ این سطح از سطح مایع باشد. چون فشار مایع درتمام جهات یکی است ، لذا فشار مایع برمستطیل EP ، در وضع قائم آن ، تقریباً همان $Wxy\triangle x$ است . بنابراین ، بطور تقریبی ،

$$\sum_{i=1}^{n} Wx_i y_i \triangle x_i$$

فشار وارد برتمام مستطیلهارا نشان میدهد وفشاروارد برسطح ABDC بروشنی برابرحداین مجموع است و بنابر قضیهٔ اساسی داریم :

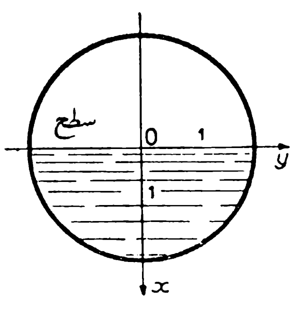
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Wx_i y_i \triangle x_i = \int Wxy\, dx$$

بنابراین فشار مایع بریک قسمت از جدار قائم یک مخزن که بین یک خم و محور x ها و دو خط افقی $x=a$ و $x=b$ محدود است ، با دستور

$$\text{فشار مایع} = W\int_a^b yx\, dx \qquad (D)$$

تعیین میشود . دراین دستور باید بجای y مقدار آن را ، با استفاده ازحل معادلهٔ خم داده شده نسبت به y ، برحسب x قرار داد .

مثال ۱ - قطر لولهٔ اصلی انتقال آب شهری ۲ متر است . یک طرف لوله را با یک درپوش بسته‌اند و لوله تا نیمه پرآب است . میخواهیم بدانیم فشاری که به درپوش وارد میاید چقدر است ؟



شکل ۱۶۳

حل - معادلهٔ دایرهٔ لوله (شکل ۱۶۳) $x^2+y^2=1$ و لذا $y=\sqrt{1-x^2}$ است . نیز میدانیم که $W=1000$ است. اگرحدود انتگرال را $x=0$ و $x=1$ بگیریم واین مقادیر را دردستور (D) بگذاریم ، مقدارفشار وارد برربع دایرهٔ واقع درطرف راست محور Ox بدست میاید :

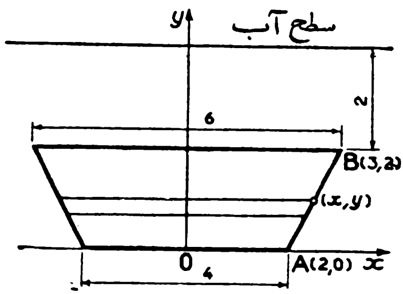
$$\text{فشار}=۱۰۰۰\int_{۰}^{۱}\sqrt{۱-x^{۲}}\,x\,dx=-\frac{۱۰۰۰}{۳}\left[(۱-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۱۰۰۰}{۳}$$

پس : $$\text{فشار کلی}=۲\times\frac{۱۰۰۰}{۳}\ \#\ ٦٦۷\,\mathrm{Kg}$$

نکتهٔ اساسی در استدلال بالا این است که فشار وارد بریک نوار جزئی افقی (dP) تقریباً برابر حاصل‌ضرب این سه عامل است : سطح نوار (dA) ، عمق نوار (h) و وزن یک واحد حجم از مایع (W) . بدین ترتیب :

$$dP=Wh\,dA \qquad (E)$$

محورهای مختصات‌را باید درهرمسئله طوری‌انتخاب کرد که محاسبهٔ‌دستور بالا حتی‌الامکان آسانتر باشد .



شکل ۱٦٤

مثال ۲ـ دریچهٔ سدی به شکل ذوزنقه و به ابعاد مذکور در شکل ۱٦٤ است. سطح آب ۲ متر بالاتر از سر دریچه است . فشار وارد به دریچه را حساب کنید .

حل ـ محورهای مختصات‌را همان طورکه در شکل ۱٦٤ نشان داده شده است ، انتخاب میکنیم و یک نوار جزئی افقی رسم مینماییم و دستور (E) را بکار میبندیم :

$$dA=۲x\,dy \quad , \quad h=٤-y$$

$$dP=W(٤-y)\times ۲x\,dy$$

مقدار x را از معادلهٔ خط AB یعنی از $y=۲x-٤$ پیدا میکنیم‌ودر رابطهٔ‌اخیر میگذاریم:

$$dP=W(٤-y)(y+٤)dy=W(۱٦-y^{۲})dy$$

انتگرال این دیفرانسیل را بین دوحد $y=۰$ و $y=۲$ حساب میکنیم :

جواب : $$P=W\int_{۰}^{۲}(۱٦-y^{۲})dy\ \#\ ۲۹۳۳۳\,\mathrm{Kg}$$

تمرین

در هریک از مسائل ۱ تا ۳ محور y ها عمود به سطح مایع وجهت مثبت آن بسمت بالا ، محور x ها در سطح آزاد مایع و وزن یک واحد حجم از مایع W است. درهرمسئله نقاط داده شده را ، به ترتیبی که پشت‌سرهم ذکر شده‌اند ، بیکدیگر وصل کنید و فشار وارد برسطح محدود بین پاره خطهای حاصل را حساب نمایید :

۱) (۰ , ۰) ، (۳ , ۰) ، (۰ , ۶−) ، (۰ , ۰) جواب : ۱۸W

۲) (۰ , ۰) ، (۳ , ۶−) ، (۰ , ۶−) ، (۰ , ۰) ۳٦W

۳) (۰ , ۰) ، (۲ , ۲−) ، (۰ , ٤−) ، (۲− , ۲−) ، (۰ , ۰) ۱٦W

٤) فشار وارد برنیمهٔ زیرین یک بیضی به قطرهای ٤ و ٦ واحد را حساب کنید : (الف) وقتی قطر بزرگتر بیضی در سطح مایع است ، (ب) وقتی قطر کوچکتر آن در سطح مایع است (صفحهٔ بیضی به سطح مایع عمود است . مترجم) .

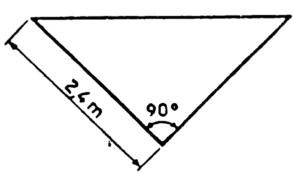
جواب : (الف) ۸W ، (ب) ۱۲W

۵) دوسر یک مخزن افقی بنزین به شکل بیضی است . قطر افقی این بیضیها ٤ متر و قطر عمودی آنها ۲ متر و وزن مخصوص بنزین ۰٫۷ است . مخزن نیمه پر است. فشار وارد بریکی از دوسر را حساب کنید . جواب : تقریباً ۹۳۳ Kg

٦) جدار قائم آب‌انباری قطعه‌ای از یک سهمی است و رأس‌آن‌در پایین است . عرض دهنهٔ آب انبار ۲ متر و عمق آن ٤ متراست . اگر آب انبار پرازآب باشد ، فشار وارد به جدار قائم آن چقدر است ؟ جواب : تقریباً ۸۵۳۳ Kg

۷) جدار قائم آبشخواری‌به شکل‌مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و طول هرساق آن ۲٫٤ متر است (شکل ۱٦۵) . اگر آبشخوار پراز آب باشد ، فشار وارد به‌جدارقائم‌آن چقدر است؟

جواب : تقریباً ۱٦۲۹ Kg



شکل ۱٦۵

۸) جدار قائم آبشخواری به شکل مثلث متساوی‌الساقین وطول قاعده و ارتفاع این مثلث هریک ۲ متر است . اگر آبشخوار پراز آب باشد ، فشار وارد به جدار قائم آن چقدر است ؟ جواب : تقریباً ۱۳۳۳ Kg

۹) مخزنی است افقی ، به شکل استوانه و به قطر ۸ دسیمتر. این مخزن تانیمه پر است و محتوی آن روغنی با وزن مخصوص ۹ر۰ است . فشار وارد به یک سر آن را حساب کنید . جواب : تقریباً ۳۸٫٤ Kg

۱۰) وقتی مخزن مسئلهٔ قبل پراز روغن است ، فشار وارد به یک سر آن چقدراست؟

۱۱) دریچهٔ قائم سدی به شکل مستطیل وضلع افقی وقائم آن بترتیب ۳ متر و ۸ را متر است. (الف) وقتی سطح آب ٤ر۲ متر بالاتر از سر دریچه است ، فشار وارد به دریچه چقدر است ؟ (ب) سطح آب تاکجا بالا رود تا این فشار دو برابر شود ؟

جواب : (الف) ۱۷۸۲۰ Kg ، (ب) ۳٫۳ m

۱۲) نشان دهید که فشار وارد به یک پاره سطح قائم برابرحاصل‌ضرب این سه‌عامل است : وزن یک واحد حجم از مایع ، مساحت پاره سطح و عمق مرکز ثقل هندسی آن .

۱۳) مخزنی است قائم ، به شکل استوانه ، به قطر ۹ متر و به ارتفاع ۱۰ متر . این مخزن پراز آب است . فشار وارد به سطح جانبی آن را حساب کنید .

جواب : تقریباً ۳۱۸۱ تن

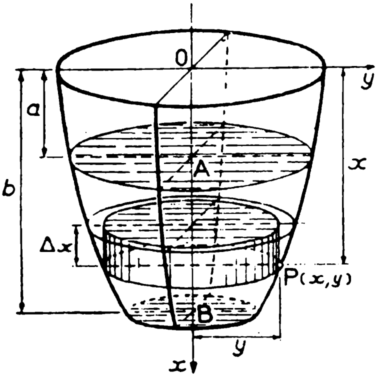
۱۸۰ــ کار . ـ درمکانیک، کاری که‌نیروی F براثرتغییرمکان d انجام میدهد،برابر Fd است . وقتی F متغیر است ، تعیین مقدار کار به محاسبهٔ یک انتگرال منجر میشود . ما دراینجا به مطالعهٔ دو مثال میپردازیم :

الف ـ کاری که هنگام تخلیهٔ یك مخزن انجام میشود . ـ در اینجا شکل مخزن را جسم دوّار و محور دوران جسم را قائم فرض میکنیم. محور دوران را محور x ها و یک خط واقع درصفحهٔ افقی ماربر سر مخزن‌را محور y ها میگیریم (شکل ۱٦٦). سطح مایع در عمق a و کف مخزن‌در عمق b است . AB را به n قسمت جزئی تقسیم میکنیم ، از نقاط تقسیم صفحاتی به محور دوران عمود مینماییم و استوانه‌های دواری مانند شمارهٔ ۱٦۰ بنا میکنیم . حجم یکی از این استوانه‌ها $\pi y^2 \Delta x$ و وزن آن $W\pi y^2 \Delta x$ است

(W وزن یک‌واحد حجم از مایع است) . اگر فاصلهٔ این استوانه را از سر مخزن x بنامیم ، کار انجام شده براثر تخلیهٔ مایع این استوانه برابر

$$W\pi y^{۲} x \Delta x$$

است ، زیرا کاری که برای بالا بردن شیئی انجام میشود، برابرحاصل‌ضرب وزن شیئی در فاصلهٔ قائم است .



شکل ۱۶۶

کاری که برای بالا بردن تمام‌این‌استوانه‌ها تا سرمخزن انجام میگردد ، برابر

$$\sum_{i=۱}^{n} W\pi y_i^{۲} x_i \Delta x_i$$

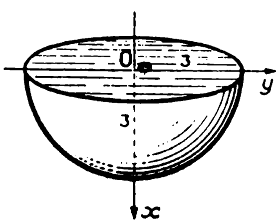
است و کاری که برای تخلیهٔ قسمت مورد نظر مخزن انجام میشود بروشنی برابر حد این مجموع است و بنابر قضیهٔ اساسی داریم :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=۱}^{n} W\pi y_i^{۲} x_i \Delta x_i = \int W\pi y^{۲} x \, dx$$

بنابراین کار انجام شده براثر تخلیهٔ مخزنی (به شکل جسم دوار) از عمق a تا عمق b با دستور زیر تعیین میگردد :

$$\text{کار} = W\pi \int_a^b y^{۲} x \, dx \qquad \text{(F)}$$

دراین دستور باید بجای y مقدار آن راکه ازحل معادلهٔ خم مولد جسم دوار نسبت به y بدست میاید و تابعی از x است ، قرار داد .



شکل ۱۶۷

مثال ۱ - مخزنی به‌شکل نیمکره ، به عمق ۳ متر پرازآب است . کاری که برای تخلیهٔ آن انجام میشود چقدر است ؟

حل - معادلهٔ دایرهٔ دهنهٔ مخزن $x^۲+y^۲=۹$ و لذا $y^۲=۹-x^۲$ است . از طرفی $W=۱۰۰۰\ Kg$ و حدود x بترتیب ۰ و ۳ است ، بنابر دستور (F) :

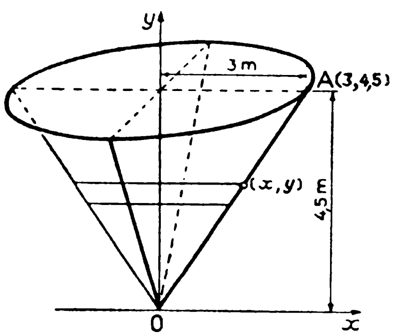
$$\text{کار}=۱۰۰۰\pi\int_۰^۳ (۹-x^۲)x\,dx=۲۰۲۵۰\pi\ Kgm$$

نکتهٔ اساسی در استدلال بالا این است که کار جزئی انجام شده (dT) برای بالا بردن حجم جزئی dV به ارتفاع h برابر

$$dT=Wh\,dV$$

است (W وزن یک واحد حجم از مایع است) . محورهای مختصات را باید با درنظر داشتن این دستور حتی‌الامکان مناسبتر انتخاب کرد .

مثال ۲- مخزنی است به شکل مخروط دوار ، با شعاع قاعدهٔ ۳ متروعمق ۴٫۵ متر(شکل ۱۶۸) . سطح قاعدهٔ مخروط افقی و سطح آب ۱٫۵ متر زیر آن است . کاری را که براثرتخلیهٔ مخزن انجام میگردد ، حساب کنید .



شکل ۱۶۸

حل - محورهای مختصات را آن طورکه در شکل ۱۶۸ رسم شده است میگیریم ، داریم :

$$dV=\pi x^۲dy\quad ,\quad h=۴٫۵-y$$

$$dT=W(۴٫۵-y)\pi x^۲dy$$

معادلهٔ مولد OA عبارتست از $x=\frac{۲}{۳}y$ و از آنجا :

$$dT=\pi W(۴٫۵-y)\frac{۴}{۹}y^۲dy=\frac{۴}{۹}\pi W(۴٫۵y^۲-y^۳)dy$$

حدود انتگرال $y=۰$ و $y=۳$ است ، زیرا ارتفاع آب ۳ متر است ، بنابراین :

$$T=\frac{۴}{۹}\pi W\int_۰^۳ (۴٫۵y^۲-y^۳)dy=۹۰۰۰\pi\ Kgm$$

ب - کاری که بر اثر انبساط گاز انجام میشود . - اگر گازی در داخل استوانه‌ای منبسط شود (وحجم گاز از v_0 مترمکعب به v_1 مترمکعب برسد) و بر اثر این انبساط پیستنی را براند ، کار انجام شده با دستور زیر تعیین میشود :

$$\text{کار} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv \qquad \text{(G)}$$

دراین دستور p مقدار فشار برحسب کیلوگرم به متر مربع و مقدار کار برحسب کیلوگرم متر است .

اثبات . - فرض میکنیم مساحت سطح مقطع استوانه c است وحجم گاز درضمن انبساط از v به $v+dv$ میرسد . دراین صورت فاصله‌ای که پیستن میپیماید $\frac{dv}{c}$ است . از طرفی نیرویی که سبب انبساط گاز (به اندازهٔ dv) شده است ، pc است. بنابراین :

$$\text{جزء کار انجام شده} = pc \cdot \frac{dv}{c} = p\,dv$$

از رابطهٔ اخیر و استفاده از قضیهٔ اساسی دستور (G) بدست میاید .

برای بکار بستن دستور (G) باید رابطهٔ بین p و v را در تمام مدت انبساط دانست . این رابطه به صورت

$$pv^n = \text{مقدار ثابت} \qquad (۱)$$

و n مقدار ثابتی است .

هرگاه در تمام مدت انبساط حرارت ثابت بماند ، میگویند انبساط ایزترم* است . دراین حالت $n=۱$ و رابطهٔ بین فشار و حجم به صورت زیر است :

$$pv = p_0v_0 = p_1v_1 \qquad (۲)$$

اگر خم نمایش رابطهٔ (۱) را (یعنی دیاگرام فشار - حجم را) رسم نماییم و محور طولها را به حجم ومحور عرضها را به فشار اختصاص دهیم، مساحت سطح زیر این خم برابر قدر مطلق کار انجام شده است . این همان است که با دستور (G) بدست میاید . درانبساط ایزترم خم نمایش (۲) یک هذلولی متساوی‌الساقین است .

* Isothermal expansion

تمرین

۱) مخزنی است به‌شکل استوانهٔ قائم به قطر ۸ر۴ متر و عمق ۶ متر. اگرمخزن پرازآب باشد ، کار لازم برای آنکه مخزن را از سر آن تخلیه کنند چقدر است ؟

جواب : ۱۰۳۶۸۰π Kgm

۲) مخزن مسئلهٔ قبل تا نیمه پر است ، کار لازم برای آنکه مخزن را از سر آن تخلیه کنند چقدر است ؟

۳) مخزنی‌است به شکل مخروط دوار به عمق ۶ متر . قاعدهٔ مخروط دربالا قرار دارد و شعاع آن ۳ متر است . هرگاه مخزن پرازآب باشد ، کار لازم برای آنکه تمام آب مخزن را با تلمبه به ارتفاع ۵ر۴ متر بالاتر از سر مخزن بکشند چقدر است ؟

جواب : ۱۰۸۰۰۳π Kgm

۴) مخزنی است به شکل نیمکره به قطر ۳ متر . اگر مخزن پراز روغنی به وزن مخصوص ۹۶ر۰ باشد ، کار لازم برای آنکه مخزن را از سر آن تخلیه کنند چقدر است ؟

جواب : ۱۲۱۵π Kgm

۵) مخزنی به‌شکل نیمکره به قطر ۶ مترپراز روغنی به وزن مخصوص ۹ر۰ است. روغن درون این مخزن توسط ماشینی به قدرت $\frac{۱}{۲}$ اسب (یعنی باقدرت ۵ر۳۷ کیلوگرم متر در ثانیه) به ارتفاع ۳ متر بالاتر از سر مخزن کشیده میشود . مخزن پس‌از چه مدت خالی میگردد ؟

۶) مخزنی است به شکل یک نیم بیضوی. دهنهٔ آن دایره‌ای به قطر ۸ر۱ متر و عمق آن ۵ر۱ متر است . اگر مخزن پرازآب باشد ، کار لازم برای آنکه آب مخزن را با تلمبه از سر آن بکشند چقدر است ؟

جواب : ۴۵۲π Kgm

۷) مخزنی است به شکل مخروط دوار . قطر دهنهٔ این مخزن ۴ر۲ متروعمق‌آن ۶ر۳ متر است. اگر مخزن پراز مایعی به وزن مخصوص ۲۸ر۱ باشد ، کار لازم برای‌آنکه مایع را با تلمبه از سر آن بکشند چقدر است ؟

جواب : ۱۹۸۰π Kgm

۸) مخزن آبی عبارتست از یک نیمکره به قطر ۲ر۷ متر که روی آن استوانه‌ای

به همان قطر و به ارتفاع ۳ متر قرار دارد . سطح آب ٦ر۰ متر پایین‌تر از سر مخزن است . کاری که برای تخلیهٔ آب از سر مخزن لازم است ، چقدر است ؟

۹) سطلی به وزن M کیلوگرم را با طنابی که وزن هرمتر آن m کیلوگرم است از ته چاهی به عمق h متر بیرون کشیده‌ایم . کار انجام شده چقدر است ؟

۱۰) شش مترمکعب هوا راکه فشارآن ۸ر۰ کیلوگرم برسانتیمتر مربع است متراکم میکنیم و فشار را تا ۸ر٤ کیلوگرم برسانتیمتر مربع بالا میبریم. عمل تراکم ایزترم انجام میگیرد ، یعنی $pv=C$ است . حجم نهایی هوا ومقدارکار انجام شده را حساب کنید .

جواب : یک مترمکعب ، $48000\,ln\,6$ Kgm

۱۱) اگر در مسئلهٔ ۱۰ عمل تراکم با قانون $pv^{1.4}=C$ انجام گیرد ، حجم نهایی هوا و مقدارکار انجام شده چقدر است ؟

۱۲) شش مترمکعب هوای با فشار ۸ر۰ کیلوگرم برسانتیمتر مربع را متراکم کرده‌ایم و حجم آن را به ۵ر۱ مترمکعب رسانده‌ایم. عمل تراکم ایزترم انجام شده است . فشار نهایی و کار انجام شده را حساب کنید .

جواب : ۲ر۳ کیلوگرم برسانتیمترمربع ، $48000(ln\,6-ln\,1.5)$ Kgm

۱۳) مسئلهٔ ۱۲ را ، وقتی عمل تراکم باقانون $pv^{1.4}=C$ انجام میپذیرد ، حل کنید .

۱٤) حجم اولیهٔ گازی ٤۰۰ دسیمترمکعب و فشار آن ۵ کیلوگرم برسانتیمتر مربع است . گاز منبسط میشود و فشار به ۵ر۲ کیلوگرم برسانتیمتر مربع میرسد . عمل انبساط ایزترم انجام میگیرد . حجم نهایی گاز و کار انجام شده را حساب کنید .

جواب : ۹۰۰ دسیمترمکعب ، ۱۷۳۳۰ Kgm

۱۵) مسئلهٔ قبل را ، وقتی انبساط بنابر قانون $pv^{1.2}=C$ انجام میگیرد ، حل کنید.

جواب : ۸۰۲ دسیمترمکعب ، ۱۳٦۸۰ Kgm

۱٦) حجم اولیهٔ گازی ٦ مترمکعب و فشار آن ۸ر۰ کیلوگرم برسانتیمتر مربع است. گاز را متراکم میکنیم وحجم آن را به ۹ر۰ مترمکعب میرسانیم . فشار نهایی و کار انجام شده را حساب کنید . تراکم ایزترم انجام شده است .

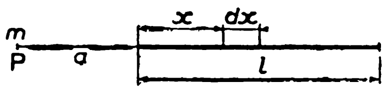
۱۷) مسئلهٔ ۱٦ را ، وقتی تراکم بنابرقانون $pv^{1.4}=C$ انجام میگیرد ، حل کنید.

۱۸) حجم اولیهٔ گازی ۸۰ دسیمترمکعب و فشار آن ۸ر٤ کیلوگرم برسانتیمتر مربع

است . این گاز منبسط میشود و حجم آن به ۲۴۰ دسیمترمکعب میرسد. انبساط بنابرقانون $pv^n=C$ با $n=۱٫۰۶۴۶$ انجام میگیرد . کار انجام شده را حساب کنید .

۱۹) مسئلهٔ ۱۸ را با $n=۱٫۱۳۱$ حل کنید .

۲۰) نقطهٔ مادی P با جرم m درامتداد میلهٔ نازك همگنی به طول l و به جرم M قرار دارد . قطر میله مقدار ثابتی است و نقطهٔ P به فاصلهٔ a از یک سر آن واقع است . میلهٔ مذکورنقطهٔ P را باچه نیرویی بسمت خود میکشد(شکل۱۶۹) ؟



شکل ۱۶۹

حل - فرض میکنیم میله به قسمتهای جزئی بینهایت کوچکی به طول dx تقسیم شده است .

$$\text{جرم یک واحد طول از میله} = \frac{M}{l}$$

پس

$$\text{جرم هرقسمت جزئی} = \frac{M}{l}dx$$

قانون نیوتن که مقدار جاذبهٔ بین دو جرم را میدهد ، عبارتست از

$$\text{نیروی جاذبه} = \frac{\text{حاصل‌ضرب جرم‌ها}}{\text{مجذور فاصلهٔ بین‌آنها}}$$

بنابراین نیروی جاذبهٔ بین نقطهٔ مادی P و یک جزء از میله عبارتست از

$$\frac{\frac{M}{l}\,m\,dx}{(x+a)^۲}$$

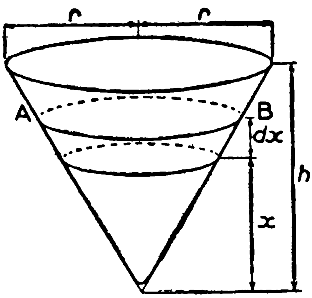
این مقدار یک جزء نیروی جاذبهٔ خواسته شده است . بنابراین نیروی جاذبهٔ بین نقطهٔ مادی P و میله برابرحد مجموع تمام این جزءها در فاصلهٔ $(x=l \;,\; x=۰)$ است و داریم :

جواب :

$$\text{نیروی جاذبه} = \int_0^l \frac{\frac{M}{l}\, m\, dx}{(x+a)^2} = \frac{Mm}{l}\int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2} = +\frac{Mm}{a(a+l)}$$

۲۱) در مسئلهٔ اخیر ، وقتی نقطهٔ P روی عمود منصف میله و به فاصلهٔ a از آن قرار دارد ، نیروی جاذبه چقدر است ؟ جواب : $\dfrac{2mM}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$

۲۲) ظرفی است به‌شکل مخروط دوار ، به‌ارتفاع h وشعاع‌قاعدهٔ r (شکل ۱۷۰) . در ته این ظرف یعنی در رأس مخروط سوراخی وجود دارد که مساحت آن a است . اگر ظرف پراز آب باشد و سوراخ را بازکنیم ، ظرف پس‌از چه مدت خالی میشود ؟



شکل ۱۷۰

حل ـ از تمام مقاومتها صرف‌نظر میکنیم . میدانیم که سرعت تخلیه از یک سوراخ همان سرعت سقوط آزاد جسمی است که ازارتفاعی برابر عمق آب رها شده باشد . پس اگر x عمق آب باشد ، $v=\sqrt{2gx}$ است . حجم مقدار آبی را که در زمان dt خالی میشود dQ و اختلاف سطح آب را dx مینامیم . حجم آبی که در یک واحد زمان از سوراخ خارج میشود ، برابر

$$a\sqrt{2gx}$$

است . این حجم برابر حجم استوانهٔ قائمی به مساحت‌قاعدهٔ a و ارتفاع $v(=\sqrt{2gx})$ است . بنابراین در زمان dt

$$dQ = a\sqrt{2gx}\, dt \qquad (1)$$

است . اگر مساحت سطح‌آب را ، وقتی عمق آب x است ، S بنامیم ، بنابر آنچه در هندسه خوانده‌ایم ، داریم :

$$\frac{S}{\pi r^2}=\frac{x^2}{h^2} \implies S=\frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

اما حجم‌آب‌خارج شده در زمان dt را میتوان‌برابر حجم استوانه‌ای مانند AB با سطح قاعدهٔ S وارتفاع dx نیز درنظر گرفت ، پس

$$dQ=S\,dx=\frac{\pi r^2 x^2 dx}{h^2} \qquad (۲)$$

دو مقدار (۱) و (۲) را مساوی قرار میدهیم و از معادلهٔ حاصل dt را بدست میاوریم :

$$dt=\frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2\sqrt{2gx}}$$

بنابراین :

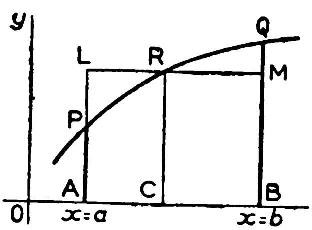
$$t=\int_0^h \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2\sqrt{2gx}}=\frac{2\pi r^2\sqrt{h}}{5a\sqrt{2g}}$$

۱۸۱ - مقدار متوسط تابع . ـ مقدار متوسط یا میانگین حسابی n عدد y_1 ، y_2 ، ... ، y_n برابر

$$\bar{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \qquad (۱)$$

است . ما دراینجا نشان میدهیم که :

$$\left[\begin{array}{c}\text{مقدار متوسط تابع } \varphi(x)\\ \text{از } x=a \text{ تا } x=b\end{array}\right]=\frac{\int_a^b \varphi(x)dx}{b-a} \qquad (H)$$



شکل ۱۷۱

شکل ۱۷۱ خم نمایش تابع

$$y=\varphi(x) \qquad (۲)$$

را نشان‌میدهد . میخواهیم مقدار متوسط عرضهای قوس PQ یعنی $\bar{y}$ را تعیین کنیم . برای‌این کار AB را به n قسمت مساوی تقسیم میکنیم ، طول

هرقسمت را Δx و عرضهای نقاط تقسیم‌را y_1 ، y_2 ، ... ، y_n مینامیم . دستور(۱) مقدار تقریبی مقدار متوسط را میدهد . صورت و مخرج طرف راست دستور (۱) را در Δx ضرب میکنیم ودرنظر میگیریم که $n\Delta x = b - a$ است ، پس :

$$(\text{مقدار تقریبی } \bar{y}) = \frac{y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x}{b-a} \qquad (۳)$$

اماصورت کسرطرف راست (۳) مقدارتقریبی مساحت APRQB را میدهد . مقدارمتوسط y [یا مقدار متوسط $\varphi(x)$] نیز با حد طرف راست (۳) به ازای $n \to \infty$ تعریف میشود و بدین ترتیب دستور (H) بدست میاید . درشکل ۱۷۱ مستطیل ABML طوری رسم شده است که مساحت ABML برابر مساحت ABQRP و از آنجا مقدار متوسط $\varphi(x)$ برابر CR است .

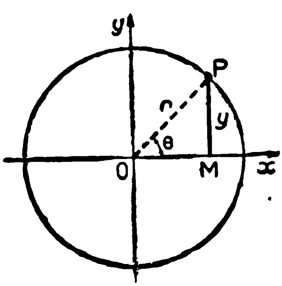
با توجه به تساوی (۲) دستور (H) را به صورت زیر نیز میتوان نوشت :

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a} \qquad (I)$$

مثال - دایرهٔ

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (۴)$$

مفروض است . مقدار متوسط عرضهای ربع اول‌را پیدا کنید : (الف) وقتی y به صورت تابعی از طولها یعنی به‌صورت تابعی‌از x است ، (ب) وقتی y به‌صورت تابعی از زاویهٔ $\theta = \widehat{MOP}$ است .



شکل ۱۷۲

حل - (الف) چون $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ است ، صورت کسر (I) برابر

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi r^2$$

و از آنجا
$$\bar{y}=\frac{۱}{۴}\pi r=۰٫۷۸۵\, r$$
است .

(ب) چون $y=r\sin\theta$ و حدود θ بترتیب $a=۰=\theta$ و $b=\frac{\pi}{۲}=\theta$ است،

صورت کسر (I) برابر
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} r\sin\theta\, d\theta=r$$

است و چون $b-a=\frac{\pi}{۲}$ است ،
$$\bar{y}=\frac{۲r}{\pi}=۰٫۶۳۷\, r$$
است .

می‌بینیم که مقدار متوسط y در (الف) و (ب) یکی نیست و بسته به آنکه نسبت به کدام متغیر مستقل حساب شده باشد ، متفاوت است .

چنانکه مثال بالا نشان میدهد مقدار متوسط تابع بستگی به انتخاب متغیر مستقل دارد .

به همین سبب دستور (I) را به صورت
$$\bar{y}_x=\frac{\int_a^b y\,dx}{b-a} \tag{۵}$$

مینویسیم . در $\bar{y}_x$ تاکید گردیده که مقدار متوسط y نسبت به متغیر مستقل x حساب شده است .

پس درمثال مذکور $\bar{y}_x=۰٫۷۸۵\, r$ و $\bar{y}_\theta=۰٫۶۳۷\, r$ است .

تمرین

۱) مقدار متوسط $y=x^۲$ را از $x=۰$ تا $x=۱۰$ پیدا کنید .

جواب : $۳۳\frac{۱}{۳}$

۲) مقدار متوسط عرضهای $y^2=4x$ را از(۰ , ۰)تا(۴ , ۴)باتقسیمات مساوی روی محور x ها پیدا کنید . جواب : $۲\frac{۲}{۳}$

۳) مقدارمتوسط طولهای $y^2=4x$ را از (۰ , ۰)تا(۴ , ۴) باتقسیمات مساوی روی محور y ها پیدا کنید . جواب : $۱\frac{۱}{۳}$

۴) مقدار متوسط $\sin x$ را بین $x=0$ و $x=\pi$ پیدا کنید .

جواب : $\frac{2}{\pi}$

۵) مقدار متوسط $\sin^2 x$ را بین $x=0$ و $x=\pi$ پیدا کنید(این مقدارمتوسط اغلب درنظریهٔ جریانهای متناوب بکار میرود) . جواب : $\frac{1}{2}$

٦) اگر یک نقطهٔ مادی را با سرعت اولیهٔ v_0 متر در ثانیه در خلاء بسمت بالا پرتاب کنیم ، سرعت آن پس از t ثانیه با دستور

$$v=v_0+gt \tag{1}$$

و سرعت پس از سقوط s متر با دستور

$$v=\sqrt{v_0^2+2gs} \qquad (g=9{,}81) \tag{2}$$

تعیین میشود . مقدار متوسط v را در هریک از حالات زیر پیدا کنید :

(الف) در مدت ۵ ثانیهٔ اول (پس از حرکت از سکون) .

جواب : ۲۴٫۴ متر در ثانیه

(ب) در مدت ۵ ثانیهٔ اول (پس از پرتاب با سرعت اولیهٔ ۱۱ متر در ثانیه) .

جواب : تقریباً ۳۵٫۰ متر در ثانیه

(پ) درمدت $۲\frac{۱}{۲}$ ثانیهٔ اول (پس از حرکت از سکون) .

جواب : تقریباً ۱۲٫۲ متر در ثانیه

(ت) در طول ۳۰ متر اول (پس از حرکت از سکون) .

(ث) در طول ۳۰ متر اول (پس از پرتاب با سرعت اولیهٔ ۱۸ متر در ثانیه) .

۷) حرکت نوسانی سادهٔ $s=a\cos nt$ را درنظر میگیریم . مقدار متوسط سرعت‌را در ربع اول دورهٔ تناوب ، نخست‌نسبت به زمان‌و سپس نسبت به فاصله پیدا کنید.

۸) نشان دهید که در حرکت نوسانی ساده مقدار متوسط انرژی جنبشی نسبت به زمان برای هرضریبی از یک ربع دورهٔ تناوب برابر نصف ماکزیمم این انرژی است .

۹) روی پاره خطی به طول a نقطهٔ M را بطور تصادفی انتخاب میکنیم. نشان دهید که (الف) مساحت متوسط مستطیلی که اضلاع آن دو پاره خط جدا شده با نقطهٔ M است برابر $\frac{1}{6}a^2$ است ، (ب) مقدار متوسط مجموع مساحتهای مربعهایی که روی دو پاره خط جدا شده با نقطهٔ M بنا میشوند ، برابر $\frac{2}{3}a^2$ است .

۱۰) نشان دهید که وقتی شتاب یک نقطهٔ متحرك مقدار ثابتی است ، میانگین مجذور سرعت نسبت به زمان برابر $\frac{1}{3}(v_0^2+v_0v_1+v_1^2)$ است . دراین عبارت v_0 سرعت اولیه و v_1 سرعت نهایی است .

۱۱) نشان دهید که میانگین‌برد افقی یک نقطهٔ مادی که با سرعت معین و بازاویهٔ دلخواه پرتاب میشود ، برابر حاصل‌ضرب برد ماکزیمم آن نقطه در ۰٫۶۳۶۶ است .

راهنمایی - در دستور مسئلهٔ ۳۵ صفحهٔ ۱۸۰ ، $\alpha=0$ بگذارید .

دستورهای

$$\bar{x}_s=\frac{\int x\,ds}{\int ds}\quad,\quad \bar{y}_s=\frac{\int y\,ds}{\int ds}\qquad(6)$$

مختصات **مرکز ثقل هندسی قوس** را میدهند . دراین دستورها (x, y) مختصات نقطه‌ای از خم و ds جزء بینهایت کوچک قوس است . این دو مقدار ، نظیر به نظیر ، عبارتند از مقدار متوسط طولها و عرضهای نقاط خم بشرط آنکه پاره خم (در طول خود) به قسمتهای مساوی تقسیم شده باشد (با شمارهٔ ۱۷۷ مقایسه کنید) .

۱۲) در صفحهٔ xOy خط مستقیم D و پاره خم (c) که خط مذکور را قطع نکرده است ، مفروضند . پاره خم (c) را در حول خط D میچرخانیم . نشان دهید که مساحت

رویهٔ حاصل برابر است با حاصل‌ضرب طول پاره خم (c) درمحیط دایره‌ای که مرکز ثقل هندسی آن یعنی نقطهٔ $(\overline{x}_s \,,\, \overline{y}_s)$ میپیماید (قضیهٔ پاپوس * . با شمارهٔ ۲۵۰ مقایسه کنید) .

راهنمایی - دستور (L) شمارهٔ ۱۶۴ را بکار ببندید .

۱۳) مرکزثقل هندسی پاره‌قوسی ازسهمی $y^۲=۴x$ راکه‌بین‌نقاط(۰ , ۰)و(۴ , ۴) واقع است ، پیدا کنید . جواب : $\overline{y}=۲٫۲۹$, $\overline{x}=۱٫۶۴$

۱۴) مرکز ثقل هندسی قوسی از دایرهٔ $\rho=a$ راکه بین $\theta-$ و $\theta+$ واقع است ، پیدا کنید . جواب : $\overline{x}=\frac{a\sin\theta}{\theta}$

۱۵) مرکز ثقل هندسی محیط کاردیوئید $\rho=a(۱+\cos\theta)$ را پیدا کنید .

جواب : $\overline{y}=۰$, $\overline{x}=\frac{۴a}{۵}$

۱۶) با استفاده از قضیهٔ پاپوس (گولدن) مرکز ثقل هندسی قوسی از دایرهٔ $x^۲+y^۲=r^۲$ راکه در ربع اول واقع است ، پیدا کنید . جواب : $\overline{x}=\overline{y}=\frac{۲r}{\pi}$

۱۷) دایرهٔ $(x-b)^۲+y^۲=a^۲$ را در حول محور y ها دوران دهید و مساحت چنبرهٔ حاصل را با استفاده از قضیهٔ پاپوس (گولدن) حساب کنید $(b > a)$.

۱۸) مستطیل ABCD را در حول محور Ax که درصفحهٔ مستطیل قرار دارد و به AC عمود است دوران دهید و مساحت رویهٔ حاصل را حساب کنید .

۱۹) نقطهٔ مادی P بدون سرعت‌اولیه در خلاء رها میشود و t ثانیه سقوط میکند. نشان دهید که سرعت متوسط نقطهٔ P دراین مدت برابر نصف سرعت آن درآخرین لحظهٔ سقوط است .

۲۰) نقطهٔ مادی P بدون‌سرعت اولیه در خلاء رها میشود و فاصلهٔ h را میپیماید. نشان‌دهید که سرعت متوسط نقطهٔ P دراین فاصله دو سوم سرعت آن درآخرین لحظهٔ سقوط است .

* Pappus ـ در آثار اروپایی این قضیه به‌گولدن Guldin منسوب است . مترجم

۲۱) در دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ مستطیلهایی طوری محاط میکنیم که اضلاع آنها موازی محورهای مختصات باشند. مقدار متوسط مساحت این مستطیلها را پیدا کنید درصورتی که میدانیم اضلاع عمود به محور x ها به فاصلهٔ متساوی از یکدیگر قرار دارند .

جواب : $\frac{4}{3}a^2$

۲۲) در بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ مستطیلهایی طوری محاط میکنیم که اضلاع آنها موازی محورهای مختصات باشند . مقدار متوسط مساحت این مستطیلها را پیدا کنید درصورتی که میدانیم اضلاع عمود به محور y ها به فاصلهٔ مساوی از یکدیگر قرار دارند .

جواب : $\frac{4}{3}ab$

تمرین اضافی

۱) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین خم $y=x^2$ و خطوط $x+y=6$ ، $y=0$ و $x=3$ را پیدا کنید . جواب : $\bar{y}=\frac{281}{185}$, $\bar{x}=\frac{76}{37}$

۲) طول مرکز ثقل هندسی «سطح محدود بین خم $2y=x^2$ و خطی که از مبدأ مختصات میگذرد» ۱ است . عرض مرکز ثقل را پیدا کنید . جواب : $\frac{4}{5}$

۳) مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین خم $y=x^n$ $(n>0)$ وخطوط $y=0$ و $x=1$ را پیدا کنید و به ازای مقادیر مختلف n دربارهٔ مکان مرکز ثقل بحث نمایید .

جواب : $\bar{y}=\frac{n+1}{2(2n+1)}$, $\bar{x}=\frac{n+1}{n+2}$

۴) معادلهٔ مکان مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین محور x ها و سهمی $y=cx-x^2$ را به ازای مقادیر مختلف c پیدا کنید . جواب : $5y=2x^2$

۵) سهمی $x^2=2py$ خط مایل $y=mx+b$ را در دو نقطهٔ A و B میبرد . از نقطهٔ C ، وسط AB ، خطی موازی محور سهمی رسم میکنیم . این خط سهمی را در نقطهٔ D قطع میکند . نشان دهید که (الف) مماس به سهمی در نقطهٔ D موازی خط AB است ، (ب) مرکز ثقل هندسی سطح ACBD برخط CD قرار دارد .

٦) P نقطه‌ای از سهمی $y=x^2$ و C مرکز ثقل هندسی سطح محدود بین این سهمی و محور x ها و خط قائم گذرنده از P است . نقطهٔ P را طوری تعیین کنید که زاویهٔ OPC ماکزیمم باشد . جواب : عرض $P=\frac{۵}{۱٤}$

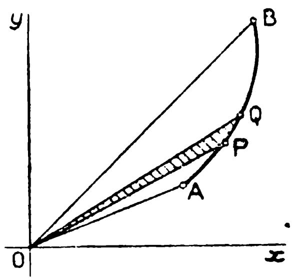
۷) مخزنی است به شکل رویهٔ دوار . مولد این رویه پاره قوسی از سهمی و محور دوران آن محور سهمی است . پاره قوس مولد با وتری به طول ۲٫٤ متر جدا شده است . وتر مذکور عمود به محور سهمی است و به فاصلهٔ ۲٫٤ متر از رأس آن قرار دارد . مخزن پر از آب است . کار لازم برای آنکه نیمی از آب مخزن را با تلمبه از سر آن بکشیم چقدر است ؟

۸) مخزنی به شکل نیمکره به شعاع r پر از آب است . دو کارگر با نامهای A و B آب آن را با تلمبه میکشند و هریک از آنها نیمی از کار را انجام میدهد . نخست A تلمبه میزند . تعیین کنید که وقتی A کارش را تمام میکند و B میخواهد کارش را شروع کند ، عمق آب چقدر است ؟

جواب : عمق آب $=r=۰٫٤۵۹\,r=\left(۱-\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}\right)$

۹) مخزنی به شکل مخروط دوار پر از آب است . رأس مخروط در پایین است . دو کارگر تخلیهٔ مخزن را بعهده میگیرند . اولی نیمی از کار را انجام میدهد . نسبت عمق آب مانده در مخزن به عمق اولیه را z مینامیم . نشان دهید که z ریشهٔ معادلهٔ $٦z^٤-۸z^۳+۱=۰$ است . مقدار z را تا دو رقم اعشار حساب کنید . جواب : ۰٫٦۱

۱۰) سطلی به حجم ۳۰ دسیمترمکعب و وزن ۱٫۵ کیلوگرم پر از آب است و در ته چاهی به عمق ۳۰ متر قرار دارد . سطل مذکور سوراخ است و در هر ثانیه ۰٫۳ لیتر آب از آن خارج میشود . کارگری آن را با سرعت ثابت ۱٫۵ متر در ثانیه تا سرچاه بالا میکشد . در صورتی که از وزن طناب صرف نظر کنیم ، کار انجام شده چقدر است ؟



شکل ۱۷۳

۱۱) سطح OAB را با خطوط ماربر O

به اجزایی نظیر OPQ تقسیم کنید ونشان دهید که مساحت وگشتاورهای سطح OAB (که آنها را بترتیب A ، M_x و M_y مینامیم) با دستورهای زیر تعیین میشوند :

$$A=\frac{۱}{۲}\int(xy'-y)dx \quad , \quad M_x=\frac{۱}{۳}\int y(xy'-y)dx$$

$$M_y=\frac{۱}{۳}\int x(xy'-y)dx$$

(مرکز ثقل هندسی هرمثلث محل تلاقی سه میانهٔ آن است .)

۱۲) مرکز ثقل هندسی قطاع محدود بین هذلولی متساوی‌الساقین $x=a\sec\theta$ ، $y=a\,tg\,\theta$ و شعاعهای گذرنده از مبدأ مختصات و نقاط $(a,۰)$ و (x,y) را پیدا کنید . جواب : $\bar{y}=\frac{۲a(\sec\theta-۱)}{۳\ln(\sec\theta+tg\,\theta)}$, $\bar{x}=\frac{۲a\,tg\,\theta}{۳\ln(\sec\theta+tg\,\theta)}$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

فصل نوزدهم

سری

۱۸۲- چند تعریف . - رشته‌ای‌ازجملات را که بنابر دستور یا قاعدهٔ معینی‌تشکیل شده باشند ، **دنباله** مینامند . مثلاً

$$۱ , ٤ , ۹ , ١٦ , ٢٥$$

و
$$۱ , -x , \frac{x^۲}{۲} , -\frac{x^۳}{۳} , \frac{x^٤}{٤} , -\frac{x^٥}{٥}$$

دو دنباله‌اند .

مجموع جملات یک دنباله را **سری** مینامند . مثلاً از دنباله‌های مذکور سریهای زیر بدست میایند :

$$۱+٤+۹+١٦+٢٥$$

و
$$۱-x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^٤}{٤}-\frac{x^٥}{٥}$$

وقتی عدهٔ‌جملات محدود است،دنباله یاسری را **محدود** و وقتی عدهٔ‌جملات نامحدود است ، دنباله یا سری را **دنبالهٔ بینهایت** یا **سری بینهایت** مینامند .

جملهٔ عمومی یا جملهٔ n ام عبارتی است که قانون تشکیل جملات را بیان میکند .

مثال ۱- در مثال اول مذکور در بالا جملهٔ عمومی یا جملهٔ n ام $n^۲$ است. جملهٔ اول وقتی بدست میاید که بجای n یک بگذاریم ، جملهٔ دهم وقتی بدست میاید که بجای n ده بگذاریم و غیره .

مثال ۲- در مثال‌دوم مذکور در بالا جملهٔ n ام ، جز برای $n=۱$ ، $\frac{(-x)^{n-۱}}{n-۱}$ است .

دنبالهٔ بینهایت‌را به این صورت مینویسند :

$$۱ , ٤ , ۹ , ... , n^۲ , ...$$

فاکتوریل . ـ هنگام مطالعهٔ سریها اغلب به حاصلضرب

$$۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۱)n$$

برمیخوریم . برای آسانی $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ را «فاکتوریل ۵» مینامند و به صورت $۵!$ مینویسند . بطورکلی

$$n!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۱)\times n$$

را «فاکتوریل n» میخوانند . n عددی صحیح و مثبت است . اگر n صحیح و مثبت نباشد ، $n!$ معنی ندارد .

۱۸۳- سری هندسی . ـ مجموع

$$S_n=a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱} \qquad (۱)$$

را یک سری هندسی با n جمله مینامند . در جبر مقدماتی دیده‌ایم که

$$S_n=\frac{a(۱-r^n)}{۱-r} \quad \text{یا} \quad S_n=\frac{a(r^n-۱)}{r-۱} \qquad (۲)$$

است. اگر $|r|<۱$ باشد ، دستور سمت چپ و اگر $|r|>۱$ باشد ، دستور سمت‌راست را بکار میبندند .

اگر $|r|<۱$ باشد و n بسمت بینهایت میل کند ، قدر مطلق r^n از هرعدد مثبتی کوچکتر میگردد و سرانجام

$$\lim_{n\to\infty}(r^n)=۰$$

میشود و دستور (۲) به صورت

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{۱-r} \qquad (۳)$$

درمیاید (شمارهٔ ۱۶) . پس وقتی $|r|<۱$ است و عدهٔ جملات بسمت بینهایت میل میکند ، S_n ، مجموع سری هندسی بسمت حد معینی میل مینماید . دراین حالت میگویند سری **همگرا** یا **متقارب** است .

هنگامیکه $|r|>۱$ است ، r^n با n بسمت بینهایت میل میکند (شمارهٔ ۱۸) وبنابر دستور سمت راست (۲) ، مجموع سری ، S_n ، بینهایت میشود. دراین‌حالت میگویند سری **واگرا** یا **متباعد** است .

وقتی $r=-۱$ است ، سری به صورت خاص

$$a-a+a-a+a-a \cdots \qquad (۴)$$

درمیاید . اگر n زوج باشد ، حاصل جمع (۴) صفر واگر n فرد باشد ، حاصل جمع آن a است . وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، مجموع سری نه بینهایت میشود و نه بسمت مقدار معینی میل میکند . دراین صورت میگویند سری نوسانی است .

مثال - در یک سری هندسی $a=۱$ و $r=\frac{۱}{۲}$ است . مجموع n جملهٔ اول‌آن را درنظر میگیریم :

$$S_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}} \qquad (۵)$$

بنابر دستور (۲)

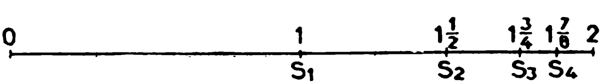
$$S_n=\frac{۱-\frac{۱}{۲^n}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲-\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

و از آنجا

$$\lim_{n\to\infty} S_n=۲ \qquad (۶)$$

اگر در دستور (۳) ، $a=۱$ و $r=\frac{۱}{۲}$ بگذاریم ، همین نتیجه بدست میاید .

تعبیر هندسی (۵) بسیار جالب است. اگر مقادیر متوالی S_n را روی یک محورنقل کنیم (شکل ۱۷۴) ، می‌بینیم که هرنقطهٔ جدید پاره خط واقع بین نقطهٔ ماقبل و نقطهٔ



شکل ۱۷۴

n	۱	۲	۳	۴	$\cdots$
S_n	۱	$۱\frac{۱}{۲}$	$۱\frac{۳}{۴}$	$۱\frac{۷}{۸}$	$\cdots$

به طول ۲ را نصف میکند . بنابراین رابطهٔ (۶) محقق است .

تمرین

در هریک ازسریهای زیر (الف) دستور تشکیل جملات را تعیین کنید ، (ب) سه جملهٔ دیگر بیفزایید ، (پ) جملهٔ n ام یعنی جملهٔ عمومی را پیدا نمایید .

	جملهٔ n ام
١) $٢+٤+٨+١٦+\cdots$	٢^{n}
٢) $١-\frac{١}{٢}+\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}+\cdots$	$\frac{(-١)^{n-١}}{n}$
٣) $-\frac{١}{٢}+٠+\frac{١}{٤}+\frac{٢}{٥}+\frac{٣}{٦}+\cdots$	$\frac{n-٢}{n+١}$
٤) $x+\frac{x^{٢}}{١}+\frac{x^{٣}}{١\times٢}+\frac{x^{٤}}{١\times٢\times٣}+\cdots$	$\frac{nx^{n}}{n!}$
٥) $\frac{\sqrt{x}}{٢}+\frac{x}{٢\times٤}+\frac{x\sqrt{x}}{٢\times٤\times٦}+\frac{x^{٢}}{٢\times٤\times٦\times٨}+\cdots$	$\frac{x^{\frac{n}{٢}}}{٢^{n}n!}$
٦) $\frac{a^{٢}}{٣}-\frac{a^{٣}}{٥}+\frac{a^{٤}}{٧}-\frac{a^{٥}}{٩}+\cdots$	$\frac{(-a)^{n+١}}{٢n+١}$

درمسائل ٧ تا ١٥ جملهٔ عمومی داده شده است . نخستین چهار جملهٔ هرسری را بنویسید .

	جواب
٧) $\frac{٢^{n-١}}{\sqrt{n}}$	$١+\frac{٢}{\sqrt{٢}}+\frac{٤}{\sqrt{٣}}+\frac{٨}{\sqrt{٤}}+\cdots$
٨) $\frac{n+٢}{٢n-١}$	$٣+\frac{٤}{٣}+\frac{٥}{٥}+\frac{٦}{٧}+\cdots$
٩) $\frac{n}{٣^{n-١}}$	$١+\frac{٢}{٣}+\frac{٣}{٩}+\frac{٤}{٢٧}+\cdots$

جواب

$$۱+\frac{x}{\sqrt{۲}}+\frac{x^{۲}}{\sqrt{۳}}+\frac{x^{۳}}{\sqrt{٤}}+\cdots$$

۱۰) $\frac{x^{n-۱}}{\sqrt{n}}$

$$x-\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\frac{x^{۷}}{۷!}+\cdots$$

۱۱) $\frac{(-۱)^{n-۱}x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}$

۱۳) $\frac{(y+n)^{۲n-۱}}{۲^{n}\,n!}$

۱۲) $\frac{(x-a)^{n-۱}}{n!}$

۱۵) $\frac{۳^{n-۱}\theta^{n}}{۲^{n}(n-۱)!}$

۱٤) $\frac{۲^{\frac{n+۱}{۲}}}{\sqrt{n+۲}}$

۱۸٤- سری همگرا ، سری واگرا . - در سری

$$S_n=u_۱+u_۲+u_۳+\cdots+u_n$$

S_n تابعی از n است . اگر عدهٔ جملات ، n ، بسمت بینهایت میل کند ، یکی ازدو حالت زیر پیش میاید :

حالت I- S_n بسمت حد معینی مانند u میل مینماید ،

$$\lim_{n\to\infty} S_n=u \qquad (۱)$$

دراین صورت میگوییم سری همگراست و بسمت مقدار u میگراید ، و یا میگوییم مقدار سری برابر u است .

حالت II- S_n بسمت حد معینی میل نمیکند، دراین صورت میگوییم سری واگراست .

مثلاً سریهای $۱+۲+۳+٤+۵+\cdots$

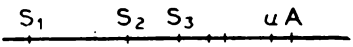
و $۱-۱+۱-۱+\cdots$

واگرا هستند . چنانکه در بالا ذکرگردید ، در سری همگرا ، **مقدار سری** (مجموع سری) عددی مانند u است و با رابطهٔ (۱) تعریف میشود . به سری واگرا نمیتوان مقدار معینی نسبت داد .

چون در موارد استعمال سریهای بینهایت ، سریهای همگرا نقش بسیار مهمی دارند ، مطلب اساسی تعیین نوع سری از نظر همگرایی یا واگرایی آن است .

۱۸۵ - قبل از بیان روشهای گوناگونی که برای تعیین نوع سری بکار میروند ، توجه خواننده را به قضایای زیر جلب مینماییم . اثبات این قضایا از سطح این کتاب بالاتراست و ما از ذکر آنها خودداری میکنیم .

قضیهٔ I - اگر S_n با n زیاد شود ولی همواره کوچکتر از عدد معین A باقی بماند ، وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، S_n بسمت عددی کوچکتر یا مساوی A میل مینماید .



شکل ۱۷۵

شکل ۱۷۵ حکم قضیه را روشن میسازد .

نقاط $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، ... نظیر به مقادیر متوالی S_n میباشند و بسمت نقطهٔ u میل میکنند بطوریکه

$$\lim_{n \to \infty} S_n = u$$

است و مقدار u کوچکتر یا برابر A است .

مثال - نشان دهید که سری بینهایت زیر همگراست :

$$(۱) \qquad ۱ + ۱ + \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \cdots$$

حل - نخست از جملهٔ اول صرف‌نظر میکنیم و مینویسیم :

$$(۲) \qquad S_n = ۱ + \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \cdots + \frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n}$$

مجموع زیر را درنظر میگیریم :

$$(۳) \qquad s_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

مجموع (۳) به این ترتیب بدست‌آمده است که در مجموع (۲) بجای تمام اعداد ، غیراز ۱ ها ، ۲ گذاشته‌ایم . روشن است که $S_n < s_n$ است . اما (۳) یک سری هندسی با $r = \frac{۱}{۲}$ است و n هرچه باشد ، $s_n < ۲$ است (شمارهٔ ۱۸۳ را ببینید) . اما S_n با n

زیاد میشود ولی همواره کوچکتراز ۲ باقی میماند ٬ پس وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، S_n بسمت حدی که کوچکتر از ۲ است میل مینماید . بنابراین سری (۱) همگر است و مقدارش از ۳ کمتر است .

بعداً خواهیم دید که مجموع (۱) ، مقدار ثابت ... $e=۲٫۷۱۸۲۸$ ، پایهٔ لگاریتم طبیعی است (شمارهٔ ۶۱) .

قضیهٔ II– هرگاه بازیاد شدن n ، S_n کاهش یابد ولی همواره بزرگتر از عدد معین B باقی بماند ، وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، S_n بسمت عددی بزرگتر یا مساوی B میل مینماید .

سری $$S_n=u_۱+u_۲+u_۳+\cdots+u_n$$

را همگراو $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=u$ فرض میکنیم. روی یک محور نقاطی به‌طولهای $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، ... درنظر میگیریم . این نقاط با بزرگ شدن n بسمت نقطه‌ای به طول u میل میکنند ، خواه همهٔ نقاط در یک طرف نقطهٔ u باشند ، خواه در دو طرف آن . بنابراین روشن است که * :

$$\lim_{n\to\infty} u_n=۰ \qquad \text{(A)}$$

پس در سری همکرا حد جملهٔ عمومی صفر است . لذا اگر در یک سری n بسمت بینهایت میل نماید ولی جملهٔ عمومی بسمت صفر میل نکند ، سری واگراست . اما شرط (A) برای همگرایی کافی نیست یعنی اگر حد جملهٔ عمومی یک‌سری صفر باشد ، نمیتوان نتیجه گرفت که آن سری همگراست . مثلاً در سری همساز

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{٤}+\cdots+\frac{۱}{n}+\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n}\right)=۰$$

* اثبات این مطلب ، با تمام روشنی آن ، از سطح این‌کتاب بالاتر است . مترجم

شرط (A) برقرار است ، اما در شمارهٔ بعد خواهیم دید که این سری واگراست .

اکنون به بیان چند قاعده که بکار بستن آنها آسانتر از قضایای بالاست میپردازیم .

۱۸٦- مقایسهٔ دو سری . - دربسیاری از موارد میتوان تقارب یا تباعد یک سری را با مقایسهٔ جملات آن با جملات یک سری دیگرکه نوع آن معلوم است تعیین کرد .

قاعدهٔ تقارب . - اگر هیچیك از جملات سری باجملههای مثبت

$$u_1+u_2+u_3+\cdots \qquad (1)$$

ازجملات نظیر سری متقارب

$$a_1+a_2+a_3+\cdots \qquad (2)$$

بزرگتر نباشد ، سری (۱) متقارب استومقدار آن از مقدار سری (۲) بیشتر نیست .

اثبات - فرض میکنیم

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

و
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

و
$$\lim_{n\to\infty} S_n=A$$

چون $S_n < A$ و $s_n \leqslant S_n$ است ، پس $s_n < A$ است و بنابر قضیهٔ I شمارهٔ ۱۸۵ ، s_n بسمت حد معینی میل میکند و سری (۱) همگراست و مقدار آن از A بزرگتر نیست .

مثال ۱ - نوع سری زیر را تعیین کنید :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots \qquad (3)$$

حل - این سری را با سری هندسی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots \qquad (4)$$

که متقارب است مقایسه میکنیم . هیچیک از جمله های (۳) از جمله های نظیر سری (٤) بزرگتر نیست . بنابراین سری (۳) همگراست .

با استدلالی کاملاً شبیه‌به‌آنچه برای سریهای (۱) و (۲) ذکرگردید ، میتوان‌نشان داد که :

قاعدهٔ تباعد . ـ اگر هیچیک از جملات سری

$$u_۱ + u_۲ + u_۳ + \cdots \quad (۵)$$

از جملات نظیر سری با جمله‌های مثبت و متباعد

$$b_۱ + b_۲ + b_۳ + \cdots \quad (۶)$$

کوچکتر نباشد ، سری (۵) متباعد است .

مثال ۲ـ نشان دهید که سری همساز متباعد است .

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{٤} + \cdots \quad (۷)$$

حل ـ سری (۷) را به صورت (۸) مینویسیم و آن را با (۹) مقایسه میکنیم. کروشه برای آن گذاشته شده است که مقایسه آسانتر باشد .

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \left[\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{٤}\right] + \left[\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{٦} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۱٦}\right] + \cdots \quad (۸)$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \left[\frac{۱}{٤} + \frac{۱}{٤}\right] + \left[\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۱٦} + \cdots + \frac{۱}{۱٦}\right] + \cdots \quad (۹)$$

می‌بینیم که هیچیک از جملات سری (۸) کوچکتر از جملات نظیر سری (۹) نیست . اما سری (۹) متباعد است زیرا مجموع جملات داخل هرکروشه $\frac{۱}{۲}$ است و وقتی n بسمت بینهایت میل کند ، S_n بسمت بینهایت میل مینماید . بنابراین سری (۸) متباعد است .

مثال ۳ـ نوع سری زیررا تعیین کنید :

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{٤}} + \cdots$$

حل - این سری واگراست زیرا جملاتش ازجملات نظیر سری همساز که متباعد است بزرگتر است .

سری زیر راکه برای مقایسه بسیار مناسب است ، «سری p» مینامند :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{10}$$

قضیه - سری p به‌ازای $p > 1$ متقارب و به‌ازای $p \leqslant 1$ متباعد است .

اثبات - سری (۱۰) را به‌صورت (۱۱) مینویسیم و با سری (۱۲) مقایسه میکنیم . کروشه برای آن گذاشته شده است که مقایسه آسانتر باشد .

$$1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right] + \cdots \tag{11}$$

$$1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right] + \cdots \tag{12}$$

وقتی $p > 1$ است ، هیچیک از جملات سری (۱۱) بزرگتر از جملات نظیر سری (۱۲) نیست . اما در (۱۲) حاصل جمع درون کروشه ها عبارتند از

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{2^2}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2(p-1)}}$$

$$\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{2^3}{2^{3p}} = \frac{1}{2^{3(p-1)}}$$

پس برای تعیین نوع سری (۱۲) ، میتوانیم سری زیر را درنظر بگیریم :

$$(۱۳)\qquad ۱+\frac{۱}{۲^{p-۱}}+\left(\frac{۱}{۲^{p-۱}}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۲^{p-۱}}\right)^{۳}+\cdots$$

وقتی $p>۱$ است ، سری (۱۳) یک سری هندسی با قدر نسبت کوچکتر از واحد و لذا متقارب است . بنابراین سری (۱۰) نیز متقارب است . وقتی $p=۱$ است ، سری (۱۰) سری همساز و متباعد است . وقتی $p<۱$ است ، جملات سری (۱۰) ، غیر از جملهٔ اول ، از جملات نظیر سری همساز بزرگتر و لذا سری (۱۰) متباعد است .

مثال ٤ـ نشان دهید که سری زیر متقارب است :

$$(۱٤)\qquad \frac{۲}{۲\times۳\times٤}+\frac{٤}{۳\times٤\times۵}+\frac{٦}{٤\times۵\times٦}+\cdots$$
$$+\frac{۲n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}+\cdots$$

حل ـ در سری (۱٤) ، $u_n<\frac{۲n}{n^{۳}}$ یا $\frac{۱}{۲}u_n<\frac{۱}{n^{۲}}$ است . پس $\frac{۱}{۲}u_n$ از جملهٔ عمومی «سری p» با $p=۲$ کوچکتر است. بنابراین سری $\frac{۱}{۲}u_n$ که هریک از جملات‌آن نصف جملهٔ نظیرسری (۱٤) است ، متقارب است ، لذا سری (۱٤) نیز متقارب است .

تمرین

نوع هریک از سریهای زیر را تعیین کنید :

جواب

۱) $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲^{۳}}}+\frac{۱}{\sqrt{۳^{۳}}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^{۳}}}+\cdots$ همگرا

۲) $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt[۳]{n}}+\cdots$ واگرا

۳) $\frac{۲}{۱}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۲}{۳^{۳}}+\cdots+\frac{۲}{n^{n}}+\cdots$ همگرا

جواب

همگرا ۴) $\frac{۳}{۱\times۲}+\frac{۳}{۲\times۳}+\frac{۳}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۳}{n(n+۱)}+\cdots$

واگرا ۵) $\frac{۴}{۲\times۳}+\frac{۸}{۳\times۴}+\frac{۱۲}{۴\times۵}+\cdots+\frac{۴n}{(n+۱)(n+۲)}+\cdots$

۶) $\frac{۳}{۲\times۳\times۴}+\frac{۵}{۳\times۴\times۵}+\frac{۷}{۴\times۵\times۶}+\cdots$

همگرا $+\frac{۲n+۱}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}+\cdots$

واگرا ۷) $\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}+\cdots+\frac{۱}{۵n}+\cdots$

واگرا ۸) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\cdots+\frac{۱}{n+۳}+\cdots$

همگرا ۹) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۸}+\cdots+\frac{۱}{۳^n+۱}+\cdots$

واگرا ۱۰) $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt[n]{۳}}+\cdots$

همگرا ۱۱) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲+۳}+\cdots$

همگرا ۱۲) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۶}+\cdots+\frac{۱}{۳^n-۱}+\cdots$

۱۳) $\frac{۱}{۲\times۲\times۳}+\frac{۲}{۲\times۳\times۴}+\frac{۳}{۲\times۴\times۵}+\cdots$

واگرا $+\frac{n}{۲(n+۱)(n+۲)}+\cdots$

همگرا ۱۴) $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۴۲}+\cdots$

$$۱۵)\quad \frac{۲}{۹}+\frac{۲^{۲}}{۲۸}+\frac{۲^{۳}}{۶۵}+\frac{۲^{۴}}{۱۲۶}+\cdots$$

$$۱۶)\quad \frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۶}+\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۱۲}+\cdots$$

$$۱۷)\quad \frac{۱}{\log ۲}+\frac{۱}{\log ۳}+\frac{۱}{\log ۴}+\cdots$$

$$۱۸)\quad \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۴}+\cdots$$

۱۸۷ـ دستور دالامبر* . ـ در سری هندسی

$$a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n}+ar^{n+۱}+\cdots$$

نسبت دوجملهٔ متوالی ar^{n} و $ar^{n+۱}$ همان‌قدرنسبت r است . میدانیم که اگر $|r|<۱$ باشد ، سری متقارب ودر جزآن صورت سری متباعد است. اکنون به بیان نسبتی میپردازیم که برای تعیین نوع هرسری بکار میرود .

قضیه ـ سری با جمله‌های مثبت

$$u_{۱}+u_{۲}+u_{۳}+\cdots+u_{n}+u_{n+۱}+\cdots \qquad (۱)$$

را درنظرمیگیریم ونسبت‌دوجملهٔ متوالی u_n و $u_{n+۱}$ را (که نسبت دالامبر نامیده میشود) تشکیل میدهیم :

$$\text{نسبت دالامبر}=\frac{u_{n+۱}}{u_{n}}$$

حداین نسبت را به ازای $n\to\infty$ پیدا میکنیم و ρ مینامیم :

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_{n}}$$

* D' Alembert's test — برای مترجم معلوم نشدکه چرا این‌روش‌دراین‌کتاب بنام‌آزمون کشی (Cauchy) ذکر شده است . مبنای آزمون‌کشی $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ است .

I- اگر $\rho < ۱$ باشد ، سری همگرا است ،

II- اگر $\rho > ۱$ باشد ، سری واگرا است ،

III- اگر $\rho = ۱$ باشد ، ازاین راه نمیتوان نتیجه‌ای گرفت .

اثبات - وقتی $\rho < ۱$ است ، بنابر تعریف حد (شمارهٔ ۱۴) میتوان عدد مثبت m را بقدری بزرگ انتخاب کرد که وقتی $n \geqslant m$ است ، اختلاف نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ با ρ از هرعدد کوچک دلخواهی کوچکتر باشد . بنابراین نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، از جملهٔ u_m ببعد ، ازکسر معینی مانند r کوچکتر است و داریم :

$$u_{m+1} < u_m r \ , \ u_{m+2} < u_{m+1} r < u_m r^2 \ , \ u_{m+3} < u_m r^3$$

بنابراین ازجملهٔ u_m ببعد هرجمله از سری (۱) کوچکتر از جملهٔ نظیر ازتصاعد هندسی

$$u_m r + u_m r^2 + u_m r^3 + \cdots \qquad (۲)$$

است. اما چون $r < ۱$ است ، سری(۲) و از آنجا سری(۱) همگراست (شمارهٔ ۱۸۶) .

II- وقتی $\rho > ۱$ (یا $\rho = \infty$) است ، با استدلالی کاملاً شبیه به آنچه ذکر گردید ، میتوان نشان داد که سری (۱) واگراست .

III- وقتی $\rho = ۱$ است ، سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد و از این راه نمیتوان نوع سری را تعیین کرد . مثلاً درسری p

$$۱ + \frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۳^p} + \frac{۱}{۴^p} + \cdots + \frac{۱}{n^p} + \frac{۱}{(n+۱)^p} + \cdots$$

نسبت دالامبر
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+۱}\right)^p = \left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right)^p$$

و حد آن
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right)^p = (۱)^p = ۱ \ (=\rho)$$

است و p هرچه باشد ، $\rho = ۱$ است . اما درشمارهٔ ۱۸۶ نشان دادیم که وقتی $p > ۱$ است ، سری p همگرا ،

و وقتی $p \leqslant ۱$ است ، سری p واگراست .

بدین ترتیب‌وقتی $p = ۱$ است ، سری میتواند همگرا ویا واگرا باشد و برای تعیین نوع آن باید دستورهای دیگری را بکار بست .

اگر در یک سری نسبت دالامبر به ازای جمیع مقادیر n کوچکتر از یک باشد ، نمیتوان نتیجه گرفت که‌آن سری متقارب‌است ، بلکه باید **حد** نسبت دالامبر کوچکتر از یک باشد. مثلاً در سری همسازاین نسبت همواره کوچکتراز یک و تنها **حد** آن برابریک است.

اگر عده‌ای از نخستین جملات یک‌سری را حذف کنیم ، نوع سری از نظر تقارب یا تباعد عوض نمیشود ولی اگر آن سری متقارب باشد ، مقدار آن تغییر میکند .

سری متناوب . ـ سری متناوب آن است که جمله های آن بطور متناوب مثبت و منفی باشند .

قضیه ـ اگر در سری متناوب

$$u_۱ - u_۲ + u_۳ - u_۴ + \cdots$$

قدر مطلق هرجمله از قدر مطلق جملهٔ قبل‌از آن کوچکتر و

$$\lim_{n \to \infty} u_n = ۰$$

باشد ، سری متقارب است .

اثبات ـ وقتی n زوج است ، S_n را میتوان به دو صورت

$$S_n = (u_۱ - u_۲) + (u_۳ - u_۴) + \cdots + (u_{n-۱} - u_n) \quad (۱)$$

$$S_n = u_۱ - (u_۲ - u_۳) - \cdots - (u_{n-۲} - u_{n-۱}) - u_n \quad (۲)$$

نوشت . مقدار هرپرانتزمثبت است ، بنابراین‌اگر n اعداد زوج را اختیارکند و بزرگ شود، تساوی(۱)نشان میدهد که S_n منظماً زیاد میشود وتساوی(۲) نشان میدهد که S_n همواره از $u_۱$ کوچکتراست. پس بنابر قضیهٔ I شمارهٔ ۱۸۵ ، S_n بسمت حدی مانند l میل میکند. اما $S_{n+۱}$ نیز بسمت همان حد یعنی l میل مینماید زیرا $S_{n+۱} = S_n + u_{n+۱}$ و $\lim_{n \to \infty} u_{n+۱} = ۰$ است. بنابراین وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، S_n بسمت l میل مینماید و سری متقارب است .

مثال - نوع سری متناوب زیر را تعیین کنید :

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots$$

حل - چون قدر مطلق هرجمله از قدر مطلق جملهٔ قبل از آن کوچکتر و $\lim_{n\to\infty} (u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{n}\right) = ۰$ است ، سری متقارب است .

از قضیهٔ بالا نتیجهٔ مهم زیر گرفته میشود :

خطایی که براثر نگهداشتن عدهٔ معینی از جملههای یك سری متناوب متقارب وحذف بقیهٔ آنها پیش میاید ، ازقدر مطلق اولین جملهٔ حذف شده کوچکتراست .

مثلاً در مثال بالا مجموع ده جملهٔ اول ۰٫۶۴۶ است واختلاف آن با مقدار سری از $\frac{۱}{۱۱}$ کمتر است .

۱۸۹- سری با جملههای مثبت و منفی - تقارب مطلق . - اگر جملات یک سری بطور منظم یا نامنظم مثبت و منفی باشند و سری حاصل از مجموع قدر مطلق جملات آن متقارب باشد ، آن سری را **متقارب مطلق** مینامند .

اگریک سری متقارب‌باشد ولی متقارب مطلق نباشد ، آن را **نیمه متقارب** مینامند.

مثلا سری $$۱ - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۳} - \frac{۱}{۴^۴} + \frac{۱}{۵^۵} - \cdots$$

متقارب مطلق است زیرا سری (۳) ی شمارهٔ ۱۸۶ متقارب است .

اما سری متناوب $$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \cdots$$

نیمه متقارب است زیرا سری همساز متباعد است .

قضیه - سری متقارب مطلق متقارب است .

از اثبات این قضیه صرف‌نظر میکنیم .

۱۹۰- خلاصه - چون‌نسبت‌دالامبر(باتوجه به‌قضیهٔ اخیر) برای تعیین نوع‌سریهای

شامل جملات مثبت و منفی نیزبکارمیرود ، میتوانیم مطالب مذکور را به صورت زیر خلاصه کنیم :

دستورالعمل کلی برای تعیین نوع سری

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

اگر سری داده شده متناوب و $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ باشد و قدر مطلق هر جمله‌از قدر مطلق جملهٔ قبل‌از آن بزرگتر نباشد ، سری متقارب است .

اگر در سری داده شده شرایط بالا برقرار نباشند ، عبارتهای u_n و u_{n+1} رابدست میاوریم ، نسبت دالامبر را تشکیل میدهیم وحد آن را حساب میکنیم :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \rho$$

I- وقتی $|\rho| < 1$ است ، سری متقارب مطلق است .

II- وقتی $|\rho| > 1$ است ، سری متباعد است .

III- وقتی $|\rho| = 1$ است ، این راه نتیجه نمیدهد و باید سری داده شده را با سریهایی مانند

(سری هندسی) $a + ar + ar^2 + \cdots \; ; \; (r < 1)$

(سری p) $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \; ; \; (p > 1)$

که متقاربند و یا با سریهایی مانند

(سری همساز) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

(سری p) $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \; ; \; (p < 1)$

که متباعدند مقایسه کنیم .

مثال ۱ - نوع سری زیر را تعیین کنید :

$$۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}+\cdots$$

حل - دراین سری $u_{n+۱}=\frac{۱}{n!}$ و $u_n=\frac{۱}{(n-۱)!}$

$$\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{(n-۱)!}{n!}=\frac{۱}{n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$$

پس سری متقارب است .

مثال ۲- نوع سری زیر را تعیین کنید :

$$\frac{۱!}{۱۰}+\frac{۲!}{۱۰^{۲}}+\frac{۳!}{۱۰^{۳}}+\cdots$$

حل - دراین سری $u_{n+۱}=\frac{(n+۱)!}{۱۰^{n+۱}}$ و $u_n=\frac{n!}{۱۰^n}$

$$\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{(n+۱)!}{۱۰^{n+۱}}\cdot\frac{۱۰^n}{n!}=\frac{n+۱}{۱۰}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{۱۰}=\infty$$

پس سری متباعد است .

مثال ۳- نوع سری زیر را تعیین کنید :

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۳\times۴}+\frac{۱}{۵\times۶}+\cdots$$

حل - دراین سری

$$u_n=\frac{۱}{(۲n-۱)۲n}\quad,\quad u_{n+۱}=\frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۲)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2}=1$$ (بنابر دستور شمارهٔ ۱۸)

پس دستور دالامبر نتیجه نمیدهد . اما اگر سری داده شده را با سری p با $p=2$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

مقایسه کنیم ، می‌بینیم که متقارب است زیرا جملات سری داده شده از جملات نظیر این «سری p» که متقارب است ، کوچکتر است .

تمرین

نوع هریک از سریهای زیر را تعیین کنید :

جواب

۱) $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\left(\frac{3}{4}\right)^3+4\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots$ همگرا

۲) $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$ همگرا

۳) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2\times 2^2}+\frac{3^3}{3\times 2^3}+\frac{3^4}{4\times 2^4}+\cdots$ واگرا

۴) $\frac{1}{3}+\frac{1\times 2}{3\times 5}+\frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7}+\cdots$
$+\frac{n!}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}+\cdots$ همگرا

۵) $\frac{1}{1}+\frac{1\times 3}{1\times 4}+\frac{1\times 3\times 5}{1\times 4\times 7}+\cdots$
$+\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}+\cdots$ همگرا

جواب

همگرا $\text{٦)}\quad \frac{١}{١}+\frac{١\times٢}{١\times٣}+\frac{١\times٢\times٣}{١\times٣\times٥}+\frac{١\times٢\times٣\times٤}{١\times٣\times٥\times٧}+\cdots$

همگرا $\text{٧)}\quad \frac{٥}{١}+\frac{٥^{٢}}{٢!}+\frac{٥^{٣}}{٣!}+\frac{٥^{٤}}{٤!}+\cdots$

واگرا $\text{٨)}\quad \frac{١}{٩}+\frac{٢!}{٩^{٢}}+\frac{٣!}{٩^{٣}}+\frac{٤!}{٩^{٤}}+\cdots$

$\text{٩)}\quad \frac{١}{٣}+\frac{٣}{٣^{٢}}+\frac{٥}{٣^{٣}}+\frac{٧}{٣^{٤}}+\cdots$

$\text{١٠)}\quad ١+\frac{٢\times٢!}{٥}+\frac{٢^{٢}\times٣!}{١٠}+\frac{٢^{٣}\times٤!}{١٧}+\cdots$

$\text{١١)}\quad \frac{١}{٤\times٣}+\frac{١}{٥\times٣^{٢}}+\frac{١}{٦\times٣^{٣}}+\frac{١}{٧\times٣^{٤}}+\cdots$

$\text{١٢)}\quad \frac{٣}{٥}+\frac{٤}{٥^{٢}}+\frac{٥}{٥^{٣}}+\frac{٦}{٥^{٤}}+\cdots$

$\text{١٣)}\quad \frac{١}{٣}+\frac{١\times٣}{٣\times٦}+\frac{١\times٣\times٥}{٣\times٦\times٩}+\frac{١\times٣\times٥\times٧}{٣\times٦\times٩\times١٢}+\cdots$

۱۹۱- سری تام . - سری

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \tag{۱}$$

راکه جملات آن ضریبی از قوای صحیح و مثبت و صعودی متغیر x است ، **سری تام از x** مینامند . ضرایب a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... مقادیری ثابتند . در حساب دیفرانسیل و انتگرال سریهای تام اهمیت اساسی و موارد استعمال بسیار دارند . بعضی از آنها به‌ازای تمام مقادیر متغیر و بعضی دیگر تنها به ازای $x=0$ متقاربند ولی بطورکلی یک سری تام به ازای مقادیر خاصی از متغیر متقارب و به‌ازای دیگر مقادیر متغیر متباعد است.

ما سری (۱) را تنها وقتی مطالعه میکنیم که حد نسبت ضرایب دو جملهٔ متوالی‌عدد معینی است :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$$

برای آنکه به علت پیدایش این شرط پی‌ببریم ، در سری (۱) نسبت دالامبر را تشکیل میدهیم :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x$$

پس به ازای هرمقدار ثابت x داریم :

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right) = x \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = xL$$

دو حالت پیش میاید :

I- وقتی $L = 0$ است ، سری به ازای تمام مقادیر x متقارب است ، زیرا $\rho = 0$ است .

II- وقتی $L \neq 0$ است ، اگر قدر مطلق xL $(=\rho)$ کوچکتر از ۱ باشد ، یعنی x در فاصلهٔ

$$-\frac{1}{|L|} < x < \frac{1}{|L|}$$

قرار داشته باشد ، سری (۱) متقارب ، واگر x در خارج این فاصله باشد ، سری (۱) متباعد است . فاصلهٔ مذکور را **فاصلهٔ تقارب** مینامند .

نوع سری را به ازای دو سر فاصلهٔ تقارب باید جداگانه مطالعه کرد. بدین ترتیب باید در هرسری تام نسبت دالامبر را تشکیل داد و فاصلهٔ تقارب را برطبق شمارهٔ ۱۸۷ تعیین نمود .

مثال ۱- فاصلهٔ تقارب سری زیر را تعیین کنید :

$$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots \qquad (2)$$

حل - نسبت دالامبر را تشکیل میدهیم :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n^2}{(n+1)^2} x$$

و
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{۲}}{(n+۱)^{۲}} = ۱$$

دراین سری $\rho = -x$ است . پس وقتی قدر مطلق x از ۱ کوچکتر است ، سری متقارب و وقتی‌قدر مطلق x از ۱ بزرگتر است ، سری متباعد است . برای تعیین نوع سری‌در دوسر فاصلهٔ تقارب ، نخست در سری (۲) بجای x ، ۱ میگذاریم :

$$۱ - \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۲}} - \frac{۱}{۴^{۲}} + \cdots$$

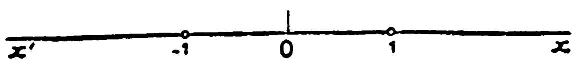
این سری‌متناوب متقارب است .

اکنون درسری (۲) بجای x ، ۱— میگذاریم :

$$-۱ - \frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{۳^{۲}} - \frac{۱}{۴^{۲}} - \cdots$$

این سری یک سری p با $p = ۲$ و لذا متقارب است .

بدین ترتیب **فاصلهٔ تقارب** سری (۲) فاصلهٔ بستهٔ $[-۱ , ۱]$ است . این فاصله را میتوان به صورت $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ نیز نوشت و با شکل ۱۷۶ نشان داد .



شکل ۱۷۶

مثال ۲- فاصلهٔ تقارب سری زیر را تعیین کنید :

$$۱ + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \frac{x^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} + \cdots$$

حل - نسبت دالامبر را تشکیل میدهیم :

$$\frac{u_{n+۱}}{u_n} = \frac{(۲n)!}{(۲n+۲)!} x^{۲} = \frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۲)} x^{۲}$$

چون $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۲)} = ۰$ است ، سری به‌ازای تمام مقادیر x متقارب‌است .

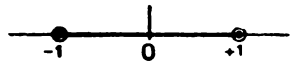
تمرین

درهریک از مسائل زیر به ازای چه مقادیری از متغیر سری مذکور متقارب است :

جواب	شکل هندسی فاصلهٔ تقارب*

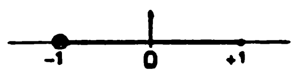
۱) $۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots$

$-۱ < x < ۱$



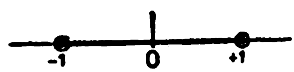
۲) $x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{٤}}{٤}+\cdots$

$-۱ < x \leqslant ۱$



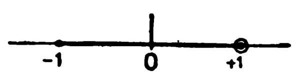
۳) $x+x^{٤}+x^{۹}+x^{۱٦}+\cdots$

$-۱ < x < ۱$



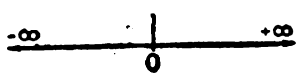
٤) $x+\frac{x^{۲}}{\sqrt{۲}}+\frac{x^{۳}}{\sqrt{۳}}+\cdots$

$-۱ \leqslant x < ۱$



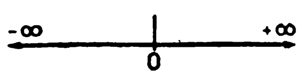
۵) $۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots$

تمام مقادیر x



٦) $۱-\frac{\theta^{۲}}{۲!}+\frac{\theta^{٤}}{٤!}-\frac{\theta^{٦}}{٦!}+\cdots$

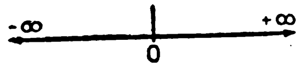
تمام مقادیر θ



* دایره علامت آن است که آن سر فاصله جزء فاصلهٔ تقارب نیست .

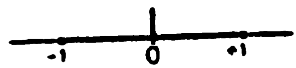
شکل هندسی فاصلهٔ تقارب   جواب

۷) $\varphi-\frac{\varphi^{۳}}{۳!}+\frac{\varphi^{۵}}{۵!}-\frac{\varphi^{۷}}{۷!}+\cdots$



تمام مقادیر φ

۸) $x+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۱\times۳}{۲\times۴}\cdot\frac{x^{۵}}{۵}+\frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\cdot\frac{x^{۷}}{۷}+\cdots$



$-۱\leqslant x\leqslant ۱$

۹) $x+۲x^{۲}+۳x^{۳}+۴x^{۴}+\cdots$ $-۱<x<۱$

۱۰) $۱-x+\frac{x^{۲}}{۲^{۲}}-\frac{x^{۳}}{۳^{۲}}+\cdots$ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$

۱۱) $\frac{x}{۱\times۲}-\frac{x^{۲}}{۲\times۲^{۲}}+\frac{x^{۳}}{۳\times۲^{۳}}-\frac{x^{۴}}{۴\times۲^{۴}}+\cdots$ $-۲<x\leqslant ۲$

۱۲) $x+\frac{۲x^{۲}}{۲!}+\frac{۳x^{۳}}{۳!}+\frac{۴x^{۴}}{۴!}+\cdots$ تمام مقادیر x

۱۳) $۱+\frac{x^{۲}}{۲\times۲^{۲}}+\frac{۱\times۳\times x^{۴}}{۲\times۴\times۲^{۴}}+\frac{۱\times۳\times۵\times x^{۶}}{۲\times۴\times۶\times۲^{۶}}+\cdots$

$-۲<x<۲$

۱۴) $\frac{ax}{۲}+\frac{a^{۲}x^{۲}}{۵}+\frac{a^{۳}x^{۳}}{۱۰}+\cdots+\frac{a^{n}x^{n}}{n^{۲}+۱}+\cdots\ ;\ (a>۰)$

$-\frac{۱}{a}\leqslant x\leqslant\frac{۱}{a}$

۱۵) $۱+\frac{x}{a}+\frac{x^{۲}}{۲a^{۲}}+\frac{x^{۳}}{۳a^{۳}}+\cdots\ ;\ (a>۰)$ $-a\leqslant x<a$

جواب

$$۱۶)\quad ۱+\frac{۲^۲x}{۲!}+\frac{۳^۲x^۲}{۳!}+\frac{٤^۲x^۳}{٤!}+\cdots$$ تمام مقادیر x

$$۱۷)\quad \frac{۱}{۳}+\frac{۲x}{۲\times ۳^۲}+\frac{۳x^۲}{۲^۲\times ۳^۳}+\frac{٤x^۳}{۲^۳\times ۳^٤}+\cdots$$ $-٦<x<٦$

$$۱۸)\quad x+٤x^۲+۹x^۳+۱٦x^٤+\cdots$$

$$۱۹)\quad \frac{x}{۱\times ۲}+\frac{۲x^۲}{۲\times ۲\times ۳}+\frac{۳x^۳}{۲^۲\times ۳\times ٤}+\frac{٤x^٤}{۲^۳\times ٤\times ٥}+\cdots$$

$$۲۰)\quad \frac{۱}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x^۲}{٤}+\frac{x^۳}{٥}+\cdots$$

$$۲۱)\quad \frac{۱۰x}{۱}+\frac{۱۰۰x^۲}{۲!}+\frac{۱۰۰۰x^۳}{۳!}+\cdots$$

$$۲۲)\quad ۱-\frac{x}{۱۰}+\frac{۲!x^۲}{۱۰۰}-\frac{۳!x^۳}{۱۰۰۰}+\cdots$$

$$۲۳)\quad x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^٥}{٥}+\frac{x^۷}{۷}+\cdots$$

$$۲٤)\quad ۱-\frac{x^۲}{۲^۲}+\frac{x^٤}{٤^۲}-\frac{x^٦}{٦^۲}+\cdots$$

۱۹۲- سری دو جمله‌ای . - سری بسیار مهم

$$(۱)\qquad ۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۱\times ۲}x^۲+\frac{m(m-۱)(m-۲)}{۱\times ۲\times ۳}x^۳+\cdots$$

$$+\frac{m(m-۱)(m-۲)\cdots(m-n+۱)}{n!}x^n+\cdots$$

راکه در آن m مقدار ثابتی است ، سری دو جمله‌ای مینامند .

اگر m عددی صحیح و مثبت باشد ، سری (۱) محدود است و $m+۱$ جمله دارد زیرا تمام جمله‌های بعداز جملهٔ شامل x^m یک عامل $(m-m)$ دارند و صفرند. دراین

صورت سری (۱) همان نتیجهٔ بسط $(۱+x)^m$ است . اگر m عددی صحیح و مثبت نباشد ، سری (۱) یک سری بینهایت است .

اکنون نوع آن را تعیین میکنیم . داریم :

$$u_n=\frac{m(m-۱)(m-۲)\cdots(m-n+۲)}{۱\times۲\times۳\cdots(n-۱)}x^{n-۱}$$

و
$$u_{n+۱}=\frac{m(m-۱)(m-۲)\cdots(m-n+۲)(m-n+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times(n-۱)n}x^n$$

بنابراین
$$\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\frac{m-n+۱}{n}x=\left(\frac{m+۱}{n}-۱\right)x$$

لذا $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m+۱}{n}-۱\right)=-۱$ و از آنجا $\rho=-x$ است . پس وقتی قدر مطلق x از ۱ کوچکتر است ، سری متقارب و وقتی قدر مطلق x از ۱ بزرگتر است ، سری متباعد است .

سری ماکلرن که در شمارهٔ ۱۹۴ مطالعه شده است ، براین مطلب مبتنی است : اگر m عددی صحیح و مثبت نباشد و $|x|<۱$ باشد ، مقدار سری دو جمله‌ای درست برابر مقدار $(۱+x)^m$ است ، یعنی

$$(۱+x)^m=۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۱\times۲}x^۲+\cdots \qquad (|x|<۱) \tag{۲}$$

اگر m عددی صحیح و مثبت باشد ، سری محدود است و مقدار آن به ازای تمام مقادیر x برابر طرف چپ است .

معادلهٔ (۲) **حالت خاصی از بسط دو جمله‌ای** است و چون

$$(a+b)^m=a^m(۱+x)^m \quad , \quad \left(x=\frac{b}{a}\right) \tag{۳}$$

است ، طرف چپ (۳) را نیز میتوان به صورت یک سری تام نوشت .

در زیر چند مثال از موارد استعمال سری دو جمله‌ای در محاسبهٔ تقریبی اعداد میاوریم .

مثال - مقدار تقریبی $\sqrt{۶۳۰}$ را با استفاده از سری دو جمله‌ای حساب کنید .

حل - ۶۲۵ نزدیکترین عدد مجذورکامل به ۶۳۰ است ، پس مینویسیم :

$$\sqrt{۶۳۰}=\sqrt{۶۲۵+۵}=۲۵\left(۱+\frac{۱}{۱۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

سری (۲) برای $m=\frac{۱}{۲}$ به صورت زیر در میاید :

$$(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}=۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۸}x^۲+\frac{۱}{۱۶}x^۳-\frac{۵}{۱۲۸}x^۴+\cdots$$

دراین مثال $x=\frac{۱}{۱۲۵}=۰{,}۰۰۸$ است ، پس :

$$\left(۱+\frac{۱}{۱۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۱+۰{,}۰۰۴-۰{,}۰۰۰۰۰۸+۰{,}۰۰۰۰۰۰۰۳۲+\cdots$$

جواب (با یک میلیونیم تقریب) .

$$۲۵\left(۱+\frac{۱}{۱۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۲۵+۰{,}۱-۰{,}۰۰۰۲+۰{,}۰۰۰۰۰۰۸ \qquad (۴)$$

$$=۲۵{,}۰۹۹۸۰۱$$

سری (۴) متناوب و لذا خطای جواب از ۰٫۰۰۰۰۰۰۸ کمتر است .

۱۹۳- صورت دیگری از سری تام .- ما اغلب سریهایی به شکل

$$b_۰+b_۱(x-a)+b_۲(x-a)^۲+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots \qquad (۱)$$

استفاده میکنیم. a ، $b_۰$ ، $b_۱$ ، ... ، b_n ، ... مقادیری ثابت و x متغیر است.
این سری را **سری تام از** $(x-a)$ مینامند .

نسبت دالامبر را برای سری (۱) پیدا میکنیم . اگر حد دو ضریب متوالی را M بنامیم ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+۱}}{b_n}=M$$

به ازای هرمقدار معین x داریم :

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (x-a)M$$

دو حالت پیش میاید :

I- وقتی $M = ۰$ است ، سری (۱) به ازای تمام مقادیر x متقارب است .

II- وقتی $M \neq ۰$ است ، سری (۱) در فاصلهٔ

$$a - \frac{۱}{|M|} < x < a + \frac{۱}{|M|}$$

متقارب است .

همان‌طورکه سری تام از x (وقتی سری متقارب و x نزدیک به صفر است) برای محاسبه مناسب است ، سری تام از $(x-a)$ نیز (وقتی سری متقارب و x نزدیک به a است) برای محاسبه مناسب است .

مثال - فاصلهٔ تقارب سری زیر را پیدا کنید :

$$۱ - (x-۱) + \frac{(x-۱)^۲}{۲} - \frac{(x-۱)^۳}{۳} + \cdots$$

حل -
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{n+۱}(x-۱)$$

و
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right) = ۱$$

پس $|\rho| = |x-۱|$ است و سری به ازای مقادیر بین ۰ و ۲ متقارب است. سر $x=۲$ نیز جزء فاصله است .

تمرین

۱) با استفاده از سری دو جمله‌ای نشان دهید که :

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^۲ - x^۳ + \cdots$$

صحت جواب را با تقسیم مستقیم بیازمایید .

با استفاده از سری دو جمله‌ای مقدار تقریبی هریک از اعداد زیر را حساب کنید :

۲) $\sqrt{۹۸}$ ۳) $\sqrt[۳]{۱۲۰}$ ۴) $\sqrt[٤]{٦۳۰}$

۵) $\sqrt[۵]{۳۵}$ ٦) $\frac{۱}{٤۱۲}$ ۷) $\frac{۱}{\sqrt{٤٫۱۲}}$

۸) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹۹۰}}$ ۹) $\frac{۱}{\sqrt[٤]{۱۵}}$ ۱۰) $\frac{۱}{\sqrt[۵]{۳۰}}$

۱۱) $\sqrt{\frac{۲٦}{۲۵}}$ ۱۲) $\sqrt[۳]{\frac{۱۲۸}{۱۲۵}}$ ۱۳) $\sqrt[٤]{\frac{۱۷}{۱٦}}$

در هریک از مسائل ۱٤ تا ۱۹ فاصلهٔ تقارب سری مذکور را تعیین کنید :

جواب

۱٤) $(x+۱)-\frac{(x+۱)^۲}{۲}+\frac{(x+۱)^۳}{۳}-\frac{(x+۱)^٤}{٤}+\cdots$ $\quad -۲<x\leqslant ۰$

۱۵) $(x-۱)+\frac{(x-۱)^۲}{\sqrt{۲}}+\frac{(x-۱)^۳}{\sqrt{۳}}+\frac{(x-۱)^٤}{\sqrt{٤}}+\cdots$ $\quad ۰\leqslant x<۲$

۱٦) $۲(۲x+۱)+\frac{۳(۲x+۱)^۲}{۲!}+\frac{٤(۲x+۱)^۳}{۳!}+\cdots$ تمام مقادیر x

۱۷) $۱+(x-۲)+\frac{(x-۲)^۲}{۲^۲}+\frac{(x-۲)^۳}{۳^۲}+\frac{(x-۲)^٤}{٤^۲}+\cdots$

۱۸) $۱-۲(۲x-۳)+۳(۲x-۳)^۲-٤(۲x-۳)^۳+\cdots$

۱۹) $\frac{x-۳}{۱\times ۳}+\frac{(x-۳)^۲}{۲\times ۳^۲}+\frac{(x-۳)^۳}{۳\times ۳^۳}+\frac{(x-۳)^٤}{٤\times ۳^٤}+\cdots$

۲۰) با استفاده از سری دو جمله‌ای سه جملهٔ اول بسط $\sqrt{۱+t}$ را به سری تام از $(t-۱)$ پیدا کنید .

حل - $$\sqrt{۱+t}=\sqrt{۲+(t-۱)}=\sqrt{۲}\left[۱+\frac{t-۱}{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

در سری (۱) شمارهٔ ۱۹۲ ، $m=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{t-۱}{۲}$ میگذاریم ، داریم :

جواب : $$\sqrt{۱+t}=\sqrt{۲}\left[۱+\frac{(t-۱)}{٤}-\frac{(t-۱)^{۲}}{۳۲}+\cdots\right]$$

۲۱) سه جملهٔ اول بسط $\sqrt{۳+t}$ را به سری تام از $(t-۱)$ پیدا کنید و با استفاده از آن مقدار تقریبی $\sqrt{۳{,}۵}$ را حساب نمایید . جواب : ۱٫۸۷۱

۲۲) سه جملهٔ اول بسط $\sqrt{٦+t}$ را به سری تام از $(t-۳)$ پیدا کنید وبااستفاده از آن مقدار تقریبی $\sqrt{۷}$ را حساب نمایید . جواب : ۲٫٦٤۸

۲۳) سه جملهٔ اول بسط $\sqrt[۳]{۷+t}$ رابه سری تام از $(t-۱)$ پیدا کنید وبااستفاده از آن مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۹}$ را حساب نمایید . جواب : ۲٫۰۸۰

فصل بیستم

بسط توابع

۱۹۴ - سری ماکلرن . - دراین فصل نمایش یک تابع بوسیلهٔ سری تام یا به عبارت دیگر بسط یک تابع به سری تام را مطالعه میکنیم .

روشن است که یک سری تام از x ، به ازای تمام مقادیر واقع در فاصلهٔ تقارب ، تابعی از x است و میتوان نوشت :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

اکنون این سؤال پیش میاید که اگر تابعی به صورت یک سری تام بسط داده شده باشد ، مقدار عددی ضرایب a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ، ... چقدر است ؟ برای پاسخ دادن به این سؤال به‌طریق زیر عمل میکنیم :

در تساوی (۱) بجای x صفر میگذاریم ، باید

$$f(0)=a_0 \tag{2}$$

باشد . بدین ترتیب a_0 بدست میاید . اکنون **فرض میکنیم** که میتوان از سری (۱) جمله به جمله مشتق گرفت و مشتق گیری را ادامه داد . بنابراین :

$$\begin{cases} f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \\ f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots \\ f'''(x)=6a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

درهریک از این تساویها بجای x صفر میگذاریم ، معادلات زیر بدست میایند :

$$f'(0)=a_1\quad , \quad f''(0)=2!a_2\quad , \quad f'''(0)=3!a_3\quad , \quad \ldots\ , \ f^{(n)}(0)=n!a_n\ , \ \ldots \tag{4}$$

ازاین معادلات ضرایب a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، ... را بدست میاوریم و در اتحاد (۱) میگذاریم ، دستور زیر بدست میاید :

$$(A)\quad f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

این دستور $f(x)$ را به صورت یک سری تام بدست میدهد و میگوییم « تابع $f(x)$ به یک سری تام از x بسط داده شده است» . اتحاد (A) را سری یا دستور ماکلرن * مینامند.

اکنون‌دستور (A) را با دقت بیشتری مطالعه میکنیم. بدین منظوردر دستور (G)ی شمارهٔ ۱۲۴ ، بجای a صفر و بجای b ، x میگذاریم ، داریم :

$$(5)\qquad f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R$$

و
$$R=f^{(n)}(x_1)\frac{x^n}{n!}\qquad (0<x_1<x)$$

R را **ماندهٔ پس‌از جملهٔ n ام** مینامند .

طرف راست (۵) همان n جملهٔ اول سری ماکلرن است . اگر مجموع این n جمله را S_n بنامیم ، اتحاد (۵) به صورت زیر در میاید :

$$f(x)=S_n+R \quad \text{یا} \quad f(x)-S_n=R$$

اکنون فرض میکنیم که به ازای مقدار معینی از x مانند x_0 ، وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، R بسمت صفر میگراید. دراین‌صورت S_n بسمت $f(x_0)$ میل مینماید(شمارهٔ ۱۴) . پس سری ماکلرن به ازای $x=x_0$ متقارب و مقدارآن برابر $f(x_0)$ است . بنابراین میتوان گفت :

---

* Colin Maclaurin (۱۶۹۸ - ۱۷۴۶) این دستور را برای نخستین بار در اثرش به نام «Treatise o' Fluxions»(ادنبورگ،۱۷۴۲) منتشر کرد . این سری‌در واقع از Stirling (۱۶۹۲-۱۷۷۰) است .

قضیه - برای آنکه سری (A) متقارب باشد و f(x) را نشان دهد ، لازم و کافی است که

$$\lim_{n\to\infty} R = 0 \qquad (۶)$$

باشد .

معمولاً تعیین فاصلهٔ تقارب سری (A) (بدان طریق که در فصل قبل ذکر گردید) آسانتر از پیدا کردن فاصله‌ای است که به ازای مقادیر آن ، رابطهٔ (۶) برقرار است. از طرف دیگر ، در حالات ساده هردو فاصله یکی است .

برای آنکه بتوان تابعی مانند f(x) را به صورت سری تام (A) درآورد ، **لازم** است که تابع و تمام مشتقهای آن محدود باشند . اما این شرط **کافی** نیست .

مثلاً توابع $\ln x$ و $\cot g\, x$

را نمیتوان به سری ماکلرن بسط داد زیرا مقدار هریک از این دو تابع به ازای $x=0$ بینهایت است .

بسط (A) اهمیت بسیار دارد . در تمام مسائل عملی منظور بدست آوردن نتیجهٔ مسئلهٔ طرح شده به صورت یک عدد اعشاری با عدهٔ معینی از ارقام است. این کار معمولاً به محاسبهٔ مقدار عددی یک کثیرالجملهٔ عادی با ضرایب ثابت منجر میشود ومحاسبهٔ مذکور ممکن است مشکل باشد . سری (A) برای آسان کردن چنین محاسبه‌ای بسیار مناسب است . البته باید عدهٔ جمله‌ها را آنقدر زیاد گرفت که دقت مورد نیاز بدست آید .

در حالتی که سری (A) متناوب است (شمارهٔ ۱۸۸) ، خطای ناشی از حذفماندهٔ سری از قدر مطلق نخستین جملهٔ حذف شده کوچکتر است .

مثال ۱ - $\cos x$ را به سری تام بسط دهید وفاصلهٔ تقارب سری حاصل را تعیین کنید.

حل - از $\cos x$ متوالیاً مشتق میگیریم و در آنها $x=0$ میگذاریم ، داریم :

$$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\sin x \qquad f'''(0)=0$$

$$f^{iv}(x) = \cos x \qquad f^{iv}(۰) = ۱$$

$$f^{v}(x) = -\sin x \qquad f^{v}(۰) = ۰$$

$$f^{vi}(x) = -\cos x \qquad f^{vi}(۰) = -۱$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

این مقادیر را در (A) میگذاریم ، سری زیر بدست میاید :

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \tag{۷}$$

این سری ، با مقایسه با تمرین ۶ شمارهٔ ۱۹۱ ، به ازای تمام مقادیر x متقارب است .

به همین ترتیب برای $\sin x$ سری زیر بدست میاید :

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \tag{۸}$$

این سری نیز به ازای تمام مقادیر x متقارب است (تمرین ۷ شمارهٔ ۱۹۱) .

درسریهای (۷) و (۸) میتوان بآسانی نشان داد که وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، ماندهٔ سری ، R ، به ازای هرمقدار معین x بسمت صفر میل مینماید . مثلاً اگر سری (۷) را در نظر بگیریم و مشتق n ام $\cos x$ را به صورت

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{۲}\right)$$

بنویسیم ، R به صورت

$$R = \cos\left(x_۱ + \frac{n\pi}{۲}\right)\frac{x^n}{n!}$$

در میاید . اما قدرمطلق $\cos\left(x_۱ + \frac{n\pi}{۲}\right)$ از ۱ کوچکتر است و $\frac{x^n}{n!}$ جملهٔ n ام سری

$$x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

است . این سری به ازای تمام مقادیر x همگر است . پس وقتی n بسمت بینهایت میل

میکند ، R بسمت صفر میل مینماید [رابطهٔ (A) ی شمارهٔ ١٨٥ را ببینید] . بنابراین رابطهٔ (٦) برقرار است .

درمثال بالا دیدیم که

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = ٠$$

است . ازطرف دیگر

$$R = f^{(n)}(x_1) \frac{x^n}{n!} \qquad (٠ < x_1 < x)$$

است . پس اگر $f^{(n)}(x_1)$ ، وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، محدود باقی بماند ، $\lim_{n \to \infty} R = ٠$ است .

مثال ٢- با استفاده از سری (٨) مقدار $\sin ١$ را تا چهار رقم دقیق اعشار حساب کنید .

حل- دراین مثال x مساوی ١ رادیان است. بنابراین باید در سری (٨) بجای x ، ١ بگذاریم :

$$\sin ١ = ١ - \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٥!} - \frac{١}{٧!} + \cdots$$

جملات مثبت را باهم و جملات منفی را باهم جمع میکنیم :

$$١ = ١{,}٠٠٠٠٠٠ \ \ldots \qquad \frac{١}{٣!} = ٠{,}١٦٦٦٧ \ \ldots$$

$$\frac{١}{٥!} = ٠{,}٠٠٨٣٣ \ \ldots \qquad \frac{١}{٧!} = ٠{,}٠٠٠٢٠ \ \ldots$$

$$١{,}٠٠٨٣٣ \ \ldots \qquad ٠{,}١٦٦٨٧ \ \ldots$$

پس $\sin ١ = ١{,}٠٠٨٣٣ - ٠{,}١٦٦٨٧ = ٠{,}٨٤١٤٦ \ \ldots$

این مقدار تا رقم پنجم دقیق است ، زیرا خطای آن از $\frac{١}{٩!}$ یعنی از ٠٫٠٠٠٠٠٣ کمتر است . روشن است که میتوانیم مقدار $\sin ١$ را با هردقتی حساب کنیم . بدان منظور کافی است عدهٔ جملات را به اندازهٔ کافی زیاد بگیریم .

تمرین

درستی بسطهای زیر را بوسیلهٔ سری ماکلرن بیازمایید و فاصلهٔ تقارب هریک را تعیین کنید .

جواب

$$۱)\quad e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!} + \cdots$$

تمام مقادیر x

$$۲)\quad \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} + \cdots$$

تمام مقادیر x

$$۳)\quad \ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^٤}{٤} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}x^n}{n} + \cdots$$

$$-۱ < x \leqslant ۱$$

$$٤)\quad \ln(۱-x) = -x - \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^٤}{٤} - \cdots - \frac{n^n}{n} - \cdots$$

$$-۱ \leqslant x < ۱$$

$$۵)\quad \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{۱ \times x^۳}{۲ \times ۳} + \frac{۱ \times ۳ \times x^۵}{۲ \times ٤ \times ۵} + \cdots$$

$$+ \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲x-۳)x^{۲n-۱}}{۲ \times ٤ \times \cdots \times (۲n-۲)(۲n-۱)} + \cdots \qquad -۱ \leqslant x \leqslant ۱$$

$$٦)\quad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}x^{۲n-۱}}{۲n-۱} + \cdots$$

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۱$$

$$\text{v)}\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$ تمام مقادیر x

$$\text{۸)}\quad \ln(a+x)=\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\cdots$$

$$+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}}+\cdots \qquad -a<x\leqslant a$$

درستی بسطهای زیر را بیازمایید :

$$\text{۹)}\quad tg\, x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots$$

$$\text{۱۰)}\quad \sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\cdots$$

$$\text{۱۱)}\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}\,x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\text{۱۲)}\quad tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+2x+2x^2+\frac{8x^3}{3}+\cdots$$

$$\text{۱۳)}\quad arc\ tg\,\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$\text{۱۴)}\quad \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\text{۱۵)}\quad \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{9x^5}{5!}+\cdots$$

۱۶) $\ln \cos x = -\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۱۲} - \frac{x^۶}{۴۵} + \cdots$

سه جمله از بسط توابع زیر را به سری تام از x پیدا کنید :

۱۷) $\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$

۱۸) $\sin(x+۱)$

۱۹) $e^{\sin x}$

۲۰) $\frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$

مقدار هریک از توابع زیر را با استفاده از بسط آنها بدست آورید و عدهٔ جمله‌ها را آنقدر زیاد بگیرید که مقدار حاصل با عدد داده شده تطبیق کند :

۲۱) $e = ۲٫۷۱۸۲ \ldots$

حل - در سری تمرین ۱ بجای x ، ۱ میگذاریم ، داریم :

$$e = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \cdots$$

جملهٔ اول = ۱٫۰۰۰۰۰

جملهٔ دوم = ۱٫۰۰۰۰۰

جملهٔ سوم = ۰٫۵۰۰۰۰

جملهٔ چهارم = ۰٫۱۶۶۶۷ ... (از تقسیم جملهٔ سوم بر ۳ بدست میاید.)

جملهٔ پنجم = ۰٫۰۴۱۶۷ ... (از تقسیم جملهٔ چهارم بر ۴ بدست میاید.)

جملهٔ ششم = ۰٫۰۰۸۳۳ ... (از تقسیم جملهٔ پنجم بر ۵ بدست میاید.)

جملهٔ هفتم = ۰٫۰۰۱۳۹ ... (از تقسیم جملهٔ ششم بر ۶ بدست میاید.)

جملهٔ هشتم = ۰٫۰۰۰۲۰ ... (از تقسیم جملهٔ هفتم بر ۷ بدست میاید.)

جواب : $e = ۲٫۷۱۸۲۶ \ldots$

۲۲) $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{۱}{۵}\right) = ۰٫۱۹۷۳ \ldots$ سری تمرین ۶ را بکار برید .

۲۳) $\cos ۱ = ۰٫۵۴۰۳ \ldots$ سری (۷) شمارهٔ ۱۹۴ را بکار برید .

۲۴) $\cos ۱۰^\circ = ۰٫۹۸۴۸ \ldots$ سری (۷) شمارهٔ ۱۹۴ را بکار برید .

۲۵) $\sin ۰٫۱ = ۰٫۰۹۹۸ \ldots$ سری تمرین ۲ را بکار برید .

۲۶) $\arcsin ۱ = ۱٫۵۷۰۸ \ldots$ سری تمرین ۵ را بکار برید .

۲۷) $\sin \frac{\pi}{۴} = ۰٫۷۰۷۱ \ldots$ سری تمرین ۲ را بکار برید .

۲۸) $\sin ۰٫۵ = ۰٫۴۷۹۴ \ldots$ سری تمرین ۲ را بکار برید .

۲۹) $e^۲ = ۱ + ۲ + \frac{۲^۲}{۲!} + \frac{۲^۳}{۳!} + \cdots = ۷٫۳۸۹۰$

۳۰) $\sqrt{e} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲ \times ۲!} + \frac{۱}{۲^۳ \times ۳!} + \cdots = ۱٫۶۴۸۷$

۱۹۵ - چهار عمل اصلی در سریها . - در سریهای متقارب نیز ، مانند کثیرالجمله ها، میتوان اعمال جبری و دیفرانسیل و انتگرال را انجام داد . ما در زیر به ذکر چند قضیه (بدون اثبات) میپردازیم .

فرض میکنیم

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \qquad (\alpha)$$

و

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

دو سری تام و متقاربند .

قضیهٔ ۱ - اگر دو سری (α) را جمله به جمله بیکدیگر بیفزاییم و یا از یکدیگر بکاهیم سری حاصل متقارب است * :

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n + \cdots.$$

قضیهٔ ۲ - اگر دو سری (α) را در یکدیگر ضرب کنیم و جملات را به صورت زیر دسته بندی نماییم ، سری حاصل متقارب است :

* در داخل فاصلهٔ مشترك تقارب دو سری . مترجم

$$a_۰b_۰+(a_۰b_۱+a_۱b_۰)x+(a_۰b_۲+a_۱b_۱+a_۲b_۰)x^۲+\cdots$$

مثال ۱- محاسبهٔ لگاریتم اعداد. - ازتفریق سریهای (تمرینهای ۳و۴ شمارهٔ ۱۹۴)

$$ln\,(۱+x)=x-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۴}x^۴+\cdots$$

$$ln\,(۱-x)=-x-\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۴}x^۴-\cdots$$

و بکار بستن روابط (۲) ی شمارهٔ ۱ سری زیر بدست میاید :

$$(۱)\qquad ln\frac{۱+x}{۱-x}=۲(x+\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۱}{۵}x^۵+\frac{۱}{۷}x^۷+\cdots)$$

این سری به ازای $|x|<۱$ متقارب است .

شکل سری (۱) را میتوان تغییر داد و سری مناسبتری برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد بدست آورد . برای این کار N را مثبت میگیریم و تغییر متغیر

$$(۲)\qquad x=\frac{۱}{۲N+۱}\implies\frac{۱+x}{۱-x}=\frac{N+۱}{N}$$

میدهیم . دراین صورت به ازای تمام مقادیر N نامساوی $|x|<۱$ برقرار است . این دو مقدار را در سری (۱) میگذاریم ، دستور زیر بدست میاید :

$$(۳)\qquad ln\,(N+۱)=ln\,N+۲\left[\frac{۱}{۲N+۱}+\frac{۱}{۳(۲N+۱)^۳}+\frac{۱}{۵(۲N+۱)^۵}+\cdots\right]$$

این سری به ازای تمام مقادیر مثبت N متقارب و برای محاسبه بسیار مناسب است . مثلاً اگر $N=۱$ باشد :

$$ln\,(N+۱)=ln\,۲\quad,\quad\frac{۱}{۲N+۱}=\frac{۱}{۳}$$

این مقادیر را در (۳) میگذاریم ، حاصل آن $ln\,۲=۰٫۶۹۳۱۵$ میشود .

اگر در (۳) بجای N ، ۲ بگذاریم ، $ln\ ۳$ بدست میاید :

$$ln\ ۳ = ln\ ۲ + ۲\left[\frac{۱}{٥} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{٥^{۳}} + \frac{۱}{٥}\cdot\frac{۱}{٥^{٥}} + \cdots\right] = ۱ر۰۹۸٦۱\ \ldots$$

به این ترتیب تنها کافی است لگاریتم اعداد اول را حساب کنیم و لگاریتم اعداد دیگررا با استفاده ازدستورهای (۲) ی شمارهٔ ۱ بدست آوریم . مثلاً

$$ln\ ۸ = ln\ ۲^{۳} = ۳\ ln\ ۲ = ۲ر۰۷۹٤٤\ \ldots$$

$$ln\ ٦ = ln\ ۳ + ln\ ۲ = ۱ر۷۹۱۷٦\ \ldots$$

این لگاریتمها **لگاریتم نپری* یاطبیعی** (یعنی لگاریتم بر پایهٔ... $e = ۲ر۷۱۸۲۸$) میباشند . اگر بخواهیم **لگاریتم بریگس** یا عادی** (یعنی لگاریتم برپایهٔ ۱۰) را پیدا کنیم ، با دستور زیر تغییر پایه میدهیم :

$$log\ n = \frac{ln\ n}{ln\ ۱۰}$$

بدین ترتیب

$$log\ ۲ = \frac{ln\ ۲}{ln\ ۱۰} = \frac{۰ر٦۹۳۱٥}{۲ر۳۰۲٥۸} = ۰ر۳۰۱۰\ \ldots$$

در تنظیم جدولهای لگاریتم تنها لگاریتم عدهٔ کمی ازاعداد را با استفاده ازسری حساب میکنند و لگاریتم بقیهٔ اعداد را بوسیلهٔ قضایای مربوط به لگاریتمها ودستورهای محاسباتی پیدا مینمایند .

مثال ۲- بسط $e^{x}\, sin\, x$ را به سری تام پیدا کنید .

حل- ازضرب دو سری

(تمرین ۲ شمارهٔ ۱۹٤)

$$sin\ x = x - \frac{x^{۳}}{٦} + \frac{x^{٥}}{۱۲۰} - \cdots$$

و(تمرین ۱ شمارهٔ ۱۹٤)

$$e^{x} = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{٦} + \frac{x^{٤}}{۲٤} + \frac{x^{٥}}{۱۲۰} + \cdots$$

---

* Napierian

** Briggs

سری خواسته شده به صورت زیر بدست میاید :

$$e^x \sin x = x + x^۲ + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۵}{۳۰} + \cdots$$

قضیهٔ ۳- اگر یکی از دو سری (α) را بردیگری تقسیم نماییم، سری حاصل متقارب است *. مثال زیر حالت خاصی ازآن است .

مثال ۳- با استفاده از سری $\cos x$ [(۷) شمارهٔ ۱۹۴] بسط $\sec x$ را پیدا کنید.

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \qquad (۴)$$

حل - چون $\sec x = \frac{۱}{\cos x}$ است ، سری خواسته شده با تقسیم ۱ بر سری (۴) بدست میاید . این کار را میتوان بآسانی به ترتیب زیر انجام داد :

تساوی (۴) را به صورت $\cos x = ۱ - z$ که در آن

$$z = \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۲۴} + \frac{x^۶}{۷۲۰} - \cdots \qquad (۵)$$

است مینویسیم . دراین صورت

$$\sec x = \frac{۱}{۱ - z} = ۱ + z + z^۲ + z^۳ + \cdots \qquad (۶)$$

است بشرط آنکه $|z| < ۱$ باشد (تمرین ۱ شمارهٔ ۱۹۳) .

از (۵) سریهای زیر بدست میایند :

$$z^۲ = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۶}{۲۴} + \text{(جملاتی از درجات بالاتر از ۶)}$$

$$z^۳ = \frac{x^۶}{۸} + \cdots$$

* در داخل فاصلهٔ مشترك تقارب دو سری و بشرط آنکه مقدار سری مخرج صفر نباشد .

مترجم

این مقادیر را در (۶) میگذاریم ، داریم :

جواب : $$\sec x = ۱ + \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۵}{۲۴}x^{۴} + \frac{۶۱}{۷۲۰}x^{۶} + \cdots$$

تمرین

میدانیم $\ln ۲ = ۰ر۶۹۳۱۵$ و $\ln ۳ = ۱ر۰۹۸۶۱$ است . لگاریتم طبیعی اعداد زیر را با روش مثال مذکور پیدا کنید :

۱) $\ln ۵ = ۱ر۶۰۹۴۴$

۲) $\ln ۷ = ۱ر۹۴۵۹۱$

۳) $\ln ۱۱ = ۲ر۳۹۷۹۰$

۴) $\ln ۱۳ = ۲ر۵۶۴۹۵$

درستی بسطهای زیر را بیازمایید :

۵) $$e^{-t}\cos t = ۱ - t + \frac{۱}{۳}t^{۳} - \frac{۱}{۶}t^{۴} + \cdots$$

۶) $$\frac{e^{x}}{۱-x} = ۱ + ۲x + \frac{۵}{۲}x^{۲} + \frac{۸}{۳}x^{۳} + \frac{۶۵}{۲۴}x^{۴} + \cdots$$

۷) $$\frac{\cos x}{\sqrt{۱+x}} = ۱ - \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸}x^{۲} - \frac{۱}{۱۶}x^{۳} + \frac{۴۹}{۳۸۴}x^{۴} + \cdots$$

۸) $$\frac{\sin\frac{\theta}{۲}}{۱-\frac{\theta}{۲}} = \frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\theta^{۲} + \frac{۵}{۴۸}\theta^{۳} + \frac{۵}{۹۶}\theta^{۴} + \cdots$$

۹) $$\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{\cos x} = ۱ - \frac{۱}{۶}x^{۴} + \cdots$$

۱۰) $$e^{x}\,\mathrm{tg}\,x = x + x^{۲} + \frac{۵}{۶}x^{۳} + \frac{۱}{۲}x^{۴} + \cdots$$

۱۱) $$e^{-x}\sec x = ۱ - x + x^{۲} - \frac{۲}{۳}x^{۳} + \frac{۱}{۲}x^{۴} + \cdots$$

۱۲) $e^{-\frac{t}{۲}} \sin ۲t = ۲t - t^۲ - \frac{۱۳}{۱۲} t^۳ + \frac{۵}{۸} t^۴ + \cdots$

۱۳) $(۱+x)\cos\sqrt{x} = ۱ + \frac{۱}{۲} x - \frac{۱۱}{۲۴} x^۲ + \frac{۲۹}{۷۲۰} x^۳ - \frac{۱۱}{۸۰۶۴} x^۴ + \cdots$

۱۴) $(۱+۲x)\arcsin x = x + ۲x^۲ + \frac{۱}{۶} x^۳ + \frac{۱}{۳} x^۴ + \cdots$

۱۵) $\sqrt{۱-x}\, \mathrm{arc\,tg}\, x = x - \frac{۱}{۲} x^۲ - \frac{۱۱}{۲۴} x^۳ + \frac{۵}{۴۸} x^۴ + \cdots$

۱۶) $\sqrt{۱-\mathrm{tg}\, x} = ۱ - \frac{۱}{۲} x - \frac{۱}{۸} x^۲ - \frac{۱۱}{۴۸} x^۳ - \frac{۴۷}{۳۸۴} x^۴ + \cdots$

۱۷) $\sqrt{\sec x} = ۱ + \frac{۱}{۴} x^۲ + \frac{۷}{۹۶} x^۴ + \cdots$

۱۸) $\frac{\ln(۱+x)}{۱+\sin x} = x - \frac{۳}{۲} x^۲ + \frac{۱۱}{۶} x^۳ - \frac{۲۳}{۱۲} x^۴ + \cdots$

۱۹) $\frac{۱}{\sqrt{۵-e^x}} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶} x + \frac{۱۱}{۲۵۶} x^۲ + \frac{۱۵۱}{۶۱۴۴} x^۳ + \cdots$

۲۰) $\sqrt{۴+\sin\theta} = ۲ + \frac{۱}{۴}\theta - \frac{۱}{۶۴}\theta^۲ - \frac{۶۱}{۱۵۳۶}\theta^۳ + \cdots$

بسط توابع زیر را تا آنجا که قوهٔ x از ۵ کمتر است ، پیدا کنید :

۲۱) $e^{-\frac{x}{۵}} \sin x$ ۲۲) $e^x \cos\frac{\sqrt{x}}{۲}$

۲۳) $\frac{\sin x}{\cos ۲x}$ ۲۴) $\sqrt{۳+e^{-x}}$

۲۵) $\frac{\ln(۱+x)}{\sqrt{۱+x}}$ ۲۶) $\sqrt{۵-\cos x}$

۱۹۶- مشتق و انتگرال سری تام . - قضیه - از سری تام و متقارب

$$a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (۱)$$

میتوان در هر نقطه ازفاصلهٔ تقارب جمله به جمله مشتق گرفت وسری حاصل متقارب است .

مثلاً اگر ازسری $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$

مشتق بگیریم ، سری حاصل

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots$$

است. هردوسری به‌ازای‌تمام مقادیر x متقاربند (تمرینهای ۶ و ۷ شمارهٔ ۱۹۱ را ببینید) .

به همین ترتیب **میتوان‌ازجمله به‌جملهٔ‌سری (۱) درفاصلهٔ تقارب‌انتگرال گرفت و سری حاصل متقارب است .**

مثال ۱- بسط $\ln(۱+x)$ را به سری تام با انتگرال گیری بدست آورید .

حل - چون $\frac{d}{dx}\ln(۱+x) = \frac{۱}{۱+x}$ است ، داریم :

$$\ln(۱+x) = \int_۰^x \frac{dx}{۱+x} \qquad (۲)$$

از طرفی
$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^۲ - x^۳ + x^۴ - \cdots$$

است بشرط آنکه $|x| < ۱$ باشد (شمارهٔ ۱۹۲) . این مقدار را در (۲) میگذاریم و از جمله به جملهٔ طرف راست انتگرال میگیریم ، نتیجهٔ مطلوب بدست میاید :

$$\ln(۱+x) = x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \cdots$$

این سری نیز به ازای $|x| < ۱$ متقارب است (تمرین ۲ ی شمارهٔ ۱۹۱ را ببینید) .

مثال ۲- بسط $\arcsin x$ را به سری تام با انتگرال گیری بدست آورید .

حل - چون $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ است ، پس:

$$arc\ sin\ x = \int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x^2 < 1) \qquad (2)$$

اگر در سری دو جمله‌ای [(۲) شمارهٔ ۱۹۲] بجای m ، $-\frac{1}{2}$ و بجای x ، $-x^2$ بگذاریم ، داریم :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^4 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^6 + \cdots$$

این سری به ازای $|x| < 1$ متقارب است . این مقدار را در (۲) میگذاریم و از جمله به جملهٔ آن انتگرال میگیریم ، داریم :

$$arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{x^7}{7} + \cdots$$

این سری نیز به ازای $|x| < 1$ متقارب است (تمرین ۸ شمارهٔ ۱۹۱ را ببینید) .

مقدار π را میتوان با سری اخیر بآسانی حساب کرد . چون این سری به ازای مقادیر x بین -1 و $+1$ متقارب است ، بجای x ، $\frac{1}{2}$ میگذاریم ، داریم :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$$

و از آنجا $\pi = ۳٫۱۴۱۵ \ldots$

روشن است که میتوان برای محاسبهٔ π از سری مذکور در تمرین ۶ شمارهٔ ۱۹۴ نیز استفاده کرد . اما سرعت تقارب این دو سری کم است . سریهای دیگری وجود دارند که میتوان بوسیلهٔ آنها مقدار تقریبی π را بآسانی تا عدهٔ زیادی از ارقام اعشاری حساب کرد .

مثال ۳- با استفاده از روش بسط به سری مقدار تقریبی $\int_{0}^{1} sin\ x^2 dx$ را حساب کنید .

حل - اگر x^2 را z فرض کنیم :

$$\sin z = z - \frac{z^{۳}}{۳!} + \frac{z^{۵}}{۵!} - \cdots$$

و از آنجا

$$\sin x^{۲} = x^{۲} - \frac{x^{٦}}{۳!} + \frac{x^{۱۰}}{۵!} + \cdots$$

و

$$\int_{۰}^{۱} \sin x^{۲} dx \# \int_{۰}^{۱} \left(x^{۲} - \frac{x^{٦}}{۳!} + \frac{x^{۱۰}}{۵!}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۷}}{٤۲} + \frac{x^{۱۱}}{۱۳۲۰}\right]_{۰}^{۱} = ۰٫۳۳۳۳ - ۰٫۰۲۳۸ + ۰٫۰۰۰۸$$

$$= ۰٫۳۱۰۳ \quad$$: جواب

تمرین

۱) بسط $arc\ tg\ x$ را با انتگرال گیری بدست آورید .

۲) بسط $ln\ (۱ - x)$ را با انتگرال گیری بدست آورید .

۳) بسط $sec^{۲}x$ را با مشتق گیری از سری $tg\ x$ بدست آورید .

٤) بسط $ln\ cos\ x$ را با انتگرال گیری از سری $tg\ x$ بدست آورید .

با استفاده از روش بسط به سری مقدار تقریبی انتگرالهای زیر را حساب کنید :

جواب

۵) $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \frac{\cos x\, dx}{۱ + x}$ ۰٫۳۹۱٤

٦) $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \frac{\sin x\, dx}{۱ - x}$ ۰٫۱۸۵

۷) $\int_{۰}^{\frac{۱}{۳}} e^{x} ln(۱ + x) dx$ ۰٫۰٦۲۸

جواب

۸) $\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۲}} \frac{e^{-x^۲}dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۰٫۴۸۱۵

۹) $\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۴}} \frac{ln\,(۱+x)dx}{cos\,x}$ ۰٫۰۲۹۵

۱۰) $\int_{\cdot}^{۱} e^{-x^۲}dx$ ۱۱) $\int_{\cdot}^{\frac{۱}{۹}} ln\,(۱+\sqrt{x}\,)dx$

۱۲) $\int_{\cdot}^{۱} e^{x} sin\sqrt{x}\;dx$ ۱۳) $\int_{\cdot}^{۱} \sqrt{۴-x^۳}\,dx$

۱۴) $\int_{\cdot}^{۱} e^{-x} cos\sqrt{x}\,dx$ ۱۵) $\int_{\cdot}^{۱} \sqrt{۲-sin\,x}\,dx$

۱۹۷- دستورهای تقریبی حاصل ازسری ماکلرن. - اگر از بسط یک‌تابع به سری‌تام عدهٔ محدودی‌از نخستین جملات را نگهداریم وبقیه را حذف کنیم ، یک دستور تقریبی که مقدارتابع را با دقت معینی میدهد ، بدست میاید. در ریاضیات عملی ازاین گونه دستورها استفادهٔ بسیار میشود .

مثلاً اگر سری دوجمله‌ای[(۲) شمارهٔ ۱۹۲] را درنظر بگیریم ، میتوانیم دستورهای تقریبی زیر را بنویسیم :

دستور تقریبی اول دستور تقریبی دوم

$$(۱+x)^m \quad \# \quad ۱+mx \quad \# \quad ۱+mx+\frac{۱}{۲}m(m-۱)x^۲$$

$$\frac{۱}{(۱+x)^m} \quad \# \quad ۱-mx \quad \# \quad ۱-mx+\frac{۱}{۲}m(m+۱)x^۲$$

دراین دو دستور $|x|$ کوچک و m مثبت فرض شده است .

به همین ترتیب اگر سری سینوس را در نظر بگیریم :

$$sin\,x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\cdots \qquad (۱)$$

تساویهای تقریبی $\quad \sin x \;\#\; x \quad$ (۲)

و $\quad \sin x \;\#\; x-\frac{x^3}{6} \quad$ (۳)

دو دستور تقریبی برای $\sin x$ است . اگر دستور (۲) را اختیار کنیم ، یعنی از سری (۱) تنها یک جمله نگهداریم ، مقدار ماندهٔ سری از $\frac{1}{6}x^3$ کمتر است (شمارهٔ ۱۸۸) ، پس

$$\sin x = x \quad \text{با} \quad |\text{خطا}| < \left|\frac{1}{6}x^3\right|$$

اکنون اگر بخواهیم دستور (۲) مقدار تقریبی $\sin x$ را تا سه رقم دقیق اعشار بدهد ، روشن است که باید

$$\left|\frac{1}{6}x^3\right| < 0.0005$$

یا

$$|x| < \sqrt[3]{0.003} < 0.1443 \ \text{رادیان}$$

باشد و میتوان گفت که اگر x بین -0.1443 و $+0.1443$ رادیان و یا بین -8.2° و $+8.2^\circ$ باشد ، دستور (۲) مقدار تقریبی $\sin x$ را تا سه رقم دقیق اعشار میدهد .

تمرین

۱) دقت دستور تقریبی $\sin x = x-\frac{x^3}{6}$ در هریک از حالات الف و ب و پ چقدر است ؟ الف : $x=30^\circ$ ، ب : $x=60^\circ$ ، پ : $x=90^\circ$

جواب : الف : $0.00033 >$ خطا ، ب : $0.01 >$ خطا ، پ : $0.08 >$ خطا

۲) دقت دستور تقریبی $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}$ در هریک از حالات الف و ب و پ چقدر است ؟ الف : $x=30^\circ$ ، ب : $x=60^\circ$ ، پ : $x=90^\circ$

جواب : الف : $0.0032 >$ خطا ، ب : $0.05 >$ خطا ، پ : $0.25 >$ خطا

۳) دقت دستور تقریبی $e^{-x} = 1-x$ درهریک ازحالات الف و ب چقدراست ؟

الف : $x=0.1$ ، ب : $x=0.5$

۴) دقت دستور تقریبی $arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3}$ در هریک از حالات الف و ب و پ چقدر است ؟ الف : $x = 0.1$ ، ب : $x = 0.5$ ، پ : $x = 1$

جواب : الف : ۰ر۰۰۰۰۰۲ > خطا ، ب : ۰ر۰۰۶ > خطا ، پ : ۰ر۲ > خطا

۵) ازسری $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ چند جمله بگیریم تا مقدار تقریبی $\sin 45^\circ$ تا پنج رقم اعشار بدست آید ؟ جواب : چهار جمله

۶) ازسری $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ چند جمله بگیریم تا مقدار تقریبی $\cos 60^\circ$ تا پنج رقم اعشار بدست آید ؟

۷) ازسری $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ چند جمله بگیریم تا مقدار تقریبی $\ln 1.2$ تا پنج رقم اعشار بدست آید ؟ جواب : شش جمله

درستی دستورهای تقریبی زیر را بیازمایید :

۸) $\frac{\sin x}{1-x} = x + x^2$

۹) $\frac{\cos x}{1-x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$

۱۰) $e^{-\theta}\cos\theta = 1 - \theta + \frac{\theta^3}{3}$

۱۱) $\int \cos\sqrt{x}\,dx = C + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}$

۱۲) $\int e^{-x^2}dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$

۱۳) $\int \ln(1-x)dx = C - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

۱۴) $\int arc\,\sin x\,dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

۱۰) $\int e^{\theta} \sin\theta \, d\theta = C + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}$

۱۹۸- سری تیلر .- اگر بسط تابعی به سری تام از x موجود و متقارب باشد و بخواهیم مقدار عددی تابع را به ازای مقدار **کوچکی** از x (مقدار نزدیک به صفر) بدست آوریم ، سری مذکور برای این کار بسیار مناسب است . اکنون به مطالعهٔ بسط دیگری از تابع که برحسب قوای صعودی $(x-a)$ است میپردازیم (شمارهٔ ۱۹۳ را ببینید) . سری‌اخیر برای محاسبهٔ مقدار تابع به ازای مقادیری از x که نزدیک به a هستند ، بسیار مناسب است .

فرض میکنیم تابع مورد نظر به صورت سری زیر در آمده است :

$$(1) \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + \cdots$$

ضرایب b_0 ، b_1 ، ... را مانند شمارهٔ ۱۹۴ بدست میاوریم. از دو طرف (۱) متوالیا مشتق میگیریم (فرض میکنیم که این کار ممکن است) ، داریم :

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2b_2 + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

در این معادلات بجای x ، a میگذاریم و از آنها b_0 و b_1 و b_2 و ... را پیدا میکنیم :

$$b_0 = f(a) \;,\; b_1 = f'(a) \;,\; b_2 = \frac{f''(a)}{2!} \;,\; \ldots \;,\; b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \;,\; \ldots$$

این مقادیر را در (۱) میگذاریم ، داریم :

$$(B) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots$$

این سری را **سری** یا **دستور تیلر** مینامند *.

اکنون (B) را دقیقتر مطالعه میکنیم . در دستور (G) ی شمارهٔ ۱۲۴ بجای b ، x میگذاریم ، داریم :

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R \qquad (۲)$$

و

$$R=f^{(n)}(x_1)\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad (a<x_1<x)$$

R را **ماندهٔ پس از جملهٔ n ام** مینامند .

طرف راست (۲) همان n جملهٔ اول سری تیلر است . اگر مجموع این n جمله را S_n بنامیم ، تساوی (۲) به صورت زیر در میاید :

$$f(x)=S_n+R \quad \text{یا} \quad f(x)-S_n=R$$

اکنون فرض میکنیم که به‌ازای مقدار معینی از x مانند x_0 ، وقتی n بسمت بینهایت میل میکند ، R بسمت صفر میل مینماید . دراین صورت

$$\lim_{n\to\infty} S_n=f(x_0) \qquad (۳)$$

است و سری (B) به ازای $x=x_0$ متقارب و مقدارآن برابر $f(x_0)$ است . لذا میتوان گفت که :

قضیه - سری (B) تنها به ازای مقادیری از x برابر f(x) است که به ازای آن مقادیر، با بینهایت شدن عدهٔ جملات ، ماندهٔ سری بسمت صفر میل کند.

اگر سری (B) به ازای مقادیری از x متقارب باشد اما به ازای آن مقادیر ماندهٔ سری ، با بینهایت شدن عدهٔ جملات ، بسمت صفر میل نکند ، سری (B) به ازای مقادیر مذکور برابر تابع f(x) نیست .

---

* این دستور را Brook Taylor (۱۷۳۱ - ۱۶۸۵) در اثرش به نام «Methodus Incrementorum» در لندن به سال ۱۷۱۵ منتشر ساخت .

. معمولاً تعیین فاصلهٔ تقارب سری آسانتر ازپیدا کردن فاصله‌ای است که درآن ماندهٔ سری بسمت صفر میل میکند . اما در حالات ساده هردو فاصله یکی است .

وقتی مقادیر یک تابع و مشتقهای متوالی آن به ازای مقدار معینی از متغیر مانند $x=a$ معین و محدود باشند ، سری (B) برای پیدا کردن مقدار تابع به ازای مقادیری از x که نزدیک به a هستند ، بکار میرود و بدین سبب (B) را **بسط** $f(x)$ **در مجاورت** $x=a$ مینامند .

مثال ۱ - $\ln x$ را برحسب قوای $(x-1)$ بسط دهید .

حل -

$$f(x)=\ln x \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \qquad f'''(1)=2$$

. . . .

این مقادیر را در (B) میگذاریم ، داریم :

جواب :
$$\ln x=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots$$

این سری که **بسط** $\ln x$ **درمجاورت** $x=1$ است، در فاصلهٔ $0 < x \leq 2$ متقارب است . مثال شمارهٔ ۱۹۲ را ببینید .

مثال ۲- نخستین چهار جملهٔ بسط $\cos x$ را برحسب قوای $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ پیدا کنید .

حل -

$$f(x)=\cos x \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x)=-\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad , \quad f''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$f'''(x) = \sin x \quad , \quad f'''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \qquad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$

بنابراین سری خواسته شده به صورت زیر است :

$$\cos x = \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\left(x - \frac{\pi}{٤}\right) - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}}{٢!} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٣}}{٣!} + \cdots$$

نتیجه را به این صورت نیز میتوان نوشت :

$$\cos x = ٠٫٧٠٧١١\left[١ - \left(x - \frac{\pi}{٤}\right) - \frac{١}{٢}\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} + \frac{١}{٦}\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٣} + \cdots\right]$$

برای آزمودن درستی این نتیجه ، $\cos ٥٠^\circ$ را حساب میکنیم. اندازهٔ $x - \frac{\pi}{٤} = ٥^\circ$ برحسب رادیان برابر ۰٫۰۸۷۲۷ و از آنجا :

$$\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٣} = ٠٫٠٠٠٦٦ \quad \text{و} \quad \left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} = ٠٫٠٠٧٦٢$$

است . این مقادیر را در سری اخیر میگذاریم ، $\cos ٥٠^\circ = ٠٫٦٤٢٧٨$ میشود. جدول پنج رقمی $\cos ٥٠^\circ = ٠٫٦٤٢٧٩$ میدهد .

۱۹۹- یك صورت دیگر از سری تیلر . - اگر در سری (B) ی شمارهٔ قبل بجای a ، x_0 وبجای $x-a$ ، h بگذاریم، $x=a+h=x_0+h$ میشود وداریم:

$$f(x_\circ+h)=f(x_\circ)+f'(x_\circ)\frac{h}{۱!}+f''(x_\circ)\frac{h^۲}{۲!}+\cdots+f^{(n)}(x_\circ)\frac{h^n}{n!}+\cdots \quad (C)$$

در سری (C) **مقدار جدید** $f(x)$ [یا به عبارت دیگر وقتی x از $x_\circ$ به $x_\circ+h$ میرود و $f(x_\circ+h)$ حاصل میگردد ،] به صورت یک سری تام از h ، یعنی به صورت یک سری تام از نمو x ، بسط داده شده است .

مثال - $\sin x$ را ، وقتی x از $x_\circ$ به $x_\circ+h$ میرود ، به صورت یک سری تام از h بسط دهید .

حل - دراین مثال $f(x)=\sin x$ و $f(x_\circ+h)=\sin(x_\circ+h)$ است وداریم :

$$f(x)=\sin x \quad , \quad f(x_\circ)=\sin x_\circ$$

$$f'(x)=\cos x \quad , \quad f'(x_\circ)=\cos x_\circ$$

$$f''(x)=-\sin x \quad , \quad f''(x_\circ)=-\sin x_\circ$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

این مقادیر را در (C) میگذاریم ، جواب بدست میاید :

$$\sin(x_\circ+h)=\sin x_\circ+\cos x_\circ\frac{h}{۱}-\sin x_\circ\frac{h^۲}{۲}-\cos x_\circ\frac{h^۳}{۶}+\cdots$$

تمرین

درستی بسطهای زیر را با استفاده از دستور تیلر بیازمایید :

۱) $e^x=e^a\left[۱+(x-a)+\frac{(x-a)^۲}{۲!}+\frac{(x-a)^۳}{۳!}+\cdots\right]$

۲) $\sin x=\sin a+(x-a)\cos a-\frac{(x-a)^۲}{۲!}\sin a-\frac{(x-a)^۳}{۳!}\cos a+\cdots$

۳) $\cos x = \cos a - (x-a)\sin a - \frac{(x-a)^۲}{۲!}\cos a + \frac{(x-a)^۳}{۳!}\sin a + \cdots$

٤) $\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^۲}{۲a^۲} + \frac{x^۳}{۳a^۳} + \cdots$

٥) $\cos(a+x) = \cos a - x\sin a - \frac{x^۲}{۲!}\cos a + \frac{x^۳}{۳!}\sin a + \cdots$

٦) $tg(x+h) = tg\,x + h\sec^۲ x + h^۲\sec^۲ x\, tg\,x + \cdots$

۷) $(x+h)^n = x^n + nx^{n-۱}h + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^{n-۲}h^۲$

$$+ \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{n-۳}h^۳ + \cdots$$

۸) نخستین چهار جملهٔ بسط $\sin x$ را برحسب قوای $\left(x - \frac{\pi}{٤}\right)$ پیدا کنید .

جواب :

$$\sin x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[۱ + \left(x-\frac{\pi}{٤}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^۲}{۲!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^۳}{۳!} + \cdots\right]$$

۹) نخستین سه جملهٔ بسط $tg\,x$ را برحسب قوای $\left(x - \frac{\pi}{٤}\right)$ پیدا کنید .

جواب : $tg\,x = ۱ + ۲\left(x-\frac{\pi}{٤}\right) + ۲\left(x-\frac{\pi}{٤}\right)^۲ + \cdots$

۱۰) نخستین چهار جملهٔ بسط $\ln x$ را برحسب قوای $(x-۲)$ پیدا کنید .

۱۱) نخستین پنج جملهٔ بسط e^x را برحسب قوای $(x-۱)$ پیدا کنید .

۱۲) نخستین چهار جملهٔ بسط $\sin\left(\frac{\pi}{٦} + x\right)$ را برحسب قوای x پیدا کنید .

۱۳) نخستین سه جملهٔ بسط $cotg\left(\frac{\pi}{٤} + x\right)$ را برحسب قوای x پیدا کنید .

۲۰۰- دستورهای تقریبی حاصل از سری تیلر . - اگر از سری (B) یا

(C) عدهٔ محدودی از جملات را نگهداریم و بقیه را حذف کنیم ، یک دستور تقریبی بدست میاید .

مثلاً اگر $f(x)=\sin x$ باشد ، به عنوان اولین دستور تقریبی داریم (تمرین ۲ ی شمارهٔ ۱۹۹ را ببینید) :

$$\sin x=\sin a+(x-a)\cos a \tag{۱}$$

اگر بخواهیم یک دستور تقریبی دیگر داشته باشیم ، کافی است سه جمله از سری را اختیار کنیم :

$$\sin x=\sin a+(x-a)\cos a-\frac{(x-a)^{۲}}{۲!}\sin a \tag{۲}$$

از تساوی (۱) نسبت زیر بدست میاید :

$$\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a \tag{۳}$$

چون $\cos a$ مقدار ثابتی است ، میتوان گفت که بطور تقریب :

در مجاورت a نمو سینوس متناسب با نمو زاویه است .

دستور (۳) **انترپلاسیون باروش قطعات متناسب** را نشان میدهد .

مثال ۱ - a برابر ۳۰° یا ۰٫۵۲۳۶ رادیان است. سینوس ۳۱° و ۳۲° درجه را با دستور تقریبی (۱) حساب کنید .

دراین مثال $\quad x-a=۱^\circ=۰٫۰۱۷۴۵$ رادیان

$$\sin ۳۱^\circ=\sin ۳۰^\circ+\cos ۳۰^\circ(۰٫۰۱۷۴۵)$$

$$=۰٫۵۰۰۰۰+۰٫۸۶۶۰\times۰٫۰۱۷۴۵$$

$$=۰٫۵۰۰۰۰+۰٫۰۱۵۱=۰٫۵۱۵۱$$

به همین ترتیب :

$$\sin ۳۲^\circ=\sin ۳۰^\circ+\cos ۳۰^\circ(۰٫۰۳۴۹۰)=۰٫۵۳۰۲$$

این مقادیر که بادستور (۱) حساب شده‌اند ، تنها تا سه رقم اعشار دقیقند. اگر دقت بیشتری لازم باشد ، باید دستور (۲) را بکار بست .

$$\sin ۳۱^\circ = \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ (۰٫۰۱۷۴۵) - \frac{\sin ۳۰^\circ}{۲} (۰٫۰۱۷۴۵)^۲$$

$$= ۰٫۵۰۰۰۰ + ۰٫۰۱۵۱۱ - ۰٫۰۰۰۰۸ =$$

$$= ۰٫۵۱۵۰۳$$

$$\sin ۳۲^\circ = \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ (۰٫۰۳۴۹۰) - \frac{\sin ۳۰^\circ}{۲} (۰٫۰۳۴۹۰)^۲$$

$$= ۰٫۵۰۰۰۰ + ۰٫۰۳۰۲۲ - ۰٫۰۰۰۳۰ =$$

$$= ۰٫۵۲۹۹۲$$

این جوابها تا چهار رقم اعشار دقیقند .

برای محاسبهٔ نمو $f(x)$ نیز (وقتی x از x_0 به x_0+h میرود) میتوان از سری (C) دستورهای تقریبی بدست آورد . اگر جملهٔ اول طرف راست را به طرف چپ ببریم ، داریم :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^۲}{۲!} + \cdots \qquad (۴)$$

طرف راست این تساوی نمو $f(x)$ را به صورت سری تامی از h ، یعنی از نمو x ، میدهد .

اولین دستور تقریبی که از (۴) حاصل میشود ، به صورت زیر است :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h \qquad (۵)$$

این دستور در شمارهٔ ۹۲ بکار رفته است. طرف چپ آن دیفرانسیل $f(x)$ به ازای $x = x_0$ و $\Delta x = h$ است .

به عنوان **دومین دستور تقریبی** داریم :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^۲}{۲} \qquad (۶)$$

مثال ۲ - مقدارتقریبی نمو $tg\,x$ را ، وقتی x از °۴۵ به °۴۶ میرود ، بادستورهای (۵) و (۶) حساب کنید .

حل - اگر در تمرین ۶ شمارهٔ ۱۹۹ بجای x ، x_0 بگذاریم ، داریم :

$$tg\,(x_0+h)=tg\,x_0+sec^2x_0h+sec^2x_0tg\,x_0h^2+\cdots$$

دراین مثال $x_0=45°$ ، $tg\,x_0=1$ ، $sec^2x_0=2$ و $h=1°=0{,}01745$ است .
اگر این مقادیر را در (۵) بگذاریم :

$$tg\,46°-tg\,45°=2(0{,}01745)=0{,}0349$$

و اگر در (۶) بگذاریم :

$$tg\,46°-tg\,45°=0{,}0349+2(0{,}01745)^2=0{,}0349+0{,}0006$$
$$=0{,}0355$$

از دستور تقریبی دوم $tg\,46°=1{,}0355$ بدست میاید که هرچهار رقم اعشار آن دقیق است .

تمرین

۱) درستی دستور تقریبی زیر را بیازمایید :

$$ln\,(10+x)=2{,}303+\frac{x}{10}$$

مقدار $ln\,(10+x)$ را به‌ازای (الف) $x=-0{,}5$ و (ب) $x=-1$ با دستور مذکور حساب کنید و نتیجه را با مقدار نظیر در جدول مقایسه نمایید .

جواب : (الف) با دستور ۲٫۲۵۳ ، از جدول ۲٫۲۵۱
(ب) با دستور ۲٫۲۰۳ ، از جدول ۲٫۱۹۷

۲) درستی دستور تقریبی زیر را بیازمایید :

$$sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0{,}5+0{,}8660\,x$$

$sin\ ۲۷$ و $sin\ ۳۳$ و $sin\ ۴۰$ را با این دستور حساب کنید و نتیجه‌ها را با مقادیر نظیر در جدول مقایسه نمایید .

۳) درستی دستور تقریبی زیر را بیازمایید :

$$tg\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)=۱+۲x+۲x^{۲}$$

$tg\ ۴۶^{\circ}$ و $tg\ ۵۰^{\circ}$ را بااین دستور حساب کنید و نتایج را با مقادیر نظیردرجدول مقایسه نمایید .

۴) درستی دستور تقریبی زیر را بیازمایید :

$$\cos x=\cos a-(x-a)\sin a$$

میدانیم

$$\cos ۳۰^{\circ}=\sin ۶۰^{\circ}=۰٫۸۶۶۰$$

$$\cos ۴۵^{\circ}=\sin ۴۵^{\circ}=۰٫۷۰۷۱$$

$$\cos ۶۰^{\circ}=\sin ۳۰^{\circ}=۰٫۵$$

$cos\ ۳۲^{\circ}$ و $cos\ ۴۷^{\circ}$ و $cos\ ۶۲^{\circ}$ را با دستور مذکور حساب کنید و نتایج را با مقادیر نظیر در جدول مقایسه نمایید .

تمرین اضافی

۱) انتگرال معین $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} x^{۰} ln\ (۱+x)dx$ داده شده است .

الف ـ مقدار این انتگرال را با روش بسط به سری تا چهار رقم دقیق اعشار حساب کنید .

جواب : ۰٫۰۰۰۹

ب ـ مقدار انتگرال مذکور را مستقیماً حساب کنید و نتیجه را باجواب تقریبی الف مقایسه نمایید .

پ ـ نشان دهید که اگر هنگام محاسبه n جمله از سری حفظ شود ، خطا از $\frac{۱}{۲^{n+۷}(n+۱)(n+۷)}$ کوچکتر است .

۲) تابع $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$ مفروض است .

الف ـ نشان دهید که $f^{(4)}(x)=-\frac{1}{4}f(x)$ است .

ب ـ شش جمله از بسط $f(x)$ را به سری ماکلرن پیدا کنید .

پ ـ درسری اخیر ضریب x^{12} چقدر است؟ جواب : $-\frac{1}{64\times 12!}$

فصل بیست و یکم

معادلات دیفرانسیل*

۲۰۱- معادلات دیفرانسیل - مرتبه و درجه . - معادله‌ای را که شامل مشتق یا دیفرانسیل باشد ، معادلهٔ دیفرانسیل مینامند . ما تاکنون مکرر به این نوع معادلات برخورده‌ایم. مثالهای شمارهٔ ۱۳۹ نمونه های ساده‌ای ازآن است. مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل (مثال ۱)

$$\frac{dy}{dx}=۲x \qquad (۱)$$

پس‌از انتگرال گیری ، تابع

$$y=x^{۲}+C \qquad (۲)$$

را میدهد . به همین ترتیب معادلهٔ دیفرانسیل (مثال ۲)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad (۳)$$

تابع ضمنی

$$x^{۲}+y^{۲}=۲C \qquad (۴)$$

را میدهد . معادلات (۱) و (۳) دو معادلهٔ دیفرانسیل **مرتبهٔ اول** و (۲) و (۴) بترتیب **جوابهای عمومی** آنها هستند .

اکنون معادلهٔ زیر را درنظر میگیریم :

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+y=۰ \qquad (۵)$$

این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل **مرتبهٔ دوم** است و آن را بدان سبب از مرتبهٔ دوم مینامیم که شامل مشتق مرتبهٔ دوم است .

---

* دراین فصل تنها چند نوع ساده از معادلات دیفرانسیل راکه درکتابهای مقدماتی مکانیک و فیزیک پیش میایند ، مطالعه میکنیم .

مرتبهٔ یك معادلهٔ دیفرانسیل عبارتست از مرتبهٔ مشتقی که در معادلهٔ مذکور موجود است وبزرگترین مرتبه را دارد.

اگردر یک معادلهٔ دیفرانسیل مشتقی که بزرگترین مرتبه را دارد از درجات مختلف باشد، بزرگترین درجهٔ آن، **درجهٔ** معادلهٔ دیفرانسیل است. بدین قرار معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''^{2}=(1+y'^{2})^{3} \qquad (6)$$

که در آن y' و y'' بترتیب مشتقهای مرتبهٔ اول و دوم y نسبت به x میباشند، ازدرجهٔ دوم و از مرتبهٔ دوم است.

۲۰۲ - جوابهای یك معادلهٔ دیفرانسیل - مقدارثابت انتگرال گیری. -

ترکیبی از متغیرها را که در یک معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند، یک **جواب** یا یک **انتگرال** آن معادله مینامند.

مثلاً

$$y=a\, sin\, x \qquad (1)$$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \qquad (2)$$

است. از (۱) دوبار مشتق میگیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\, sin\, x \qquad (3)$$

اگر مقادیر (۱) و (۳) را در (۲) بگذاریم، رابطهٔ (۲) برقرار میشود،

$$-a\, sin\, x+a\, sin\, x=0$$

و مقدار a هرچه باشد فرقی نمیکند. به همین طریق میتوان نشان داد که

$$y=b\, cos\, x \qquad (4)$$

نیز به ازای هرمقدار دلخواه b یک جواب معادلهٔ (۲) است. رابطهٔ

$$y=c_1 sin\, x+c_2 cos\, x \qquad (5)$$

جواب کلی‌تری از معادلهٔ (۲) است و اگر به c_1 و c_2 یک بار a و ۰ و یک بار ۰ و b بدهیم ، جوابهای (۱) و (۴) بدست میایند . بدین‌ترتیب (۱) و (۴) حالات خاصی از (۵) میباشند .

دومقدارثابت‌واختیاری c_1 و c_2 را که در(۵) موجودند ، مقادیر ثابت انتگرال گیری مینامند . اگر معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n ام باشد ، جوابی را که شامل n مقدار ثابت و اختیاری است ، **جواب عمومی** یا **انتگرال کامل** معادلهٔ مذکور مینامند* [در (۲)و (۵) ، $n=2$ است] .

اگر بجای مقادیر ثابت جواب عمومی مقادیر خاص و معینی بگذاریم ، یک **جواب خصوصی** بدست میاید. جواب خصوصی معمولاً بدین ترتیب بدست میاید که جواب عمومی را تحت شرایط اولیهٔ معینی قرار دهیم .

مثال - جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+y=0 \tag{1}$$

تابع $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ [رابطهٔ (۵) بالا را ببینید.]

است . آن جواب خصوصی معادله را که در شرایط زیر صدق میکند ، پیدا کنید :

(۲) وقتی $x=0$ است ، $y=2$ و $y'=-1$ است .

(۳) **حل** - از جواب عمومی $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

(۴) مشتق میگیریم ، داریم : $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$

مقادیر (۲) را در (۳) و (۴) میگذاریم ، $c_1=2$ و $c_2=-1$ میشود . این مقادیر را در (۳) میگذاریم ، جواب خصوصی مطلوب بدست میاید :

جواب : $y=2\cos x-\sin x$

اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل به صورت ترکیبی از چند انتگرال درآمده باشد ، ما آن معادله را حل شده میدانیم گرچه انتگرالهای اخیر قابل محاسبه نباشند .

* در کتابهای معادلات دیفرانسیل نشان میدهند که وقتی معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n ام است، جواب عمومی آن شامل n مقدار ثابت و اختیاری است .

۲۰۳- آزمایش درستی جواب معادلهٔ دیفرانسیل . - قبل‌ازآنکه به حل یک معادلهٔ دیفرانسیل بپردازیم ، راه آزمایش درستی جواب معادلهٔ دیفرانسیل را بیاموزیم .

مثال ۱- نشان دهید که

$$y = c_1 x \cos \ln x + c_2 x \sin \ln x + x \ln x \tag{1}$$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x \tag{2}$$

حل - از (۱) دو بار مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1)\sin \ln x + (c_2 + c_1)\cos \ln x + \ln x + 1 \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(c_2 + c_1)\frac{\sin \ln x}{x} + (c_2 - c_1)\frac{\cos \ln x}{x} + \frac{1}{x} \tag{4}$$

مقادیر (۱) و (۳) و (٤) را در (۲) میگذاریم ، می‌بینیم که اتحاد برقرار میشود .

مثال ۲- نشان دهید که

$$y^2 - 4x = 0 \tag{5}$$

یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$xy'^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

حل - از (٥) مشتق میگیریم :

$$yy' - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{2}{y}$$

مقدار y' را در (٦) میگذاریم و مختصر میکنیم ، رابطهٔ $4x - y^2 = 0$ که همان رابطهٔ (٥) است ، بدست میاید .

تمرین

درستی جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را بیازمایید :

جواب	معادلهٔ دیفرانسیل
$y=c_۱+۲x+c_۲x^۲$	۱) $\frac{d^۲y}{dx^۲}-\frac{۱}{x}\times\frac{dy}{dx}+\frac{۲}{x}=۰$
$V=\frac{c_۱}{r}+c_۲$	۲) $\frac{d^۲V}{dr^۲}+\frac{۲}{r}\times\frac{dV}{dr}=۰$
$s=c_۱e^{-۲t}+c_۲e^{۳t}$	۳) $\frac{d^۲s}{dt^۲}-\frac{ds}{dt}-٦s=۰$
$x=c_۱e^t+c_۲e^{-t}+c_۳e^{-۲t}$	٤) $\frac{d^۳x}{dt^۳}+۲\frac{d^۲x}{dt^۲}-\frac{dx}{dt}-۲x=۰$
$y=c(x-c)^۲$	٥) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^۳-٤xy\frac{dy}{dx}+۸y^۲=۰$
$xy=۲e^x-۳e^{-x}$	٦) $x\frac{d^۲y}{dx^۲}+۲\frac{dy}{dx}-xy=۰$
$s=c_۱\cos(۲t+c_۲)$	۷) $\frac{d^۲s}{dt^۲}+٤s=۰$
$x=e^{۳t}\cos ۲t+۳$	۸) $\frac{d^۲x}{dt^۲}-٦\frac{dx}{dt}+۱۳x=۳۹$
$y=ae^{\frac{x}{b}}-b$	۹) $y\frac{d^۲y}{dx^۲}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲+\frac{dy}{dx}=۰$
$\frac{x^۲}{c_۱}+\frac{y^۲}{c_۲}=۱$	۱۰) $xy\frac{d^۲y}{dx^۲}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲-y\frac{dy}{dx}=۰$
$u=\frac{c+v}{۱-cv}$	۱۱) $\frac{du}{dv}=\frac{۱+u^۲}{۱+v^۲}$
$s=۲\sin ۲t+\cos ۲t+۲t$	۱۲) $\frac{d^۲s}{dt^۲}+٤s=۸t$

۱۳) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=e^{2x}$ $\qquad y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}$

۱۴) $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=5\cos 2t$ $\qquad x=\cos 2t+2\cos 3t+3\sin 3t$

۱۵) $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=3\cos 3t$ $\qquad x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+\frac{1}{2}t\sin 3t$

۱۶) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ $\qquad \frac{1}{y^2}=x^2+1+ce^{x^2}$

۲۰۴- معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول . - این گونه معادلات‌را میتوان به‌صورت

$$\text{(A)} \qquad Mdx+Ndy=0$$

درآورد. M و N توابعی هستند از x و y . عادی‌ترین معادلات این دسته را میتوان به چهار نوع زیر تقسیم کرد :

نوع I- متغیرها از یکدیگر جدا میشوند . - اگر بتوانیم جملات یک معادلهٔ دیفرانسیل را طوری دسته‌بندی کنیم که به صورت

$$(1) \qquad f(x)dx+F(y)dy=0$$

درآید ودرآن $f(x)$ تابعی تنها از x و $F(y)$ تابعی تنها از y باشد ، به عبارت دیگر اگر **جدا کردن متغیرها** ممکن باشد ، جواب معادله با محاسبهٔ دو انتگرال بدست میاید . دراین حالت برای پیدا کردن جواب عمومی از (۱) انتگرال میگیریم ، داریم :

$$(2) \qquad \int f(x)dx+\int F(y)dy=c$$

c مقدار ثابت و دلخواهی است .

برای آنکه معادله‌ای را به صورت (۱) درآوریم ، به عبارت دیگر برای آنکه متغیرها را از یکدیگر جدا کنیم ، دستورالعمل زیر را بکار میبندیم :

عمل اول - مخرجها را از بین میبریم و اگر معادله شامل مشتق باشد ، دو طرف آن را در دیفرانسیل متغیر مستقل ضرب میکنیم .

عمل دوم - تمام جمله‌هایی را که شامل dx هستند باهم و تمام جمله‌هایی را که شامل dy هستند باهم جمع میکنیم. اگر معادلهٔ داده شده به صورت

$$XYdx+X'Y'dy=0$$

درآید و در آن X و X' توابعی تنها از x، و Y و Y' توابعی تنها از y باشند، دو طرف معادلهٔ اخیر را بر X'Y تقسیم میکنیم تا به صورت (۱) درآید.

عمل سوم - مانند (۲) انتگرال هرقسمت را جداگانه محاسبه میکنیم.

مثال ۱ - معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$$

حل - عمل اول - $(1+x^2)xy\,dy=(1+y^2)dx$

عمل دوم - $(1+y^2)dx-x(1+x^2)y\,dy=0$

برای جدا کردن متغیرها دوطرف معادلهٔ اخیر را بر $x(1+x^2)(1+y^2)$ تقسیم میکنیم:

$$\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{y\,dy}{1+y^2}=0$$

عمل سوم - $$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=C$$

(شمارهٔ ۱۶۷) $$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}-\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=C$$

$$\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=2\ln x-2C$$

این نتیجه را میتوان به صورت خلاصه‌تری نیز نوشت. برای این کار بجای $-2C$، $\ln c$ میگذاریم، یعنی مقدار ثابت دلخواه را به شکل جدیدی مینویسیم، جواب به‌صورت زیر در میاید:

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln x^2+\ln c$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln cx^2$$

جواب : $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$

مثال ۲ - معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}$$

حل - عمل اول - $ax\,dy+2ay\,dx=xy\,dy$

عمل دوم - $2ay\,dx+x(a-y)dy=0$

برای جدا کردن متغیرها دو طرف معادله را بر xy تقسیم میکنیم :

$$\frac{2a\,dx}{x}+\frac{(a-y)dy}{y}=0$$

عمل سوم - $2a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=C$

$$2a\ln x+a\ln y-y=C$$

$$a\ln x^2y=C+y$$

$$\ln x^2y=\frac{C}{a}+\frac{y}{a}$$

این تساوی را از صورت لگاریتمی به صورت نمایی درمیاوریم :

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}+\frac{y}{a}}$$

یا

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}}\cdot e^{\frac{y}{a}}$$

بجای مقدار ثابت $e^{\frac{C}{a}}$ ، c میگذاریم ، جواب به صورت زیر درمیاید :

جواب : $x^2 y = ce^{\frac{y}{a}}$

نوع II- معادلات همگن . ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (A)$$

را وقتی همگن نامند که M و N توابع همگنی از x و y باشند و درجهٔ آنها نیز یکی باشد * . این نوع معادلات دیفرانسیل را میتوان با تغییر متغیر

$$y = vx \qquad (۳)$$

حل کرد . تغییر متغیر مذکور معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به معادله‌ای تبدیل میکند که در آن متغیرها (x و v) از یکدیگر جدا میشوند .

از معادلهٔ (A) داریم :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \qquad (۴)$$

تغییر متغیر (۳) طرف چپ (۴) را به صورت

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \qquad (۵)$$

و طرف راست آن را به صورت تابعی از v درمیاورد و معادلهٔ (۴) به معادلهٔ

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v) \qquad (۶)$$

تبدیل میشود . در معادلهٔ اخیر متغیرهای x و v از یکدیگر جدا میشوند .

مثال ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$$

حل ـ $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$

* $f(x, y)$ را وقتی همگن نامند که $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ باشد . m درجهٔ f است .

دراین مثال $M=y^۲$ و $N=x^۲-xy$ است . بنابراین M و N توابع همگنی از درجهٔ دومند و میتوان نوشت :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^۲}{xy-x^۲}$$

تغییر متغیر $y=vx$ میدهیم ، معادلهٔ اخیر به صورت زیر درمیاید :

$$x\frac{dv}{dx}+v=-\frac{v^۲}{۱-v}$$

یا
$$v\,dx+x(۱-v)dv=۰$$

برای جدا کردن متغیرها معادله را بر vx تقسیم میکنیم :

$$\frac{dx}{x}+\frac{(۱-v)dv}{v}=۰$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{v}-\int dv=C$$

$$\ln x+\ln v-v=C$$

$$\ln vx=C+v$$

$$vx=e^{C+v}=e^C\times e^v$$

$$vx=ce^v$$

اما $v=\frac{y}{x}$ و لذا جواب عمومی معادله به صورت

$$y=ce^{\frac{y}{x}}$$

است .

تمرین

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۱) $(2+y)dx-(3-x)dy=0$	$(2+y)(3-x)=c$
۲) $xy\,dx-(1+x^2)dy=0$	$cy^2=1+x^2$
۳) $x(x+3)dy-y(2x+3)dx=0$	$y=cx(x+3)$
۴) $\sqrt{1+x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$	$\mathit{arc\,sin}\,y=\mathit{ln}\,c(x+\sqrt{1+x^2})$
۵) $d\rho+\rho\,\mathit{tg}\,\theta\,d\theta=0$	$\rho=c\,\mathit{cos}\,\theta$
۶) $(1-x)dy-y^2dx=0$	$y\,\mathit{ln}\,c(1-x)=1$
۷) $(x+2y)dx+(2x-3y)dy=0$	$x^2+4xy-3y^2=c$
۸) $(3x+5y)dx+(4x+6y)dy=0$	$(x+y)^2(x+2y)=c$
۹) $2(x+y)dx+y\,dy=0$	$\frac{1}{2}\,\mathit{ln}\,(2x^2+2xy+y^2)-\mathit{arc\,tg}\left(\frac{x+y}{x}\right)=c$
۱۰) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$	$(x+y)^2(2x+y)^3=c$
۱۱) $(2x+y)dx+(x+3y)dy=0$	$2x^2+2xy+3y^2=c$
۱۲) $\sqrt{1-4t^2}\,ds+2\sqrt{1-s^2}\,dt=0$	$s\sqrt{1-4t^2}+2t\sqrt{1-s^2}=c$
۱۳) $2z(3z+1)dw+(1-2w)dz=0$	$(2w-1)(1+3z)=3cz$
۱۴) $2x\,dz-2z\,dx=\sqrt{x^2+4z^2}\,dx$	$1+4cz-c^2x^2=0$
۱۵) $(x+4y)dx+2x\,dy=0$	$x^3+6x^2y=c$
۱۶) $(2x^2+y^2)dx+(2xy+3y^2)dy=0$	$2x^3+3xy^2+3y^3=c$
۱۷) $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}$	$u=\frac{v+c}{1-cv}$
۱۸) $(3+2y)x\,dx+(x^2-2)dy=0$	

۱۹) $۲(۱+y)dx-(۱-x)dy=۰$

۲۰) $(۱+y)x\,dx-(۱+x)y\,dy=۰$

۲۱) $(ax+b)dy-y^{۲}dx=۰$

۲۲) $(۳x+y)dx+(x+y)dy=۰$

۲۳) $xy(y+۲)dx-(y+۱)dy=۰$

۲٤) $(۱+x^{۲})dy-(۱-y^{۲})dx=۰$

۲۵) $(x-۲y)dx-(۲x+y)dy=۰$

۲٦) $(۳x+۲y)dx+x\,dy=۰$

۲۷) $۳(۵x+۳y)dx+(۱۱x+۵y)dy=۰$

۲۸) $(x^{۲}+y^{۲})dx+(۲xy+y^{۲})dy=۰$

۲۹) $۲y\,dx-(۲x-y)dy=۰$

در هریک از مسائل زیر آن جواب خصوصی را که درشرط مذکور صدق میکند ، پیدا کنید :

۳۰) $\frac{dx}{y}+\frac{٤\,dy}{x}=۰$ وقتی $x=٤$ است ، $y=۲$ است .

جواب : $x^{۲}+٤y^{۲}=۳۲$

۳۱) $(x^{۲}+y^{۲})dx=۲xy\,dy$ وقتی $x=۱$ است ، $y=۰$ است .

جواب : $y^{۲}=x^{۲}-x$

۳۲) $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,dx$ وقتی $x=\frac{۱}{۲}$ است ، $y=۰$ است .

جواب : $۱+٤y-٤x^{۲}=۰$

۳۳) $(۱+y^{۲})dy=y\,dx$ وقتی $x=۲$ است ، $y=۲$ است .

۳٤) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که ازنقطهٔ(۱ , ۲) میگذرد و شیب آن درهرنقطه

برابر $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$ است . جواب : $x^2+2xy=8$

۳۵) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که از نقطهٔ (۰ , ۱) میگذرد و شیب آن درهرنقطه برابر $\frac{y-1}{x^2+x}$ است . جواب : $y(1+x)=1-x$

نوع III– معادلات خطی . ـ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول به صورت

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{B}$$

است . P و Q توابعی از x یا مقادیری ثابتند .

به همین ترتیب معادلهٔ

$$\frac{dx}{dy}+Hx=J \tag{C}$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول است بشرط آنکه H و J توابعی از y یا مقادیری ثابت باشند .

برای حل (B) بجای y ، uz میگذاریم :

$$y=uz \tag{۷}$$

u و z توابعی هستند از x و باید آنها را طوری تعیین کنیم که y در معادلهٔ (B) صدق کند . از (۷) نسبت به x مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx} \tag{۸}$$

مقادیر (۸) و (۷) را در (B) میگذاریم ، داریم :

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+Puz=Q$$

یا

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)z=Q \tag{۹}$$

اکنون u را طوری تعیین میکنیم که

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0 \tag{۱۰}$$

شود . دراین معادله متغیرهای x و u از یکدیگر جدا میشوند . پس‌از پیدا کردن u ، z را از معادلهٔ

$$u\frac{dz}{dx} = Q \tag{۱۱}$$

بدست میاوریم . در معادلهٔ اخیر نیز متغیرهای x و z از یکدیگر جدا میشوند . روشن است که مقادیر u و z که به ترتیب مذکور بدست میایند ، در معادلهٔ (۹) صدق میکنند و $y=uz$ جواب (B) است . مثالهای زیر جزئیات مطلب را نشان میدهند .

مثال ۱ . ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}} \tag{۱۲}$$

حل ـ این معادله یک معادلهٔ خطی به صورت (B) است و در آن

$$P = -\frac{2}{x+1} \quad و \quad Q = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

است . بجای y ، uz میگذاریم و از آن نسبت به x مشتق میگیریم :

$$y = uz \quad => \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$$

این مقادیر را در (۱۲) میگذاریم ، داریم :

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

یا

$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x}\right)z = (x+1)^{\frac{5}{2}} \tag{۱۳}$$

برای تعیین u ضریب z را مساوی صفر قرار میدهیم :

$$\frac{du}{dx}-\frac{۲u}{۱+x}=۰$$

$$\frac{du}{u}=\frac{۲\,dx}{۱+x}$$

انتگرال میگیریم : $\quad ln\, u=۲ln\,(۱+x)=ln\,(۱+x)^{۲}$

و از آنجا : $\quad u=(۱+x)^{۲}$ * $\quad$ (۱٤)

اکنون اگر در معادلهٔ (۱۳) بجای u ، $(۱+x)^{۲}$ بگذاریم ، ضریب z صفر میشود و معادلهٔ (۱۳) به صورت

$$u\frac{dz}{dx}=(x+۱)^{\frac{۵}{۲}}$$

در میاید و چون $u=(۱+x)^{۲}$ است ، داریم :

$$\frac{dz}{dx}=(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$dz=(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx$$

انتگرال میگیریم : $\quad z=\frac{۲(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+C$ $\quad$ (۱۰)

مقادیر (۱۰) و (۱٤) را در $y=uz$ میگذاریم ، جواب عمومی بدست میاید :

جواب : $\quad y=\frac{۲(x+۱)^{\frac{۷}{۲}}}{۳}+C(x+۱)^{۲}$

مثال ۳- برای جواب عمومی (B) یک دستور پیدا کنید .

---

* برای آسانی مقدار ثابت انتگرال‌گیری را دراینجا صفر گرفته‌ایم . ممکن است آن را به صورت $u=c(۱+x)^{۲}$ بنویسیم . اما در عمل سرانجام c ازبین میرود (مثال ۲ را ببینید) .

حل - (۱۰) را حل میکنیم ، داریم :

$$\ln u + \int P\,dx = \ln k$$

$\ln k$ مقدار ثابت انتگرال گیری است ، بنابراین

$$u = ke^{-\int P\,dx}$$

میشود . مقدار u را در (۱۱) میگذاریم و متغیرهای z و x را از یکدیگر جدا میکنیم :

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int P\,dx}\,dx$$

از دو طرف تساوی اخیر انتگرال میگیریم و در (۷) میگذاریم ، داریم :

جواب : $$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C\right)$$

بدین ترتیب مقدار ثابت k سرانجام ازبین میرود وبدین سبب هنگام محاسبهٔ انتگرال (۱۰) معمولاً از مقدار ثابت صرف‌نظر میکنند .

نوع IV - معادلات قابل‌تبدیل به معادلات‌خطی . - بعضی از معادلات‌غیر خطی را میتوان با تغییر متغیر مناسبی به صورت خطی درآورد . یک نوع از این معادلات معادلهٔ برنولی * است :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \tag{D}$$

P و Q توابعی‌از x یا مقادیری‌ثابتند. معادلهٔ (D) را میتوان‌با تغییر متغیر $z = y^{-n+1}$ به صورت خطی (B) ، نوع III ، درآورد . اما اگر همان روش مذکور برای نوع III رابکار بریم ، تغییر متغیر اخیر لازم نیست. این مطلب‌را با ذکر یک مثال‌روشن میسازیم.

مثال - معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \ln x \cdot y^2 \tag{۱۶}$$

* Bernoulli

حل - این معادله به صورت (D) است و در آن

$$P=\frac{1}{x}\ ,\ Q=a\ln x\ ,\ n=2$$

است . بجای y ، uz میگذاریم :

$$y=uz \implies \frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$$

این مقادیر را در (۱۶) میگذاریم ، داریم :

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+\frac{uz}{x}=a\ln x\cdot u^2z^2$$

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}\right)z=a\ln x\cdot u^2z^2 \qquad (۱۷)$$

برای تعیین u ضریب z را مساوی صفر قرار میدهیم :

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$$

انتگرال میگیریم : $\ln u=-\ln x=\ln\frac{1}{x}$

$$u=\frac{1}{x} \qquad (۱۸)$$

چون جملهٔ شامل z ازبین میرود ، معادلهٔ (۱۷) به صورت زیر در میاید :

$$u\frac{dz}{dx}=a\ln x\cdot u^2z^2$$

$$\frac{dz}{dx}=a\ln x\cdot uz^2$$

بجای u مقدار آن را از تساوی (۱۸) میگذاریم :

$$\frac{dz}{dx}=a\,ln\,x\cdot\frac{z^2}{x}$$

$$\frac{dz}{z^2}=a\,ln\,x\cdot\frac{dx}{x}$$

انتگرال میگیریم :

$$-\frac{1}{z}=\frac{a(ln\,x)^2}{2}+C$$

$$z=-\frac{2}{a(ln\,x)^2+2C} \qquad (19)$$

مقادیر (۱۹) و (۱۸) را در $y=uz$ میگذاریم ، جواب عمومی بدست میاید :

$$y=-\frac{1}{x}\times\frac{2}{a(ln\,x)^2+2C}$$

یا جواب : $xy[a(ln\,x)^2+2C]+2=0$

تمرین

جواب عمومی هریک ازمعادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۱) $x\frac{dy}{dx}-2y=2x$	$y=cx^2-2x$
۲) $x\frac{dy}{dx}-2y=-x$	$y=x+cx^2$
۳) $\frac{dy}{dx}-2y=1-2x$	$y=x+ce^{2x}$
٤) $x\frac{dy}{dx}-3y=-2nx$	$y=nx+cx^3$
٥) $\frac{dy}{dx}-y=-2e^{-x}$	$y=e^{-x}+ce^{x}$

۶) $\frac{ds}{dt} - s\,cotg\,t = ۱ - (t+۲)cotg\,t$ $\qquad s = t + ۲ + c\,sin\,t$

۷) $\frac{dy}{dx} + \frac{۲y}{x} = ۲y^۲$ $\qquad cx^۲y + ۲xy - ۱ = ۰$

۸) $\frac{ds}{dt} + s\,tg\,t = ۲t + t^۲ tg\,t$ $\qquad s = t^۲ + c\,cos\,t$

۹) $x\frac{dy}{dx} - y = (x-۱)e^x$ $\qquad y = e^x + cx$

۱۰) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^۳$ $\qquad cx^۲y^۲ + ۲xy^۲ - ۱ =$

۱۱) $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{t} = cos\,t + \frac{sin\,t}{t}$ $\qquad s = sin\,t + \frac{c}{t}$

۱۲) $nx\frac{dy}{dx} + ۲y = xy^{n+۱}$ $\qquad cx^۲y^n + xy^n - ۱ = ۰$

۱۳) $\frac{ds}{dt} + s = cos\,t - sin\,t$ $\qquad s = cos\,t + ce^{-t}$

۱۴) $\frac{ds}{dt} - s\,cotg\,t = e^t(۱ - cotg\,t)$ $\qquad s = e^t + c\,sin\,t$

۱۵) $x\frac{dy}{dx} - ۲y + ۳x = ۰$ $\qquad$ ۱۶) $\frac{dy}{dx} + y = ۲ + ۲x$

۱۷) $x\frac{dy}{dx} + y = (۱+x)e^x$ $\qquad$ ۱۸) $\frac{dy}{dx} - y = ۱ - ۲x$

۱۹) $x\frac{dy}{dx} + y + x^۲y^۲ = ۰$ $\qquad$ ۲۰) $\frac{ds}{dt} - s\,cotg\,t + cosec\,t = ۰$

۲۱) $۲\frac{dy}{dx} + y = (x-۱)y^۳$ $\qquad$ ۲۲) $x\frac{dy}{dx} - y = x\,cos\,x - sin\,x$

۲۳) $n\frac{dy}{dx} - y + (x^۲ + ۲x)y^{n+۱} =$ $\qquad$ ۲۴) $\frac{ds}{dt} + s\,tg\,t = e^{-t}(tg\,t - ۱)$

در هریک از مسائل زیر آن جواب خصوصی را که در شرط مذکور صدق میکند ، پیدا کنید :

۲۵) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2e^x$ وقتی $x=1$ است ، $y=0$ است .

جواب : $y=x^2(e^x-e)$

۲۶) $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$ وقتی $x=1$ است ، $y=2$ است .

جواب : $y=\frac{x+1}{x^2}$

۲۷) $\frac{dy}{dx}+y\,tg\,x=cec\,x$ وقتی $x=0$ است ، $y=-1$ است .

جواب : $y=\sin x-\cos x$

۲۸) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ وقتی $x=0$ است ، $y=1$ است .

جواب : $2y=(x+1)^4+(x+1)^2$

۲۹) معادلهٔ خمی را پیدا کنید که از نقطهٔ $(0\,,\,1)$ میگذرد و شیب آن درهرنقطه برابر $\frac{2y+x+1}{x}$ است . جواب : $2y=3x^2-2x-1$

۳۰) معادلهٔ خمی‌را پیدا کنید که از نقطهٔ $(1\,,\,1)$ میگذرد و شیب آن در هرنقطه برابر $\frac{y^2 ln\,x-y}{x}$ است . جواب : $y(1+ln\,x)=1$

۲۰۵- دو نوع خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ بالاتر . - دراین شماره دو نوع از معادلات دیفرانسیل را مطالعه میکنیم . نوع اول به صورت

$$\frac{d^ny}{dx^n}=X \qquad (E)$$

است . X تابعی از x یا مقداری ثابت است .

برای حل این معادله ، نخست دو طرف آن را در dx ضرب میکنیم و سپس انتگرال میگیریم ، داریم :

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int\frac{d^n y}{dx^n}dx=\int X\,dx+c_1$$

این عمل‌را $n-1$ مرتبه تکرار میکنیم ، جواب عمومی که شامل n مقدار ثابت ودلخواه است ، بدست میاید .

مثال - معادلهٔ $\frac{d^3y}{dx^3}=xe^x$ را حل کنید .

حل - دو طرف معادله را در dx ضرب میکنیم و سپس انتگرال میگیریم :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int xe^x\,dx+C_1$$

یا

$$\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x-e^x+C_1$$

این عمل را تکرار میکنیم :

$$\frac{dy}{dx}=\int xe^x\,dx-\int e^x\,dx+\int C_1dx+C_2$$

یا

$$\frac{dy}{dx}=xe^x-2e^x+C_1x+C_2$$

$$y=\int xe^x\,dx-\int 2e^x\,dx+\int C_1x\,dx+\int C_2dx+C_3$$

$$=xe^x-3e^x+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$$

بنابراین : جواب : $y=xe^x-3e^x+c_1x^2+c_2x+c_3$

نوع دوم به صورت

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Y \qquad \text{(F)}$$

است . Y تابعی از y است .

این معادله را به صورت زیر مینویسیم :

$$dy'=Y\,dx$$

ودو طرف آن را در y' ضرب می‌کنیم :

$$y'dy'=Yy'dx$$

اما $y'dx=dy$ است و میتوانیم بنویسیم :

$$y'dy'=Ydy$$

درمعادلهٔاخیر متغیرهای y و y' از یکدیگرجدا شده‌اند ، ازدوطرف‌آن انتگرال میگیریم:

$$\frac{۱}{۲}y'^{۲}=\int Ydy+C_{۱}$$

طرف راست این معادله تابعی از y است . از دو طرف آن جذر میگیریم ، متغیرهای x و y را از یکدیگرجدا میکنیم و انتگرال میگیریم. مثال زیر این روش را روشن میسازد.

مثال ـ معادلهٔ $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+a^{۲}y=۰$ را حل کنید .

حل ـ دراین مثال $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=-a^{۲}y$ و لذا معادله از نوع (F) است .

دو طرف آن را در $y'dx$ ضرب میکنیم و به ترتیب زیر عمل مینماییم :

$$y'dy'=-a^{۲}y\,dy$$

انتگرال میگیریم :

$$\frac{۱}{۲}y'^{۲}=-\frac{۱}{۲}a^{۲}y^{۲}+C$$

علامت مثبت را اختیار میکنیم :

$$y'=\sqrt{۲C-a^{۲}y^{۲}}$$

بجای $۲C$ ، $C_{۱}$ میگذاریم :

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_{۱}-a^{۲}y^{۲}}$$

متغیرها را از یکدیگر جدا میکنیم :

$$\frac{dy}{\sqrt{C_{۱}-a^{۲}y^{۲}}}=dx$$

انتگرال میگیریم :

$$\frac{۱}{a}\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_{۱}}}=x+C_{۲}$$

یا

$$\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_{۱}}}=ax+aC_{۲}$$

یا

$$\frac{ay}{\sqrt{C_{۱}}}=\sin(ax+aC_{۲})$$
$$=\sin ax\cos aC_{۲}+\cos ax\sin aC_{۲}$$

یا $$y=\frac{\sqrt{C_1}}{a}\cos aC_2\cdot\sin ax+\frac{\sqrt{C_1}}{a}\sin aC_2\cdot\cos ax$$

بنابراین : جواب : $y=c_1\sin ax+c_2\cos ax$

تمرین

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۱) $\frac{d^2x}{dt^2}=t^2$	$x=\frac{t^4}{12}+c_1t+c_2$
۲) $\frac{d^2x}{dt^2}=x$	$x=c_1e^t+c_2e^{-t}$
۳) $\frac{d^2x}{dt^2}=4\sin 2t$	$x=-\sin 2t+c_1t+c_2$
٤) $\frac{d^2x}{dt^2}=e^{2t}$	$x=\frac{e^{2t}}{4}+c_1t+c_2$
٥) $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{(s+1)^3}$	$c_1(s+1)^2=(c_1t+c_2)^2+1$
٦) $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{as}}$	$3t=2a^{\frac{1}{4}}(s^{\frac{1}{2}}-2c_1)(s^{\frac{1}{2}}+c_1)^{\frac{1}{2}}+c_2$
۷) $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{a}{y^3}$	$c_1y^2=a+(c_1t+c_2)^2$
۸) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^2}{y^3}=0$	

$$\sqrt{c_1y^2+y}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left(\sqrt{c_1y}+\sqrt{1+c_1y}\right)=ac_1\sqrt{2}\,x+c_2$$

۹) از معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{k}{s^{2}}=0+\frac{d^{2}s}{dt^{2}}$ ، t را پیدا کنید درصورتی که میدانیم وقتی $t=0$ است ، $s=a$ و $\frac{ds}{dt}=0$ است .

جواب : $t=\sqrt{\frac{a}{2k}}\left\{\sqrt{as-s^{2}}+a\,arc\sin\sqrt{\frac{a-s}{a}}\right\}$

۱۰) $\frac{d^{3}y}{dx^{3}}=x+\sin x$

۱۱) $\frac{d^{2}s}{dt^{2}}=a\cos nt$

۱۲) $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=4y$

۲۰۶- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت .- این معادلات به صورت زیرند :

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+p\frac{dy}{dx}+qy=X$$

p و q مقادیری ثابت و X تابعی‌از x یا مقداری ثابت است. این معادلات در ریاضیات عملی اهمیت بسیار دارند . ما نخست به حل معادلهٔ

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \qquad (G)$$

که **معادلهٔ‌بدون‌طرف ثانی** نامیده میشود میپردازیم. برای آنکه یک جواب خصوصی (G) را پیدا کنیم ، مقدار ثابت r را طوری تعیین میکنیم که

$$y=e^{rx} \qquad (1)$$

در معادلهٔ (G) صدق کند . از (۱) دوبار مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=re^{rx} \quad , \quad \frac{d^{2}y}{dx^{2}}=r^{2}e^{rx} \qquad (2)$$

مقادیر (۱) و (۲) را در (G) میگذاریم و حاصل را بر e^{rx} تقسیم میکنیم ، داریم :

$$r^2+pr+q=0 \tag{3}$$

جوابهای این معادلهٔ درجهٔ دوم که معادلهٔ مفسر (G) نامیده میشود ، مقادیر مطلوب r است . اگر معادلهٔ (۳) دارای دو جواب متمایز r_1 و r_2 باشد ،

$$y=e^{r_1x} \quad \text{و} \quad y=e^{r_2x} \tag{4}$$

جوابهای خصوصی و متمایز (G) هستند و جواب عمومی آن

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x} \tag{5}$$

است . این جواب شامل دو مقدار ثابت و دلخواه است و در (G) صدق میکند .

مثال ۱ - معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0 \tag{6}$$

حل - معادلهٔ مفسر (۶)

$$r^2-2r-3=0 \tag{7}$$

و جوابهای معادلهٔ (۷) ، ۳ و ۱ — و بنابر (۵) ، جواب عمومی (۶)

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$$

است .

اگر مقدار y و مشتقهای آن را در (۶) بگذاریم ، اتحاد برقرار میشود و درستی جواب مذکور محقق میگردد .

وقتی **ریشه‌های (۳) موهومی** است ، نماهادر (۵) موهومی است . دراین‌حالت میتوان برای c_1 و c_2 دو عدد مختلط طوری انتخاب کرد که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل حقیقی باشد ، مثلاً اگر

$$r_1=a+ib \quad \text{و} \quad r_2=a-ib \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{8}$$

جوابهای موهومی و مزدوج معادلهٔ (۳) باشند ، داریم :

$$e^{r_1x}=e^{(a+ib)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx} \quad , \quad e^{r_2x}=e^{(a-ib)x}=e^{ax}\cdot e^{-ibx} \tag{9}$$

این مقادیر را در (۵) میگذاریم ، داریم :

$$y = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) \qquad (۱۰)$$

در جبر نشان میدهند که *

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx \quad , \quad e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

است . این مقادیر را در (۱۰) میگذاریم ، جواب عمومی به صورت زیر در میاید :

$$y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) \qquad (۱۱)$$

---

* چون $i = \sqrt{-1}$ ، $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$ ، ... است ، بسط تابع e^{ibx} به سری ماکلرن به صورت زیر در میاید :

$$e^{ibx} = 1 + ibx - \frac{b^2x^2}{2!} - i\frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^4x^4}{4!} + i\frac{b^5x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{(الف)}$$

بسط توابع $\cos bx$ و $\sin bx$ نیز به سری ماکلرن عبارتند از :

$$\cos bx = 1 - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^4x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin bx = bx - \frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^5x^5}{5!} - \cdots$$

پس بنابر شمارهٔ ۱۹۵

$$\cos bx + i \sin bx = 1 + ibx - \frac{b^2x^2}{2!} - i\frac{b^3x^3}{3!} + \frac{b^4x^4}{4!} + i\frac{b^5x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{(ب)}$$

طرفهای راست (الف) و (ب) یکی است و لذا

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

است . به همین طریق میتوان نشان داد که :

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

A و B دو مقدار ثابت و برابر

$$A=c_1+c_2 \quad و \quad B=(c_1-c_2)i$$

میباشند . پس کافی است برای c_1 و c_2 در (۵) دو مقدار زیر را بگیریم :

$$c_1=\frac{1}{2}(A-iB) \quad , \quad c_2=\frac{1}{2}(A+iB)$$

اگر در جواب عمومی (۱۱) به A و B نخست ۱ و ۰ وسپس ۰ و ۱ بدهیم ، دو جواب خصوصی و حقیقی معادلهٔ (G) بدست میایند :

$$y=e^{ax}\cos bx \quad و \quad y=e^{ax}\sin bx \qquad (12)$$

مثال ۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0 \qquad (13)$$

حل ـ معادلهٔ مفسراین معادله $r^2+k^2=0$ و جوابهای آن $r=\pm ik$ است.
اگر آنها را با (۸) مقایسه کنیم ، $a=0$ و $b=k$ و بنابر (۱۱) جواب عمومی معادلهٔ (۱۳) به صورت زیر است :

$$y=A\cos kx+B\sin kx$$

اگر مقدار y و مشتقهای آن را در (۱۳) بگذاریم ، رابطهٔ (۱۳) برقرار میشود و درستی جواب محقق میگردد . این روش را با روشی که برای حل همین مثال (تنها با اختلاف $k=a$) در شمارهٔ ۲۰۵ بکار رفته است ، مقایسه کنید .

یادآوری ـ اگر بجای A ، $C\cos\alpha$ وبجای B ، $C\sin\alpha$ بگذاریم ، صورت دیگری از جواب عمومی یعنی $y=C\cos(kx-\alpha)$ بدست میاید .

اگر معادلهٔ (۳) **دارای یك ریشهٔ حقیقی دوگانه** باشد ، $p^2=4q$ است و میتوان بجای q ، $\frac{p^2}{4}$ گذاشت و معادلهٔ (۳) را به صورت زیر درآورد :

$$r^2+pr+\frac{1}{4}p^2=(r+\frac{1}{2}p)^2=0 \qquad (14)$$

جواب‌دوگانهٔ معادلهٔ اخیر $r_1=r_2=-\frac{p}{2}$ است . دراین حالت

$$y=e^{r_1x} \quad \text{و} \quad y=xe^{r_1x} \tag{۱۵}$$

جوابهای خصوصی و متمایز (G) و

$$y=e^{r_1x}(c_1+c_2x) \tag{۱۶}$$

جواب عمومی آن است .

برای نشان دادن درستی این قضیه کافی است نشان دهیم که $y=xe^{r_1x}$ یک جواب (G) است . برای این کار مینویسیم :

$$y=xe^{r_1x} \quad , \quad \frac{dy}{dx}=e^{r_1x}(1+r_1x) \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{r_1x}(2r_1+r_1^2x) \tag{۱۷}$$

این مقادیر را در طرف چپ (G) میگذاریم و حاصل را بر e^{r_1x} تقسیم میکنیم ، داریم :

$$(r_1^2+pr_1+q)x+2r_1+p \tag{۱۸}$$

این مقدار صفر است‌زیرا r_1 در (۳) صدق میکند ومقدار آن $-\frac{p}{2}$ است .

مثال ۳- معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0 \tag{۱۹}$$

وسپس یک جواب خصوصی آن را پیدا کنید بطوریکه وقتی $t=0$ است ، $s=4$ و $\frac{ds}{dt}=-2$ باشد .

حل - معادلهٔ مفسر (۱۹)

$$r^2+2r+1=0 \quad \text{یا} \quad (r+1)^2=0$$

است و یک ریشهٔ دوگانهٔ $r_1=-1$ دارد . پس بنابر (۱۶) جواب عمومی معادله به صورت

$$s=e^{-t}(c_1+c_2t) \tag{۲۰}$$

است . برای پیدا کردن جواب خصوصی مطلوب باید مقادیر ثابت c_1 و c_2 را طوری

انتخاب کنیم که شرایط داده شده برقرار گردد .

اگر در جواب عمومی (۲۰) بجای t ، ۰ و بجای s ، ۴ بگذاریم ، $c_1=4$ میشود

و داریم :

$$s=e^{-t}(4+c_2 t) \qquad (21)$$

اکنون از (۲۱) نسبت به t مشتق میگیریم :

$$\frac{ds}{dt}=e^{-t}(c_2-4-c_2 t)$$

دراین معادله بجای t ، ۰ و بجای $\frac{ds}{dt}$ ، ۲- میگذاریم ، معادلهٔ $-2=c_2-4$ بدست میاید . بنابراین $c_2=2$ و جواب خصوصی مطلوب $s=e^{-t}(4+2t)$ است.

تمرین

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۱) $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$	$x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$
۲) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$
۳) $\frac{d^2s}{dt^2}-2\frac{ds}{dt}+s=0$	$s=c_1e^{t}+c_2te^{t}$
۴) $\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0$	$x=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$
۵) $\frac{d^2s}{dt^2}-4s=0$	$s=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$
۶) $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}=0$	$y=c_1+c_2e^{-4x}$

۷) $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+2s=0$ $s=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$

۸) $\frac{d^2s}{dt^2}-2\frac{ds}{dt}+5s=0$ $s=e^{t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$

۹) $\frac{d^2\theta}{dt^2}-5\frac{d\theta}{dt}+4\theta=0$ ۱۰) $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$

۱۱) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0$ ۱۲) $\frac{d^2s}{dt^2}+3s=0$

۱۳) $\frac{d^2s}{dt^2}-3s=0$ ۱۴) $\frac{d^2y}{dx^2}-n\frac{dy}{dx}=0$

۱۵) $\frac{d^2s}{dt^2}-6\frac{ds}{dt}+25s=0$ ۱۶) $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+10x=0$

در هریک از مسائل ۱۷ تا ۳۰ آن جواب خصوصی را که در شرایط مذکور صدق میکند ، پیدا کنید :

۱۷) $\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+2s=0$ وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=1$ است .

جواب : $s=e^{-t}-e^{-2t}$

۱۸) $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=a$ و $\frac{dx}{dt}=0$ است .

جواب : $x=a\cos nt$

۱۹) $\frac{d^2x}{dt^2}-n^2x=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=2$ و $\frac{dx}{dt}=0$ است .

جواب : $x=e^{nt}+e^{-nt}$

۲۰) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-8y=0$ وقتی $t=0$ است ، $y=0$ و $\frac{dy}{dt}=24$ است .

جواب : $y=4(e^{2t}-e^{-4t})$

۲۱) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-8\dfrac{ds}{dt}+16s=0$ وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\dfrac{ds}{dt}=1$ است .

جواب : $s=te^{4t}$

۲۲) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-a\dfrac{dx}{dt}=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=0$ و $\dfrac{dx}{dt}=a$ است .

جواب : $x=e^{at}-1$

۲۳) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+8\dfrac{ds}{dt}+25s=0$

وقتی $t=0$ است ، $s=4$ و $\dfrac{ds}{dt}=-16$ است .

جواب : $s=4e^{-4t}\cos 3t$

۲۴) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-6\dfrac{dx}{dt}+10x=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=1$ و $\dfrac{dx}{dt}=4$ است .

جواب : $x=e^{3t}(\cos t+\sin t)$

۲۵) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4s=0$ وقتی $t=0$ است ؛ $s=0$ و $\dfrac{ds}{dt}=4$ است .

۲۶) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4x=$ وقتی $t=0$ است ، $x=10$ و $\dfrac{dx}{dt}=0$ است .

۲۷) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}=0$ وقتی $t=0$ است ، $y=1$ و $\dfrac{dy}{dt}=2$ است .

۲۸) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=2$ و $\dfrac{dx}{dt}=5$ است .

۲۹) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+13x=0$ وقتی $t=0$ است ، $x=2$ و $\dfrac{dx}{dt}=4$ است .

۳۰) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4\dfrac{ds}{dt}+8s=0$ وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\dfrac{ds}{dt}=8$ است .

اکنون معادلهٔ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=X \qquad (H)$$

را درنظر میگیریم . این معادله را **معادلهٔ با طرف ثانی** مینامند و درآن p و q

مقادیری ثابت و X تابعی‌از متغیر مستقل x یا مقداری ثابت است. برای حل معادلهٔ (H) به ترتیب زیر عمل میکنیم :

عمل اول - معادلهٔ بدون طرف ثانی (G) را حل میکنیم وجواب عمومی

$$y=u \tag{۲۲}$$

را بدست میاوریم . u را تابع مکمل (H) مینامند .

عمل دوم - یك جواب خصوصی (H) مانند

$$y=v \tag{۲۳}$$

را «به طریقی» پیدا میکنیم .

عمل سوم - جوابهای مکمل و خصوصی (H) را بیکدیگر میفزاییم جواب عمومی (H) بدست میاید :

$$y=u+v \tag{۲۴}$$

عبارت اخیر جواب عمومی (H) است زیرا هم شامل دو مقدار ثابت و دلخواه است و هم در (H) صدق میکند .

برای پیدا کردن جواب خصوصی (۲۳) میتوان از دستورهای زیر استفاده کرد (شمارهٔ ۲۰۸ را نیز ببینید) . دراین دستورها تمام حروف ، جز x که متغیر مستقل است ، مقادیر ثابتی را نشان میدهند .

حالت کلی - وقتی $y=X$ جواب خصوصی (G) نیست ، بسته به آنکه X به چه صورت باشد ، v را به صورتی کم‌وبیش شبیه به آن درنظر میگیریم :

اگر $X=a+bx$ باشد ، v را به صورت $y=A+Bx$ میگیریم ،

اگر $X=ae^{bx}$ باشد ، v را به صورت $y=Ae^{bx}$ میگیریم ،

و اگر $X=a_1\cos bx+a_2\sin bx$ باشد ، v را به صورت $y=A_1\cos bx+A_2\sin bx$ میگیریم .

حالت خاص - وقتی $y=X$ یك جواب خصوصی (G) است ، v را به صورت حاصل‌ضرب x درصورت مذکور در بالا درنظر میگیریم .

سرانجام مقدار $y=v$ راکه به طریق بالا تعیین میشود در (H) میگذاریم ومقادیر ثابت A ، B ، A_1 و A_2 را طوری انتخاب میکنیم که رابطهٔ (H) برقرار گردد .

مثال ۴- معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2x \tag{۲۵}$$

حل - عمل اول - تابع مکمل u جواب معادلهٔ زیر است :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0 \tag{۲۶}$$

بنابر مثال ۱ همین شماره

$$y=u=c_1e^{3x}+c_2e^{-x} \tag{۲۷}$$

عمل دوم - چون $y=X=2x$ جواب خصوصی (۲۶) نیست ، جواب خصوصی (۲۵) را به صورت

$$y=v=A+Bx \tag{۲۸}$$

فرض میکنیم و آن را در (۲۵) میگذاریم و مختصر میکنیم :

$$-2B-3A-3Bx=2x \tag{۲۹}$$

اکنون ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم :

$$-2B-3A=0 \quad , \quad -3B=2$$

این دستگاه را حل میکنیم ، $A=\frac{4}{9}$ و $B=-\frac{2}{3}$ میشود . این مقادیر را در (۲۸) میگذاریم ، جواب خصوصی بدست میاید :

$$y=v=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x \tag{۳۰}$$

عمل سوم - (۲۷) و (۳۰) را بایکدیگر جمع میکنیم ، جواب عمومی حاصل میگردد :

جواب : $y=u+v=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x$

مثال ۵ - معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2e^{-x} \tag{۳۱}$$

حل - عمل اول - تابع مکمل این معادله عبارتست از

$$y=u=c_1e^{3x}+c_2e^{-x} \qquad (32)$$

عمل دوم - دراین معادله طرف ثانی ، $y=X=2e^{-x}$ ، یک جواب خصوصی (٢٦) است زیرا اگر در جواب عمومی (٣٢) بجای c_1 ، ٠ و بجای c_2 ، ٢ بگذاریم، طرف ثانی بدست میاید . بنابراین جواب خصوصی (٣١) را به صورت

$$y=v=Axe^{-x} \qquad (33)$$

درنظر میگیریم و از آن دو بار مشتق میگیریم :

$$\frac{dy}{dx}=Ae^{-x}(1-x) \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=Ae^{-x}(x-2) \qquad (34)$$

مقادیر (٣٣) و (٣٤) را در (٣١) میگذاریم ، داریم :

$$Ae^{-x}(x-2)-2Ae^{-x}(1-x)-3Axe^{-x}=2e^{-x} \qquad (35)$$

تساوی اخیر را مختصر میکنیم :

$$-4Ae^{-x}=2e^{-x} \implies A=-\frac{1}{2}$$

پس :

$$y=v=-\frac{1}{2}xe^{-x} \qquad (36)$$

عمل سوم - جواب عمومی معادلهٔ (٣١) مجموع (٣٢) و (٣٦) است :

جواب :

$$y=u+v=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$$

مثال ٦ - آن جواب خصوصی معادلهٔ

$$\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t \qquad (37)$$

را که درشرط زیر صدق میکند ، تعیین کنید : وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=2$ است .

حل - نخست جواب عمومی معادله را پیدا میکنیم .

عمل اول ـ معادلهٔ

$$\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0 \tag{38}$$

را حل میکنیم و تابع مکمل را پیدا مینماییم :

$$s=u=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t \tag{39}$$

عمل دوم ـ اگر بجای c_1 ، ۲ و بجای c_2 ، ۰ بگذاریم ، یک جواب خصوصی (۳۸) ، $s=2\cos 2t$ ، بدست میاید . این جواب خصوصی همان طرف راست معادلهٔ (۳۷) است ، بنابراین جواب خصوصی (۳۷) را به صورت

$$s=v=t(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t) \tag{40}$$

درنظر میگیریم و از آن دوبار مشتق میگیریم :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t-2t(A_1\sin 2t-A_2\cos 2t)\\ \frac{d^2s}{dt^2}&=-4A_1\sin 2t+4A_2\cos 2t-4t(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)\end{aligned}\right. \tag{41}$$

مقادیر (۴۰) و (۴۱) را در (۳۷) میگذاریم و مختصر میکنیم ، داریم :

$$-4A_1\sin 2t+4A_2\cos 2t=2\cos 2t \tag{42}$$

برای آنکه این معادله یک اتحاد باشد ، باید $A_1=0$ و $A_2=\frac{1}{2}$ باشد. این مقادیر را در (۴۰) میگذاریم ، جواب خصوصی مطلوب بدست میاید :

$$s=v=\frac{1}{2}\,t\sin 2t \tag{43}$$

عمل سوم ـ (۳۹)و(۴۳)را بایکدیگر جمع میکنیم ، جواب عمومی حاصل میگردد:

$$s=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{2}\,t\sin 2t \tag{44}$$

اکنون باید c_1 و c_2 را طوری تعیین کنیم که

وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=2$ باشد . (۴۵)

از (۴۴) مشتق میگیریم :

$$\frac{ds}{dt}=-2c_1 \sin 2t+2c_2 \cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+t\cos 2t \qquad (46)$$

شرایط داده شدهٔ (۴۵) را در (۴۴) و (۴۶) میگذاریم ، داریم :

$$0=c_1 \quad \text{و} \quad 2=2c_2$$

و از آنجا :

$$c_1=0 \quad \text{و} \quad c_2=1$$

این مقادیر را در (۴۴) میگذاریم ، جواب خصوصی مطلوب حاصل میگردد :

جواب :

$$s=\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t \qquad (47)$$

تمرین

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۱) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=at+b$	$x=c_1\cos t+c_2\sin t+at+b$
۲) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=ae^{bt}$	$x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{ae^{bt}}{b^2+1}$
۳) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=4\cos t$	$x=c_1\cos t+c_2\sin t+2t\sin t$
۴) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=4\sin 2t$	$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{4}{3}\sin 2t$
۵) $\frac{d^2s}{dt^2}-4s=at+b$	$s=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{4}(at+b)$

٦) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4s=2e^t$ $\qquad s=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\dfrac{2}{3}e^t$

٧) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4s=e^{2t}$ $\qquad s=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+\dfrac{1}{4}te^{2t}$

٨) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4s=2\cos 2t$ $\qquad s=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\dfrac{1}{4}\cos 2t$

٩) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=5x^2$ $\qquad y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

$$+\frac{5}{9}x^2-\frac{10}{81}$$

١٠) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=4t$ $\qquad x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+1-2t$

١١) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+x=8$ $\qquad x=c_1e^t+c_2te^t+8$

١٢) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-4\dfrac{ds}{dt}+3s=6e^{2t}$ $\qquad s=c_1e^t+c_2e^{3t}-6e^{2t}$

١٣) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+2s=8e^{2t}$ $\qquad s=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t)+\dfrac{4}{5}e^{2t}$

١٤) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+3x=4e^t$ $\qquad x=c_1e^t+c_2e^{3t}-2te^t$

١٥) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+5y=3\cos t$ $\qquad y=e^t(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$

$$+\frac{3}{5}\cos t-\frac{3}{10}\sin t$$

١٦) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+5y=3\sin 2t$ $\qquad y=e^t(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$

$$+\frac{12}{17}\cos 2t+\frac{3}{17}\sin 2t$$

۱۷) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 2t$

۱۸) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\sin 2t$

۱۹) $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 2 + e^t$

۲۰) $\frac{d^2z}{dt^2} - 4z = t - e^t$

۲۱) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = t^2 - 2$

۲۲) $4\frac{d^2s}{dt^2} + s = 5\cos\frac{t}{2}$

۲۳) $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 2\sin t$

۲٤) $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 4 - 8t$

۲٥) $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 25y = 5\cos 2t$

۲٦) $\frac{d^2s}{dt^2} + 6\frac{ds}{dt} + 10s = 5\sin 2t$

در هریک از مسائل ۲۷ تا ٤۰ آن جواب خصوصی را که در شرایط مذکور صدق میکند ، پیدا کنید :

۲۷) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = t + \frac{1}{2}$ وقتی $t=0$ است ، $s=\frac{1}{18}$ و $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{9}$ است .

جواب : $s=\frac{1}{9}t+\frac{1}{18}$

۲۸) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 9e^{3t}$ وقتی $t=0$ است ، $s=1$ و $\frac{ds}{dt}=\frac{3}{2}$ است .

جواب : $s=\frac{1}{2}(\cos 3t+e^{3t})$

۲۹) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 5\cos 2t$ وقتی $t=0$ است ، $s=1$ و $\frac{ds}{dt}=3$ است .

جواب : $s=\sin 3t+\cos 2t$

۳۰) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 3t$ وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=6$ است .

جواب : $s=2\sin 3t+\frac{1}{2}t\sin 3t$

۳۱) $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=2t+1$

وقتی $t=0$ است، $x=\frac{1}{3}$ و $\frac{dx}{dt}=-\frac{4}{9}$ است .

جواب : $x=\frac{1}{9}(e^{3t}+e^{-t}-6t+1)$

۳۲) $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+13x=39$

وقتی $t=0$ است، $x=4$ و $\frac{dx}{dt}=3$ است .

جواب : $x=e^{3t}\cos 2t+3$

۳۳) $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=4-3t$ وقتی $t=0$ است، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=0$ است .

۳۴) $\frac{d^2s}{dt^2}-9s=6t$ وقتی $t=0$ است، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=0$ است .

۳۵) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=2x$ وقتی $x=0$ است، $y=2$ و $\frac{dy}{dx}=0$ است .

۳۶) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=2\cos 2t$ وقتی $t=0$ است، $x=0$ و $\frac{dx}{dt}=2$ است .

۳۷) $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t$ وقتی $t=0$ است، $s=0$ و $\frac{ds}{dt}=2$ است .

۳۸) $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+2x=2\sin t$

وقتی $t=0$ است، $x=0$ و $\frac{dx}{dt}=0$ است .

٣٩) $\dfrac{d^{٢}y}{dx^{٢}} + ٥\dfrac{dy}{dx} + ٤y = ٢e^{x}$

وقتی $x=٠$ است، $y=١$ و $\dfrac{dy}{dx}=٠$ است.

٤٠) $\dfrac{d^{٢}y}{dx^{٢}} + ٤\dfrac{dy}{dx} + ٤y = ٤e^{٢x}$

وقتی $x=٠$ است، $y=٠$ و $\dfrac{dy}{dx}=٢$ است.

٢٠٧- موارد استعمال معادلات دیفرانسیل - قانون بهرهٔ مرکب. - یکی از موارد استعمال سادهٔ معادلات دیفرانسیل حل مسائلی است که در آنها نرخ تغییر تابع نسبت به متغیر (شمارهٔ ٥٠)، به ازای تمام مقادیر متغیر، متناسب با مقدارنظیرتابع است. دراین صورت اگر $y=f(x)$ باشد،

(١) $$\frac{dy}{dx}=ky \qquad (k=\text{مقدار ثابت})$$

است. این معادلهٔ دیفرانسیل از نوع I شمارهٔ ٢٠٤ است (متغیرها از هم جدا میشوند) و جواب آن به صورت

(٢) $$y=ce^{kx} \qquad (c=\text{مقدار ثابت و دلخواه})$$

است. پس تابع y یک تابع نمایی است (شمارهٔ ٦٢). بعکس اگر (٢) داده شده باشد، بآسانی میتوان دید (با مشتق گرفتن از آن) که y در معادلهٔ (١) صدق میکند. ارتباط معادلهٔ (١) با عنوان «قانون بهرهٔ مرکب» به سبب زیر است:

فرض کنیم:

(ریال) $y=$ مبلغی که با بهرهٔ مرکب به شخصی وام داده شده است،

(ریال) $i=$ بهرهٔ یک ریال در یک سال،

$\Delta t=$ مدت برحسب سال،

$\Delta y=$ بهرهٔ y ریال در مدت Δt.

بدین ترتیب $\Delta y=iy\Delta t$ و از آنجا

(٣) $$\frac{\Delta y}{\Delta t}=iy$$

است. معادلهٔ (۳) نشان میدهد که نرخ متوسط تغییر y (شمارهٔ ۵۰) در مدت Δt متناسب با y است. در معادلات تجارتی و بانکی، بهره در مواقع معین، مثلاً در پایان سال یا در پایان فصل یا . . . ، به سرمایه افزوده میشود. به عبارت دیگر تغییر y نسبت به t منفصل است. اما تغییراغلب پدیده‌های طبیعی‌را متصل فرض میکنند. پس اگربخواهیم در مطالعهٔ یک پدیدهٔ طبیعی معادلهٔ (۳) را بکار بریم، باید y را تابعی پیوسته، یعنی Δt را بینهایت کوچک، فرض کنیم. دراین صورت معادلهٔ (۳) به صورت

$$\frac{dy}{dt}=iy$$

درمیاید و نرخ تغییر y متناسب با y است. معادلهٔ اخیر همان معادلهٔ (۱) به ازای $k=i$ است.

در معادلهٔ (۱) میگویند تابع y برطبق قانون بهرهٔ مرکب تغییر میکند.

جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=ky+c \tag{۴}$$

که درآن k و c مقادیری ثابت و مخالف صفرند، مثال دیگری از آن است. اگر $c=ak$ بگذاریم، معادلهٔ (۴) به صورت زیر درمیاید:

$$\frac{d}{dx}(y+a)=k(y+a) \tag{۵}$$

این معادله نشان میدهد که تابع $y+a$ برطبق قانون بهرهٔ مرکب تغییر میکند. معادلهٔ دیفرانسیل (۴) یا (۵) از نوع I شمارهٔ ۲۰۴ و جواب آن به صورت زیر است:

$$y=ce^{kx}-a \tag{۶}$$

مثال ۱- تابع $y=f(x)$ برطبق قانون بهرهٔ مرکب تغییر میکند. نیز میدانیم که وقتی $x=۱$ است، $y=۴$ و وقتی $x=۲$ است، $y=۱۲$ است. $f(x)$ را پیدا کنید.

حل- بنابر (۱) داریم:

$$\frac{dy}{dx}=ky \tag{۷}$$

متغیرها را از یکدیگر جدا میکنیم و انتگرال میگیریم ، داریم :

$$ln\, y = kx + C$$

برای تعیین k و C مقادیر داده شدهٔ x و y را درمعادلهٔ اخیر میگذاریم :

$$ln\, ٤ = k + C \quad , \quad ln\, ١٢ = ٢k + C$$

این دستگاه را حل میکنیم :

$$k = ln\, ١٢ - ln\, ٤ = ln\, ٣ = ١٫٠٩٨٦ \quad , \quad C = ln\, ٤ - ln\, ٣ = ln\, \frac{٤}{٣}$$

بنابراین
$$ln\, y = ١٫٠٩٨٦x + ln\, \frac{٤}{٣}$$

و
$$y = \frac{٤}{٣} e^{١٫٠٩٨٦x} \quad : \text{جواب}$$

مثال ۲- رقیق کردن یك محلول - برای رقیق کردن یک محلول منظماً آب به آن میفزاییم ولی حجم محلول را ، درون ظرف ، مقدار ثابت v نگهمیداریم . اگر s مقدار ملح (یا اسید) موجود درظرف در لحظهٔ معین t_0 و x مقدار آبی باشد که تا آن لحظه در محلول ریخته شده است ، نشان دهید که نرخ کم شدن s ، نسبت به x ، متناسب با s تغییر میکند ، یعنی $\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}$ است .

حل - چون حجم محلول v ومقدار ملح موجود درمحلول s است ، مقدار ملح موجود در حجم u (از همان محلول) برابر $\frac{s}{v}u$ است . اگر به اندازهٔ حجم $\triangle x$ محلول ازظرف خارج کنیم ، مقدار ملحی که بدین ترتیب از ظرف خارج میشود برابر $\triangle x\, \frac{s}{v}$ است. بنابراین تغییری که در مقدار ملح موجود در ظرف حاصل میگردد ، برابر

$$\triangle s = -\frac{s}{v}\, \triangle x \qquad (٨)$$

است . برای ثابت نگهداشتن حجم ، به مقدار $\triangle x$ آب به محلول میفزاییم . از معادلهٔ

(۸) این نتیجه عاید میشود که نسبت مقدار ملح خارج شده از ظرف به حجم آب افزوده شده برابر

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = -\frac{s}{v}$$

است . وقتی $\Delta x \to 0$ ، نرخ آنی تغییر s نسبت به x یعنی

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v} \quad : \text{جواب}$$

بدست میاید . بنابراین s برطبق قانون بهرهٔ مرکب تغییر میکند .

تمرین

۱) نرخ تغییر تابع $y=f(x)$ نسبت به x برابر $\frac{y}{۳}$ و مقدار y به ازای $x=-۱$ برابر ۴ است . $f(x)$ را پیدا کنید . جواب : $y=۵{,}۵۸e^{\frac{x}{۳}}$

۲) نرخ تغییرتابع $y=f(x)$ نسبت‌به x برابر $y-۲$ و مقدار y به ازای $x=۰$ برابر ۸ است . $f(x)$ را پیدا کنید . جواب : $y=٦e^{-x}+۲$

۳) در مثال ۲ ، اگر v برابر ۱۰۰۰۰ لیتر باشد ، چقدر آب به محلول بیفزاییم تا ۵۰ درصد ملح خارج گردد ؟ جواب : ٦۹۳۱ لیتر

۴) **قانون نیوتن دربارهٔ سرد شدن اجسام** - وقتی فزونی حرارت یک جسم نسبت به هوای اطراف آن x درجه است ، سرعت کم شدن x متناسب با x است . اگر این فزونی حرارت نخست ۸۰ درجه و پس‌از یک دقیقه ۷۰ درجه باشد ، در پایان سومین دقیقه چقدر است ؟ پس‌از چند دقیقه از حرارت جسم ۲۰ درجه کاسته میشود ؟

۵) فشار جو (p) در هرنقطهٔ بالای سطح زمین تابعی از ارتفاع نقطه (h) نسبت به سطح دریاست وبرطبق قانون بهرهٔ مرکب‌تغییر میکند . فرض کنیم وقتی $h=۰$ است ، p مساوی ۱۵ پاوند براینچ مربع و وقتی h برابر ۱۰۰۰۰ فوت است ، p مساوی ۱۰ پاوند براینچ مربع‌است. مقدار فشار را (الف) وقتی ارتفاع نقطه ۵۰۰۰ فوت‌است،و

(ب) وقتی ارتفاع نقطه ۱۰۰۰۰ فوت است ، پیدا کنید .

جواب : (الف) ۲ر۱۲ پاوند ، (ب) ۱۵ر۸ پاوند

۶) بنابر تعریف سرعت یک فعل وانفعال شیمیایی که در آن x وزن مادهٔ تغییرشکل یافته در زمان t است ، همان نرخ تغییر x نسبت به t است .

فعل وانفعال مرتبهٔ اول - چون نرخ تغییر غلظت یک محلول در هرلحظه متناسب با غلظت آن محلول در آن لحظه است ، داریم :

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$$

[یادآور میشویم که $a-x$ (غلظت) برطبق قانون بهرهٔ مرکب تغییر میکند .]

نشان دهید که k ، ضریب ثابت سرعت ، برابر $\frac{۱}{t}\ln\frac{a}{a-x}$ است .

۷) در تبدیل (انورسیون *) شکر خام سرعت تبدیل متناسب است با مقدار ماندهٔ شکر خام . اگر ۱۰۰۰ کیلوگرم شکر خام پس‌از ۱۰ ساعت به ۸۰۰ کیلوگرم کاهش یابد ، پس‌از ۲۴ ساعت چقدر شکر خام باقی میماند ؟ جواب : ۵۸۶ کیلوگرم

۸) اختلاف پتانسیل دو انتهای یک مدار الکتریکی E ولت ، شدت جریان آن i (آمپر) ، مقاومت مدار R (اهم) و ضریب القای آن L است . بین کمیتهای مذکور رابطهٔ زیر برقرار است :

$$E=Ri+L\frac{di}{dt} \Longrightarrow \frac{di}{dt}=\frac{۱}{L}(E-Ri)$$

بنابراین تعیین شدت جریان نیز به حل معادلهٔ (۴) که در آن E ، R و L مقادیری ثابتند ، منجرمیشود. اکنون اگر $L=۶۴۰$ ، $R=۲۵۰$ ، $E=۵۰۰$ ، ودرلحظهٔ $t=۰$ ، $i=۰$ باشد ، نشان دهید که وقتی t زیاد میشود ، شدت جریان بسمت ۲ آمپر میل میکند . i در چند ثانیه به ۹۰ درصد این ماکزیمم میرسد ؟ جواب : ۹ر۰ ثانیه

۹) در تخلیهٔ یک خازن سرعت تغییر ولتاژ e متناسب با e است و e تابعی نزولی

---

* Inversion

برحسب زمان است. اگر $k=\frac{1}{40}$ باشد، مدت زمانی که در آن e تا ۱۰ درصد مقدار اولی خود پایین میاید، چقدر است؟ جواب: ۹۲ ثانیه

۱۰) مطالعهٔ مسئلهٔ **غلیظ کردن یك محلول** با افزودن ملح (یا اسید)، بشرط آنکه حجم محلول ثابت بماند، منجر به حل معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{v}(v-y)$ میشود. دراین معادله v حجم ثابت، y مقدار ملح (یا اسید) موجود درظرف در لحظهٔ معین t_0 و x مقدار ملح (یا اسیدی) است که از شروع آزمایش تا لحظهٔ t_0 به محلول افزوده شده است. معادلهٔ مذکور را بدست آورید و با مثال ۲ ی بالا مقایسه کنید.

۲۰۸- موارد استعمال معادلات دیفرانسیل در حل مسائل مکانیك. -

بسیاری از مسائل مهم مکانیک و فیزیک با روشهای مذکور در این فصل حل میشوند. مثلاً حل مسائل حرکت مستقیم اغلب به حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول یا دوم منجر میگردد.

قبل از آنکه چند مثال بیاوریم، یادآور میشویم (شمارههای ۵۱ و ۵۹) که:

$$v=\frac{ds}{dt} \quad , \quad a=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{ds} \qquad (1)$$

v و a بترتیب سرعت و شتاب در لحظهٔ معین t و s فاصلهٔ نقطهٔ متحرك در لحظهٔ t از مبدأ ثابت واقع بر مسیر است.

مثال ۱- درحرکت مستقیمی شتاب درهرلحظه متناسب با عکس مجذور فاصله است و وقتی $s=2$ است، شتاب برابر -1 است. پس:

$$\text{شتاب}=a=-\frac{4}{s^2} \qquad (2)$$

و نیز در لحظهٔ $t=0$، $v=5$ و $s=8$ است.

الف: وقتی $s=24$ است، v چقدر است؟

حل- با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{4}{s^2} \qquad (3)$$

دو طرف این معادله را در ds ضرب میکنیم و سپس انتگرال میگیریم :

$$\frac{v^{۲}}{۲}=\frac{٤}{s}+C \quad => \quad v^{۲}=\frac{۸}{s}+C' \qquad (٤)$$

ازمعادلهٔسمت راست(٤) با توجه به شرایط $v=٥$ ، $s=۸$ ، مقدار $C'=۲٤$ بدست میاید و معادلهٔ (٤) به معادلهٔ

$$v^{۲}=\frac{۸}{s}+۲٤ \qquad (٥)$$

تبدیل میشود وازاین معادله به ازای $s=۲٤$ ، $v=\frac{۱}{۳}\sqrt{۲۱۹}=٤٫۹۳$ حاصل میگردد .

ب : نقطهٔ متحرك مذكور فاصلهٔ از $s=۸$ تا $s=۲٤$ را در چه مدت سیپیماید ؟

حل - از معادلهٔ (٥) مقدار v را پیدا میکنیم :

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{۸}\,\frac{\sqrt{s+۳s^{۲}}}{s} \qquad (٦)$$

متغیرهای s و t را از یکدیگر جدا مینماییم و مقدار t را بین دو حد $s=۸$ و $s=۲٤$ حساب میکنیم ، مدت زمان مطلوب بدست میاید :

جواب :
$$t=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\int_{۸}^{۲٤}\frac{s\,ds}{\sqrt{s+۳s^{۲}}}=۳٫۲۳ \qquad (۷)$$

یادداشت - اگر در (۲) بجای a صورت اول (۱) را بگذاریم ، معادلهٔ

$$\frac{d^{۲}s}{dt^{۲}}=-\frac{٤}{s^{۲}}$$

که همان معادلهٔ (F) شمارهٔ ۲۰٥ است ، حاصل میگردد . روش حل این معادله همان روش مذکور در شمارهٔ ۲۰۹ است .

یک نوع مهم از حرکت مستقیم حرکتی است که در آن شتاب و فاصلهٔ نقطهٔ متحرك متناسب و مختلف‌العلامه اند . دراین صورت معادلهٔ حرکت را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$a=-k^2 s \tag{8}$$

$-k^2$ مقدار شتاب در نقطهٔ به طول واحد است .

چون سوی شتاب و سوی نیروی مولد آن یکی است ، در حالت مذکور سوی نیرو همواره بسمت نقطهٔ $s=0$ ، یعنی بسمت مبدأ ، و مقدار آن متناسب با فاصلهٔ s است . این حرکت را **حرکت نوسانی ساده*** مینامند .

با درنظرگرفتن (۱) تساوی (۸) به صورت

$$\frac{d^2 s}{dt^2}+k^2 s=0 \tag{9}$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت است ، در میاید . جواب عمومی آن (مثال ۲ ی شمارهٔ ۲۰۶ را ببینید) عبارتست از

$$s=c_1 \cos kt+c_2 \sin kt \tag{10}$$

از (۱۰) نسبت به t مشتق میگیریم :

$$v=k(-c_1 \sin kt+c_2 \cos kt) \tag{11}$$

باسانی میتوان دید که معادلهٔ (۱۰) معادلهٔ یک حرکت نوسانی متناوب است و در آن طول دو انتهای نوسان $s=b$ و $s=-b$ و

$$b=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \quad \text{و} \quad \text{مدت یک نوسان کامل}=\frac{2\pi}{k} \tag{12}$$

است . اگر درمعادلهٔ (۱۰) بجای مقادیر ثابت c_1 و c_2 دو مقدار

$$c_1=b \sin A \quad \text{و} \quad c_2=b \cos A \tag{13}$$

را که شامل دو مقدار ثابت و دلخواه b و A میباشند ، قرار دهیم ، معادلهٔ (۱۰) به صورت

$$s=b \sin (kt+A) \tag{14}$$

* Simple harmonic vibration

درمیابد و صحت مطالب مذکور روشن میگردد .

در مثالهای زیر چند حرکت نوسانی ساده که تحت‌تأثیر نیروهای دیگری نیز قرار دارند ، مطالعه شده‌اند. درتمام‌این‌حالات حل مسئله منجر به حل یک معادلهٔ‌دیفرانسیل از نوع (G) یا (H) میشود .

مثال ۲- در حرکت مستقیمی

$$a=-\frac{5}{4}s-v \qquad (15)$$

است و وقتی $t=0$ است ، $v=2$ و $s=0$ است .

الف - معادلهٔ حرکت را (به صورت : s تابعی از t) پیدا کنید .

حل - بنابر روابط (۱) و با توجه به تساوی (۱۵) داریم :

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ds}{dt}+\frac{5}{4}s=0 \qquad (16)$$

این معادله به صورت (G) ومعادلهٔ مفسر آن $r^2+r+\frac{5}{4}=0$ است . ریشه‌های معادلهٔ اخیر

$$r_1=-\frac{1}{2}+i \quad \text{و} \quad r_2=-\frac{1}{2}-i$$

و از آنجا جواب عمومی (۱۶) عبارت از

$$s=e^{-\frac{t}{2}}(c_1\cos t+c_2\sin t) \qquad (17)$$

است . اگر شرط $t=0 \leftarrow s=0$ را در (۱۷) بگذاریم ، $c_1=0$ و

$$s=c_2c^{-\frac{t}{2}}\sin t \qquad (18)$$

میشود . برای پیدا کردن v از (۱۸) مشتق میگیریم :

$$v=c_2c^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sin t+\cos t\right) \qquad (19)$$

دراین معادله بجای t ، ۰ و بجای v ، ۲ میگذاریم ، $c_۲=۲$ میشود و (۱۸) به صورت زیر درمیاید :

$$s=۲e^{-\frac{t}{۲}}\sin t \qquad (۲۰)$$

ب ـ به ازای چه مقادیری از t سرعت صفر است ؟

حل ـ هنگامی $v=۰$ است که عبارت داخل پرانتز طرف راست (۱۹) صفر باشد. اگر آن را مساوی صفر قرار دهیم ، داریم :

$$tg\, t=۲ \qquad (۲۱)$$

سرعت به ازای تمام جوابهای (۲۱) صفر است . این مقادیر عبارتند از

$$t=۱٫۱۰+n\pi \qquad (۲۲)$$ (n عدد صحیح)

اختلاف دو مقدار متوالی از (۲۲) فاصلهٔ ثابت π است .

بحث ـ این مثال **حرکت نوسانی کاهنده** * را نشان میدهد . در (۱۵) شتاب برابر مجموع دو مؤلفهٔ زیر است :

$$a_۱=-\frac{۵}{۴}s \quad , \quad a_۲=-v \qquad (۲۳)$$

دراینجا حرکت نوسانی سادهٔ نظیر به مؤلفهٔ $a_۱$ تحت‌تأثیر **نیروی کاهنده‌ای** ** باشتاب $a_۲$ ، یعنی تحت‌تأثیر نیرویی متناسب با سرعت ودرجهت عکس حرکت ، قرارگرفته است. این نیروی کاهنده دو اثر دارد :

نخست آنکه نیروی کاهنده فاصلهٔ زمانی بین دومکان متوالی نقطهٔ متحرك را ، که درآنها $v=۰$ است ، زیادتر میکند . درحرکت نوسانی ساده

$$a_۱=-\frac{۵}{۴}s \qquad (۲۴)$$

---

* Damped harmonic vibration درکتابهای مکانیك آقایان پرفسور فاطمی و دکتر جناب این حرکت حرکت نوسانی‌میرا نامیده شده است .

** Damping force

است . با مقایسه با (۸) ، $k=\frac{\sqrt{5}}{2}=1.12$ و نیمهٔ مدت یک تناوب کامل بنابر (۱۲) ، 0.89π است. درصورتی که در حرکت نوسانی کاهنده ، چنانکه دیدیم ، نیمهٔ مدت یک تناوب کامل π است .

دوم آنکه مقادیر s دردو مکان متوالی نقطهٔ متحرك ، که درآنها $v=0$ است ، مقدار ثابتی نیست بلکه به صورت یک تصاعد هندسی نزولی است . از اثبات این مطلب صرف‌نظر میکنیم ⁂

مثال ۳- در حرکت مستقیمی

$$a=-4s+2\cos 2t \tag{۲۵}$$

است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=2$ است .

الف - معادلهٔ حرکت را پیدا کنید .

حل - بنابر روابط (۱) و با توجه به تساوی (۲۵) داریم :

$$\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t \tag{۲۶}$$

جواب خصوصی این معادله را در مثال ۶ شمارهٔ ۲۰۶ پیدا کرده‌ایم [تساوی (۴۷) صفحهٔ ۶۶۵] :

جواب :
$$s=\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t \tag{۲۷}$$

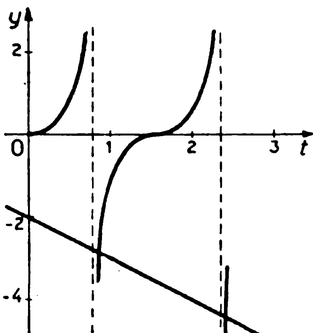
ب - به ازای چه مقادیری از t سرعت صفر است ؟

حل - برای پیدا کردن v از (۲۷) مشتق میگیریم و حاصل را مساوی صفر قرار میدهیم :

$$(2+t)\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t=0 \tag{۲۸}$$

دو طرف (۲۸) را بر $\cos 2t$ تقسیم میکنیم :

$$\frac{1}{2}\,tg\, 2t+2+t=0 \tag{۲۹}$$



شکل ۱۷۸

جوابهای این معادله را میتوان به طریقی که درشمارههای ۸۷ تا ۸۹ ذکر شده است ، بدست آورد . شکل ۱۷۸ خمهای نمایش دو تابع

$$y = \frac{۱}{۲} tg\, ۲t \quad و \quad y = -۲ - t \tag{۳۰}$$

را نشان میدهد (شمارهٔ ۸۸ را ببینید) . طول نقاط تقاطع تقریباً عبارتند از

جواب : $t = ۰{,}۸۸ \quad , \quad ۲{,}۳۶ \; , \; \ldots$

بحث - این مثال حرکت نوسانی فزاینده * رانشان میدهد . در (۲۵) شتاب برابر مجموع دو مؤلفهٔ زیر است :

$$a_۱ = -٤s \quad , \quad a_۲ = ۲\cos ۲t \tag{۳۱}$$

دراینجا حرکت نوسانی سادهٔ نظیر به مؤلفهٔ $a_۱$ با مدت تناوب π تحت‌تأثیر نیرویی با شتاب $a_۲$ **قرارگرفته** است . نیروی اخیر نیرویی متناوب و مدت تناوب آن π یعنی همان مدت **تناوب** حرکت نوسانی ساده است و برآن دو اثر دارد :

نخست آنکه سبب میشود تا فاصلهٔ زمانی بین دو مکان متوالی نقطهٔ متحرك ، که درآنها $v = ۰$ است ، ثابت نماند ، بلکه کاهش یابد و بسمت $\frac{\pi}{۲}$ میل کند(اینمطلب **از**شکل ۱۷۸ پیداست) .

دوم آنکه مقادیر s در دومکان متوالی نقطهٔ متحرك ، که درآنها $v = ۰$ است ، بزرگ میشود و قدرمطلق آن بسمت بینهایت میل میکند .

تمرین

در هریک از مسائل زیر شتاب و دو شرط اولیه داده شده است ، معادلهٔ حرکت را پیدا کنید :

---

* Forced harmonic vibration در کتاب مکانیك آقای دکتر جناب این حرکت حرکت نوسانی زوری نامیده شده است .

۱) $a=-k^{2}s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=v_{0}$ است .

جواب : $s=\frac{v_{0}}{k}\sin kt$

۲) $a=-k^{2}s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=s_{0}$ و $v=0$ است .

جواب : $s=s_{0}\cos kt$

۳) $a=-k^{2}s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=s_{0}$ و $v=v_{0}$ است .

۴) $a=6-s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=0$ است .

جواب : $s=6(1-\cos t)$

۵) $a=\sin 2t-s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=0$ است .

جواب : $s=\frac{2}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t$

۶) $a=2\cos t-s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=2$ و $v=0$ است .

جواب : $s=2\cos t+t\sin t$

۷) $a=-2v-2s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=3$ و $v=-3$ است .

جواب : $s=3e^{-t}\cos t$

۸) $a=-k^{2}s+b$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=0$ است .

۹) $a=-nv$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=n$ است .

۱۰) $a=8t-4s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=4$ است .

۱۱) $a=4\sin t-4s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=0$ است .

۱۲) $a=2\sin 2t-4s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=0$ و $v=0$ است .

۱۳) $a=-2v-5s$ است و وقتی $t=0$ است ، $s=1$ و $v=1$ است .

۱۴) در حرکتی $a=8-4s$ است و وقتی $t=0$ است ، $v=0$ و $s=0$ است . نشان دهید که این حرکت یک حرکت نوسانی ساده به مرکز $s=2$ ، با دامنهٔ ۲ و با مدت تناوب π است .

۱۵) شتاب یک نقطهٔ مادی برابر است با

$$a=\text{۵}\cos \text{۲}t-\text{۹}s$$

الف ـ درصورتی که این نقطه از حالت سکون و از مبدأ مختصات شروع به حرکت کرده باشد ، معادلهٔ حرکت آن چیست ؟ جواب : $s=\cos \text{۲}t-\cos \text{۳}t$

دورترین فاصله‌ای از مبدأ که نقطه به آن میرسد چقدر است ؟

ب ـ اگر نقطهٔ مذکور با سرعت $v=\text{۶}$ از مبدأ مختصات حرکت کند ، معادلهٔ حرکت آن چیست ؟ جواب : $s=\cos \text{۲}t+\text{۲}\sin \text{۳}t-\cos \text{۳}t$

دورترین فاصله‌ای از مبدأ که نقطه به آن میرسد چقدر است ؟

۱۶) مسئلهٔ قبل را ، وقتی شتاب نقطه $a=\text{۳}\cos \text{۳}t-\text{۹}s$ است ، حل کنید .

جواب : (الف) $s=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}t\sin \text{۳}t$ ، (ب) $s=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}t\sin \text{۳}t+\text{۲}\sin \text{۳}t$

۱۷) جسمی از حالت سکون رها میشود و تنها تحت‌تأثیر نیروی ثقل و مقاومت ضعیفی متناسب با سرعت قرار دارد . ثابت کنید که :

$$a=g-kv$$

$$v=\frac{g}{k}(\text{۱}-e^{-kt})$$

$$s=\frac{g}{k^{\text{۲}}}(kt+e^{-kt}-\text{۱})$$

$$ks+v+\frac{g}{k}\ln\left(\text{۱}-\frac{kv}{g}\right)=\text{۰}$$

۱۸) جسمی که از حالت سکون رها میشود و شتاب آن $a=\text{۹٫۸}-v$ است ، مسافت ۲۴٫۵ متر را درچه مدت میپیماید ؟ جواب : ۳٫۴۷ ثانیه

۱۹) یک کشتی در آب ساکنی در حرکت است و نیرویی که در هرلحظه متناسب با سرعت آن است ، سبب کندی حرکت آن میشود . نشان دهید که t ثانیه پس‌از خاموش شدن موتور ، سرعت کشتی با دستور $v=ce^{-kt}$ تعیین میشود . c سرعت کشتی درلحظهٔ خاموش شدن موتور است .

۲۰) سرعت یک کشتی که در آب ساکنی در حرکت است ، در لحظهٔ t_0 ، ۵ کیلومتر در ساعت و یک دقیقه پس‌از آن ۲٫۰ کیلومتر در ساعت است . مسافت پیموده شده دراین یک دقیقه چقدر است ؟

۲۱) معادلهٔ حرکت عقربهٔ یک گالوانومتر در شرایط معینی عبارتست از

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\mu\frac{d\theta}{dt}+k^2\theta=0$$

نشان‌دهید که اگر $\mu > k$ باشد ، عقربهٔ گالوانومترازنقطهٔ صفر نمیگذرد . جواب عمومی را ، درحالتی که $\mu < k$ است ، پیدا کنید .

۲۰۹- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ام با ضرایب ثابت . - معادلهٔ دیفرانسیل

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_ny=0$$

راکه درآن p_1 ، p_2 ، ... ، p_n مقادیری ثابتند ، یک معادلهٔ خطی بدون طرف ثانی مینامند .

برای بدست آوردن جواب آن بجای y ، e^{rx} میگذاریم . طرف چپ معادلهٔ (I) به صورت

$$(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n)e^{rx}$$

درمیاید . این مقدار به ازای تمام مقادیر r که در معادلهٔ

$$(1) \qquad r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n=0$$

صدق میکنند ، صفرمیشود . بنابراین e^{rx} ، بشرط آنکه r یکی از جوابهای معادلهٔ (۱) باشد ، یک جواب خصوصی (I) است . معادلهٔ (۱) را **معادلهٔ مفسر** (I) مینامند . می‌بینیم که ضرایب عددی معادلات (۱) و (I) باهم برابرند و نماها در (۱) همان مرتبهٔ مشتقها در (I) است .

ریشه‌های معادلهٔ مفسرجوابهای خصوصی (I) را بدست میدهند و اگر نتایج مذکور درشمارهٔ ۲۰۶ را به مرتبه‌های بالاتر از ۲ تعمیم‌دهیم ، جواب عمومی (I) حاصل میگردد .

برای مطالعهٔ این مطالب به کتابهای مفصلتر حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید .

دستورالعمل برای حل معادلهٔ (I)

عمل اول - معادلهٔ مفسر معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را مینویسیم :

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_n = 0 \qquad (1)$$

عمل دوم - معادلهٔ (۱) را بطور کامل حل میکنیم .

عمل سوم - جوابهای خصوصی نظیر به ریشه‌های معادلهٔ مفسر را به ترتیب زیر مینویسیم :

الف - معادلهٔ دیفرانسیل (I) به ازای هرریشهٔ حقیقی و متمایز مانند r_1 یك جواب خصوصی به صورت $e^{r_1 x}$ دارد .

ب - معادلهٔ دیفرانسیل (I) به ازای هرریشهٔ مزدوج و متمایز $a \pm ib$ دو جواب خصوصی به صورت $e^{ax} \cos bx$ و $e^{ax} \sin bx$ دارد .

پ - معادلهٔ دیفرانسیل (I) به ازای هرریشهٔ (یا هردوریشهٔ مزدوج) s گانه ، s(یا $2s$)جواب خصوصی داردکه ازحاصلضرب جواب خصوصی الف (یا از حاصلضرب دو جواب خصوصی ب) در 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{s-1} بدست میایند .

عمل چهارم - هریك ازاین n جواب* خصوصی مستقل را دریك مقدار ثابت و دلخواه ضرب میکنیم ، حاصلضربها را بیکدیگر میفزاییم ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (I) بدست میاید .

مثال ۱ - معادلهٔ $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ را حل کنید .

حل - دستورالعمل بالا را بکار میبندیم .

عمل اول - معادلهٔ مفسر معادلهٔ داده شده $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$ است .

عمل دوم - ریشه‌های معادلهٔ اخیر را پیدا میکنیم : -1 ، 2 ، 2 .

عمل سوم - الف - ریشهٔ -1 جواب e^{-x} را میدهد .

---

* یک شرط لازم برای درستی عملیات آن است که سه عمل اول و دوم و سوم درست n جواب مستقل بدهند .

پ ـ ریشهٔ دوگانهٔ ۲ دو جواب e^{2x} و xe^{2x} را میدهد .

عمل چهارم ـ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است :

جواب : $$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}$$

مثال ۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+5y=0$$

حل ـ دستورالعمل بالا را بکار میبندیم :

عمل اول ـ معادلهٔ مفسر معادلهٔ دیفرانسیل داده شده

$r^4-4r^3+10r^2-12r+5=0$ است .

عمل دوم ـ ریشه‌های معادلهٔ اخیر را پیدا میکنیم : ۱ ، ۱ ، $1\pm 2i$

عمل سوم ـ ب ـ ریشه‌های موهومی $1\pm 2i$ جوابهای زیر را میدهند :

$$e^x\cos 2x \quad , \quad e^x\sin 2x \qquad (a=1 \;,\; b=2)$$

پ ـ ریشهٔ دوگانهٔ ۱ دو جواب e^x و xe^x را میدهد .

عمل چهارم ـ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است :

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$$

یا جواب : $$y=(c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x)e^x$$

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_ny=X \qquad (J)$$

را که در آن p_1 ، p_2 ، ... ، p_n مقادیری ثابت و X تابعی از x یا مقداری ثابت است ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با طرف ثانی مینامند. این معادله را میتوان با روشی شبیه به آنچه در شمارهٔ ۲۰۶ برای حل معادلهٔ (H) بیان شده است ، حل کرد . بدین منظور باید سه عمل مذکور در صفحهٔ ۶۶۱ را انجام داد . پس اول معادلهٔ (I) را حل میکنیم و جواب عمومی (I) یعنی

$$y=u \qquad (2)$$

را پیدا مینماییم . u را تابع مکمل (J) مینامند .
سپس یک جواب خصوصی (J) مانند

$$y=v \tag{۳}$$

را «به طریقی» بدست میاوریم . جواب عمومی (J) مجموع دو جواب مذکور است :

$$y=u+v \tag{۴}$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی (۳) میتوان از آنچه در صفحهٔ ۶۶۱ برای حل معادلهٔ مرتبهٔ دوم ذکر شده است، الهام گرفت. دستورالعمل زیر کلی است وهمیشه بکار میرود.

دستورالعمل برای پیدا کردن یک جواب خصوصی (J)

عمل اول - از معادلهٔ داده شدهٔ (J) متوالیاً مشتق میگیریم تا مستقیماً و یا با حذف، معادلهٔ دیفرانسیلی از نوع (I) و از مرتبه‌ای بالاتر از مرتبهٔ (J) بدست آید .

عمل دوم - معادلهٔ دیفرانسیل اخیر را با دستورالعمل صفحهٔ ۶۸۴ حل میکنیم و جواب عمومی آن را به صورت

$$y=u+v$$

مینویسیم . u تابع مکمل (J) است که آن را قبلاً پیدا کرده‌ایم * و v مجموع جمله های اضافی است که بدست آمده‌اند .

عمل سوم - برای تعیین مقادیر ثابت انتگرال گیری در جواب خصوصی v ، v و مشتقهای آن را در (J) میگذاریم ، در اتحاد حاصل ضرایب جملات مشابه را مساوی قرار میدهیم ، مقادیر ثابت انتگرال گیری را حساب میکنیم و در

$$y=u+v$$

میگذاریم ، جواب عمومی (J) بدست میاید .

اکنون این روش را با ذکر یک مثال روشن میسازیم .

یادداشت - حل معادلهٔ مفسر معادلهٔ دیفرانسیل جدید را میتوان با توجه به این نکته که طرف چپ آن به طرف چپ معادلهٔ مفسر (I) قابل قسمت است . آسان ساخت .

مثال - معادلهٔ زیر را حل کنید :

---

* چون معادلهٔ دیفرانسیل جدید با مشتق‌گیری و حذف از معادلهٔ (J) بدست میاید ، روشن است که هرجواب (J) یک جواب معادلهٔ جدید نیز میباشد .

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \tag{5}$$

حل - نخست تابع مکمل u را پیدا میکنیم ، یعنی معادلهٔ

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{6}$$

را حل مینماییم . جواب آن عبارتست از

$$y = u = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \tag{7}$$

عمل اول - از (۵) مشتق میگیریم :

$$y''' - 3y'' + 2y' = xe^x + e^x \tag{8}$$

(۵) را از (۸) کم میکنیم :

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x \tag{9}$$

از (۹) مشتق میگیریم :

$$y^{iv} - 4y''' + 5y'' - 2y' = e^x \tag{10}$$

(۹) را از (۱۰) کم میکنیم :

$$y^{iv} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0 \tag{11}$$

این معادله از نوع (I) است .

عمل دوم - معادلهٔ (۱۱) را حل میکنیم . معادلهٔ مفسر آن عبارتست از :

$$r^4 - 5r^3 + 9r^2 - 7r + 2 = 0 \tag{12}$$

طرف چپ این معادله به $r^2 - 3r + 2$ که طرف چپ معادلهٔ مفسر (۶) است ، قابل قسمت است و (۱۲) را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$(r^2 - 3r + 2)(r-1)^2 = 0 \tag{13}$$

بنابراین ریشه‌های (۱۲) ، ۱ ، ۱ ، ۱ و ۲ است و جواب عمومی معادلهٔ (۱۱) به صورت زیر است :

$$y = c_1 e^{2x} + e^x (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) \tag{14}$$

عمل سوم - (۷) و (۱۴) را مقایسه میکنیم ؛ تابع مکمل را کنار میگذاریم ، مجموع جمله های اضافی بدست میاید :

$$y = v = e^x (c_3 x + c_4 x^2) \qquad (15)$$

تابع اخیر به ازای مقادیر مناسبی از c_3 و c_4 یک جواب خصوصی معادلهٔ (۵) است .
از (۱۵) دوبار مشتق میگیریم :

$$y' = e^x [c_3 + (c_3 + 2c_4)x + c_4 x^2] \qquad (16)$$

$$y'' = e^x [2(c_3 + c_4) + (c_3 + 4c_4)x + c_4 x^2]$$

مقادیر (۱۵) و (۱۶) را در (۵) میگذاریم ، دو طرف را بر e^x تقسیم میکنیم و نتیجه را مختصر مینماییم ، داریم :

$$2c_4 - c_3 + 2c_4 x = x \qquad (17)$$

ضرایب قوای مساوی x را مساوی قرار میدهیم ، $-2c_4 = 1$ و $2c_4 - c_3 = 0$ و
ازآنجا $c_3 = -1$ و $c_4 = -\frac{1}{2}$ بدست میایند . این مقادیر را در (۱۵) میگذاریم، جواب خصوصی معادلهٔ (۵) پیدا میشود :

$$y = v = e^x \left(-x - \frac{1}{2} x^2\right) \qquad (18)$$

بنابراین جواب عمومی (۵) به صورت زیر درمیاید :

$$y = u + v = c_1 e^{2x} + c_2 e^x - e^x \left(x + \frac{1}{2} x^2\right)$$

تمرین

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

جواب	معادلهٔ دیفرانسیل
$y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$	۱) $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = 0$
$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$	۲) $\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۳) $\dfrac{d^5y}{dx^5}-\dfrac{dy}{dx}=0$	$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+c_4\cos x+c_5\sin x$
۴) $\dfrac{d^4s}{dt^4}+3\dfrac{d^2s}{dt^2}-4s=0$	$s=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t$
۵) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\dfrac{d^3y}{dx^3}+9\dfrac{d^2y}{dx^2}-9\dfrac{dy}{dx}=0$	$y=c_1+c_2e^x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$
۶) $\dfrac{d^4s}{dt^4}+8\dfrac{d^2s}{dt^2}+16s=0$	$s=(c_1+c_2t)\cos 2t+(c_3+c_4t)\sin 2t$
۷) $\dfrac{d^3x}{dt^3}+6\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}+8x=0$	$x=e^{-2t}(c_1+c_2t+c_3t^2)$
۸) $\dfrac{d^4s}{dt^4}-s=t^3+3t$	$s=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t-t^3-3t$
۹) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-4\dfrac{dy}{dx}=2x^2$	$y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{4}x$
۱۰) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\dfrac{d^2y}{dx^2}=4x$	$y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}-\dfrac{2}{3}x^3$
۱۱) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=xe^{3x}$	$y=c_1e^x+c_2e^{2x}-\dfrac{3}{4}e^{3x}+\dfrac{1}{2}xe^{3x}$
۱۲) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-9\dfrac{ds}{dt}+20s=t^2e^{3t}$	$s=c_1e^{4t}+c_2e^{5t}+\dfrac{e^{3t}(7+6t+2t^2)}{4}$

معادلهٔ دیفرانسیل — جواب

۱۳) $\frac{d^۲s}{dt^۲} + ۴s = t\, sin^۲ t$

$s = c_۱ cos\, ۲t + c_۲ sin\, ۲t + \frac{t}{۸} - \frac{t\, cos\, ۲t}{۳۲} - \frac{t^۲ sin\, ۲t}{۱۶}$

۱۴) $\frac{d^۴y}{dx^۴} - ۹\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۰$ ۱۵) $\frac{d^۳x}{dt^۳} + ۸x = ۰$

۱۶) $\frac{d^۴y}{dx^۴} - ۱۳\frac{d^۲y}{dx^۲} + ۳۶y = ۰$ ۱۷) $\frac{d^۴y}{dx^۴} + ۵\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۳۶y = ۰$

۱۸) $\frac{d^۴s}{dt^۴} + ۱۳\frac{d^۲s}{dt^۲} + ۳۶s = ۱۸t - ۳۶$

۱۹) $\frac{d^۴x}{dt^۴} + ۲\frac{d^۲x}{dt^۲} + x = t + ۲$ ۲۰) $\frac{d^۳s}{dt^۳} - ۲\frac{d^۲s}{dt^۲} + \frac{ds}{dt} = e^t$

تمرینهای گوناگون

جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید :

معادلهٔ دیفرانسیل — جواب

۱) $۸\left(\frac{dy}{dt}\right)^۳ = ۲۷y$ — $y = (t+c)^{\frac{۳}{۲}}$

۲) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^۳ - ۲۷y^۲ = ۰$ — $y = (x+c)^۳$

۳) $۴\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ = ۹x$ — $y = x^{\frac{۳}{۲}} + c$

۴) $(۱+x^۲)dy = \sqrt{۱-y^۲}\, dx$ — $\frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}} = \frac{x+c}{۱-cx}$

معادلهٔ دیفرانسیل	جواب
۵) $(x+y)dx=(x-y)dy$	$\ln(x^2+y^2)-2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}=c$
۶) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$	$y=(x+c)e^{-x}$
۷) $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+3s=0$	$s=c_1e^t+c_2e^{3t}$
۸) $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+4s=0$	$s=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$
۹) $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+8s=0$	$s=e^{2t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$
۱۰) $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=e^{2t}$	$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}$
۱۱) $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=at+b$	$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt+\frac{at+b}{k^2}$
۱۲) $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=ae^{bt}$	$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt+\frac{ae^{bt}}{b^2+k^2}$
۱۳) $\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=a\cos kt$	$x=c_1e^{kt}+c_2e^{-kt}-\frac{a}{2k^2}\cos kt$
۱۴) $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=a\sin kt$	$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt-\frac{a}{2k}t\cos kt$
۱۵) $(x^2-2y^2)dx+2xy\,dy=0$	$y^2+x^2\ln cx=0$
۱۶) $\frac{dy}{dx}+\frac{4xy}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$y(x^2+1)^2=\mathrm{arc\,tg}\,x+c$
۱۷) $\frac{d^4s}{dt^4}-5\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$	$s=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-2t}$

جواب	معادلهٔ دیفرانسیل

۱۸) $\dfrac{d^4s}{dt^4}+5\dfrac{d^2s}{dt^2}+4s=0$

$s=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t$

۱۹) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$

۲۰) $dy+xy(1-x^2y^2)dx=0$

۲۱) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-8\dfrac{dx}{dt}+25x=0$

۲۲) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=8t+2$

۲۳) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=e^{-t}$

۲٤) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=6\cos 3t$

۲٥) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=2\cos 2t$

با استفاده از تغییر متغیرهای مذکور معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید :

۲٦) $t^2\dfrac{ds}{dt}-2st-s^2=0$ (تغییر متغیر $s=\dfrac{t^2}{v}$) جواب : $\dfrac{t^4}{2s^2}+\dfrac{t^3}{3}=c$

۲۷) $(t^2+t)ds=(t^2+2st+s)dt$ (تغییر متغیر $s=vt$)

جواب : $s=ct(1+t)-t$

۲۸) $(3+2st)s\,dt=(3-2st)t\,ds$ (تغییر متغیر $st=v$)

۲۹) $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=2x+2y+5$ (تغییر متغیر $x+y=v$)

تمرین اضافی

۱) خم (c) چنانست که مقدار عددی مساحت سطح محدود بین خم (c) ومحور x ها و دو خط قائم دلخواه ، k برابر مقدار عددی طول آن پاره از خم (c) است که بین دو خط قائم مذکور قرار دارد . خم (c) از نقطهٔ (k , ۰) نیز میگذرد . نشان دهید که (c) یک منحنی زنجیر است .

۲) شتاب‌خلبانی که با یک چتر نجات از بالون ساکنی رها میشود ، $۳۲-\frac{v^۲}{۸}$ فوت درثانیه در ثانیه و v سرعت‌آن برحسب فوت درثانیه است . خلبان پس‌ازیک دقیقه به زمین میرسد . نشان دهید که ارتفاع بالون کمی بیشتر از ۹۵۰ فوت است .

۳) نقطهٔ M روی محور x ها در حرکت است . سوی شتاب آن بسمت مبدأ مختصات و مقدار شتاب‌آن متناسب با فاصله‌اش‌از مبدأ مختصات است . برنقطهٔ M نیروی کندکننده‌ای متناسب با سرعت آن اثر میکند . معادلهٔ دیفرانسیل حرکت به صورت

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+m\frac{dx}{dt}+nx=۰$$

است . m و n اعدادی مثبتند و وقتی $t=۰$ است ، $x=۱۰$ و $\frac{dx}{dt}=۰$ است .

درهریک از حالات زیر ، x و $\frac{dx}{dt}$ را حساب کنید و دربارهٔ حرکت بحث نمایید:

الف : $m=۴$ و $n=۵$ ، ب : $m=۴$ و $n=۴$ ، پ : $m=۴$ و $n=۳$

فصل بیست و دوم

توابع هذلولی*

۲۱۰ـ سینوس و کسینوس هیپربلیک . ـ در ریاضیات عملی اغلب به عباراتی برمیخوریم که شامل توابعی نمایی(شمارهٔ ۶۲) هستند. یک دسته ازاین توابع را **توابع هذلولی** مینامند. علت این نامگذاری را در شمارهٔ ۲۱۵ مطالعه خواهیم کرد. سینوس هیپربلیک و کسینوس هیپربلیک متغیر v که بترتیب با $sh\,v$ و $ch\,v$ نشان داده میشوند ، با دو رابطهٔ

$$sh\,v=\frac{e^{v}-e^{-v}}{۲} \quad , \quad ch\,v=\frac{e^{v}+e^{-v}}{۲} \qquad \text{(A)}$$

[e پایهٔ لگاریتم طبیعی است]

تعریف میگردند. اینها دوتابع هذلولی‌اند ، اما از یکدیگر مستقل نیستند زیرا بنابرتعریف (A) داریم :

$$sh^{۲}v=\frac{e^{۲v}-۲+e^{-۲v}}{٤} \quad , \quad ch^{۲}v=\frac{e^{۲v}+۲+e^{-۲v}}{٤}$$

پس

$$ch^{۲}v-sh^{۲}v=۱ \qquad \text{(B)}$$

بآسانی میتوان از روابط (A) توابع نمایی e^{v} و e^{-v} را بدست آورد :

$$e^{v}=ch\,v+sh\,v \quad , \quad e^{-v}=ch\,v-sh\,v \qquad (۱)$$

مثال ـ نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-a^{۲}y=۰ \qquad (۲)$$

را میتوان به صورت

$$y=A\,sh\,ax+B\,ch\,ax$$

---

* Hyperbolic functions

نوشت . A و B دو مقدار ثابتند .

حل - بنابر شمارهٔ ۲۰۶ معادلهٔ مفسر (۲) ، $r^2 - a^2 = 0$ و ریشه‌های آن a و $-a$ است . بنابراین جواب عمومی (۲)

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

است. اگر در روابط (۱) بجای v ، ax بگذاریم ، مقادیر e^{ax} و e^{-ax} به صورت

$$e^{ax} = ch\ ax + sh\ ax \quad , \quad e^{-ax} = ch\ ax - sh\ ax$$

درمیایند . دو مقدار اخیر را در جواب عمومی میگذاریم ، داریم :

$$y = c_1(ch\ ax + sh\ ax) + c_2(ch\ ax - sh\ ax)$$
$$= (c_1 + c_2) ch\ ax + (c_1 - c_2) sh\ ax$$

اگر $c_1 - c_2$ را A و $c_1 + c_2$ را B بنامیم ، عبارت مطلوب بدست میاید . مقایسهٔ این جواب با نتیجهٔ مثال ۲ ی صفحهٔ ۶۵۶ جالب توجه است .

۲۱۱- توابع هذلولی دیگر . - تانژانت هیپربلیک را با رابطهٔ

$$th\ v = \frac{sh\ v}{ch\ v} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \tag{C}$$

و کتانژانت هیپربلیک ، سکانت هیپربلیک و کسکانت هیپربلیک را با روابط

$$coth\ v = \frac{1}{th\ v} \quad , \quad sech\ v = \frac{1}{ch\ v} \quad , \quad cosech\ v = \frac{1}{sh\ v} \tag{۱}$$

تعریف میکنند. نسبتهای مذکور در (C) و (۱) همان نسبتهای مذکور در روابط (۲) ی صفحهٔ ٥ برای توابع مثلثاتی نظیرند . نیز داریم :

$$1 - th^2 v = sech^2 v \quad , \quad coth^2 v - 1 = cosech^2 v \tag{۲}$$

این روابط شبیه به روابط (۲) ی صفحهٔ ٥ میباشند و اثبات یکی از آن دو در پایین داده شده است .

با توجه به تعریفهای بالا روشن است که :

به $sh\ v$ میتوان هرمقداری را نسبت داد ، به $ch\ v$ میتوان هرمقدار مثبت بزرگتر یا مساوی واحدی را نسبت داد ، به $sech\ v$ میتوان هرمقدار مثبت کوچکتر یا مساوی واحدی را نسبت

داد ، به $th\,v$ میتوان هرمقدار واقع بین ۱− و ۱+ را نسبت داد ، به $coth\,v$ میتوان هرمقدار واقع درخارج فاصلهٔ (۱+ , ۱−) را نسبت داد و سرانجام به $cosech\,v$ میتوان تمام مقادیر ، جز صفر ، را نسبت داد.

بنابر تعریفهای بالا روابط زیر نیز برقرارند :

$$
\begin{aligned}
sh(-v) &= -sh\,v \quad , \quad cosech(-v) = -cosech\,v \\
ch(-v) &= ch\,v \quad , \quad sech(-v) = sech\,v \qquad (۳)\\
th(-v) &= -th\,v \quad , \quad coth(-v) = -coth\,v
\end{aligned}
$$

مثال - $th\,x=\frac{۴}{۵}$ است. مقادیر عددی توابع هذلولی دیگر x را حساب کنید.

حل - دو طرف تساوی (B) را به $ch^۲x$ تقسیم میکنیم ، داریم :

$$۱-\frac{sh^۲x}{ch^۲x}=\frac{۱}{ch^۲x}$$

بنابراین :

$$۱-th^۲x=sech^۲x$$

چون $th\,x=\frac{۴}{۵}$ است ، از معادلهٔ اخیر $sech\,x=\frac{۳}{۵}$ بدست میاید ، مقدار منفی آن قابل قبول نیست . پس

بنابر (۱)

$$ch\,x=\frac{۱}{sech\,x}=\frac{۵}{۳}$$

بنابر (C)

$$sh\,x=ch\,x\,th\,x=\frac{۴}{۳}$$

بنابر (۱)

$$coth\,x=\frac{۵}{۴} \quad , \quad cosech\,x=\frac{۳}{۴}$$

۲۱۲- جدول مقادیر عددی $sh\,v$ ، $ch\,v$ ، $th\,v$ و خم نمایش آنها.

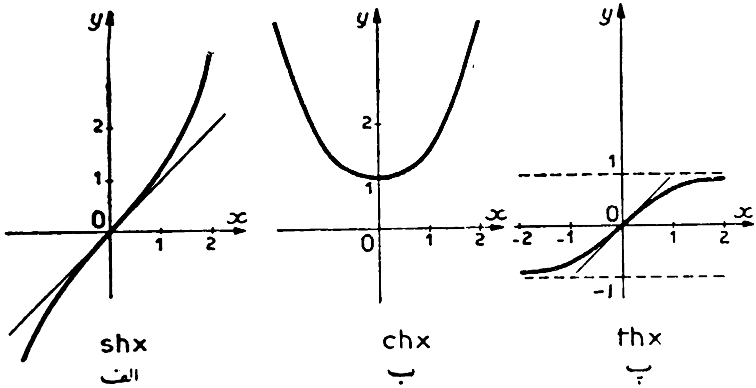
در صفحهٔ ۶۹۷ جدولی درج است که مقادیر عددی $sh\,v$ ، $ch\,v$ ، $th\,v$ را ، به ازای مقادیر v از ۰ تا ۹ره ، تا چهار رقم اعشار بدست میدهد . برای مقادیر منفی v باید از روابط (۳) ی شمارهٔ ۲۱۱ استفاده کرد .

وقتی v بسمت $+\infty$ میل میکند ، $sh\,v$ و $ch\,v$ بسمت بینهایت میل میکنند ،

توابع هذلولی

v	sh v	ch v	th v	v	sh v	ch v	th v	v	sh v	ch v	th v
.00	.0000	1.000	.0000	.50	.5211	1.128	.4621	1.0	1.175	1.543	.7616
.01	.0100	1.000	.0100	.51	.5324	1.133	.4700	1.1	1.336	1.669	.8005
.02	.0200	1.000	.0200	.52	.5438	1.138	.4777	1.2	1.509	1.811	.8337
.03	.0300	1.000	.0300	.53	.5552	1.144	.4854	1.3	1.698	1.971	.8617
.04	.0400	1.001	.0400	.54	.5666	1.149	.4930	1.4	1.904	2.151	.8854
.05	.0500	1.001	.0500	.55	.5782	1.155	.5005	1.5	2.129	2.352	.9052
.06	.0600	1.002	.0599	.56	.5897	1.161	.5080	1.6	2.376	2.577	.9217
.07	.0701	1.002	.0699	.57	.6014	1.167	.5154	1.7	2.646	2.828	.9354
.08	.0801	1.003	.0798	.58	.6131	1.173	.5227	1.8	2.942	3.107	.9468
.09	.0901	1.004	.0898	.59	.6248	1.179	.5299	1.9	3.268	3.418	.9562
.10	.1002	1.005	.0997	.60	.6367	1.185	.5370	2.0	3.627	3.762	.9640
.11	.1102	1.006	.1096	.61	.6485	1.192	.5441	2.1	4.022	4.144	.9705
.12	.1203	1.007	.1194	.62	.6605	1.198	.5511	2.2	4.457	4.568	.9757
.13	.1304	1.008	.1293	.63	.6725	1.205	.5581	2.3	4.937	5.037	.9801
.14	.1405	1.010	.1391	.64	.6846	1.212	.5649	2.4	5.466	5.557	.9837
.15	.1506	1.011	.1489	.65	.6967	1.219	.5717	2.5	6.050	6.132	.9866
.16	.1607	1.013	.1587	.66	.7090	1.226	.5784	2.6	6.695	6.769	.9890
.17	.1708	1.014	.1684	.67	.7213	1.233	.5850	2.7	7.406	7.473	.9910
.18	.1810	1.016	.1781	.68	.7336	1.240	.5915	2.8	8.192	8.253	.9926
.19	.1911	1.018	.1878	.69	.7461	1.248	.5980	2.9	9.060	9.115	.9940
.20	.2013	1.020	.1974	.70	.7586	1.255	.6044	3.0	10.02	10.07	.9951
.21	.2115	1.022	.2070	.71	.7712	1.263	.6107	3.1	11.08	11.12	.9960
.22	.2218	1.024	.2165	.72	.7838	1.271	.6169	3.2	12.25	12.29	.9967
.23	.2320	1.027	.2260	.73	.7966	1.278	.6231	3.3	13.54	13.57	.9973
.24	.2423	1.029	.2355	.74	.8094	1.287	.6291	3.4	14.97	15.00	.9978
.25	.2526	1.031	.2449	.75	.8223	1.295	.6352	3.5	16.54	16.57	.9982
.26	.2629	1.034	.2543	.76	.8353	1.303	.6411	3.6	18.29	18.31	.9985
.27	.2733	1.037	.2636	.77	.8484	1.311	.6469	3.7	20.21	20.24	.9988
.28	.2837	1.039	.2729	.78	.8615	1.320	.6527	3.8	22.34	22.36	.9990
.29	.2941	1.042	.2821	.79	.8748	1.329	.6584	3.9	24.69	24.71	.9992
.30	.3045	1.045	.2913	.80	.8881	1.337	.6640	4.0	27.29	27.31	.9993
.31	.3150	1.048	.3004	.81	.9015	1.346	.6696	4.1	30.16	30.18	.9995
.32	.3255	1.052	.3095	.82	.9150	1.355	.6751	4.2	33.34	33.35	.9996
.33	.3360	1.055	.3185	.83	.9286	1.365	.6805	4.3	36.84	36.86	.9996
.34	.3466	1.058	.3275	.84	.9423	1.374	.6858	4.4	40.72	40.73	.9997
.35	.3572	1.062	.3364	.85	.9561	1.384	.6911	4.5	45.00	45.01	.9998
.36	.3678	1.066	.3452	.86	.9700	1.393	.6963	4.6	49.74	49.75	.9998
.37	.3785	1.069	.3540	.87	.9840	1.403	.7014	4.7	54.97	54.98	.9998
.38	.3892	1.073	.3627	.88	.9981	1.413	.7064	4.8	60.75	60.76	.9999
.39	.4000	1.077	.3714	.89	1.012	1.423	.7114	4.9	67.14	67.15	.9999
.40	.4108	1.081	.3800	.90	1.027	1.433	.7163	5.0	74.20	74.21	.9999
.41	.4216	1.085	.3885	.91	1.041	1.443	.7211	5.1	82.01	82.01	.9999
.42	.4325	1.090	.3969	.92	1.055	1.454	.7259	5.2	90.63	90.64	.9999
.43	.4434	1.094	.4053	.93	1.070	1.465	.7306	5.3	100.17	100.17	1.0000
.44	.4543	1.098	.4136	.94	1.085	1.475	.7352	5.4	110.70	110.71	1.0000
.45	.4653	1.103	.4219	.95	1.099	1.486	.7398	5.5	122.34	122.35	1.0000
.46	.4764	1.108	.4301	.96	1.114	1.497	.7443	5.6	135.21	135.22	1.0000
.47	.4875	1.112	.4382	.97	1.129	1.509	.7487	5.7	149.43	149.44	1.0000
.48	.4986	1.117	.4462	.98	1.145	1.520	.7531	5.8	165.15	165.15	1.0000
.49	.5098	1.122	.4542	.99	1.160	1.531	.7574	5.9	182.52	182.52	1.0000

درصورتی‌که $th\,v$ بسمت ۱ میل مینماید . خمهای نمایش $sh\,x$ ، $ch\,x$ و $th\,x$ (شکل ۱۷۹) را میتوان با استفاده از جدول بآسانی رسم کرد .



شکل ۱۷۹

۲۱۳- توابع هذلولی $v+w$. - دستورهای نظیر به دو تساوی از روابط (٤) صفحهٔ ٦ در توابع هذلولی به صورت زیرند :

$$sh\,(v+w)=sh\,v\;ch\,w+ch\,v\;sh\,w \tag{D}$$

$$ch\,(v+w)=ch\,v\;ch\,w+sh\,v\;sh\,w \tag{E}$$

اثبات دستور (D) . - اگر در تعریف (A) بجای v ، $v+w$ بگذاریم ، داریم :

$$sh\,(v+w)=\frac{e^{v+w}-e^{-v-w}}{۲} \tag{۱}$$

$$ch\,(v+w)=\frac{e^{v+w}+e^{-v-w}}{۲} \tag{۲}$$

طرف راست رابطهٔ (۱) را میتوان با استفاده از تساویهای (۱) شمارهٔ ۲۱۰ به صورت زیر نوشت :

$$\frac{e^{v+w}-e^{-v-w}}{۲}=\frac{e^{v}\,e^{w}-e^{-v}\,e^{-w}}{۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}[(ch\,\mathrm{v}+sh\,\mathrm{v})(ch\,\mathrm{w}+sh\,\mathrm{w})-(ch\,\mathrm{v}-sh\,\mathrm{v})(ch\,\mathrm{w}-sh\,\mathrm{w})]$$

پس‌از ضرب کردن و مختصر نمودن ، دستور (D) بدست میاید . اثبات دستور (E) نیز به همین طریق است .

اگر در (D) و (E) بجای w ، v بگذاریم ، داریم :

$$sh\,۲\mathrm{v}=۲sh\,\mathrm{v}\,ch\,\mathrm{v} \qquad (۳)$$

$$ch\,۲\mathrm{v}=ch^{۲}\mathrm{v}+sh^{۲}\mathrm{v} \qquad (۴)$$

این دستورها شبیه به دستورهایی هستند که برای $sin\,۲\mathrm{x}$ و $cos\,۲\mathrm{x}$ در روابط (۵) صفحهٔ ۶ داده شده‌اند . از تساویهای (B) و (۴) نیز دستورهایی شبیه به آنچه در روابط (۵) صفحهٔ ۶ برای $sin^{۲}\mathrm{x}$ و $cos^{۲}\mathrm{x}$ مذکورند ، بدست میایند :

$$sh^{۲}\mathrm{v}=\frac{۱}{۲}(ch\,۲\mathrm{v}-۱) \quad , \quad ch^{۲}\mathrm{v}=\frac{۱}{۲}(ch\,۲\mathrm{v}+۱) \qquad (۵)$$

در تمرینهای زیر نیز چند رابطهٔ دیگر که بین توابع هذلولی برقرارند و قابل مقایسه با توابع مثلثاتی نظیر میباشند ، داده شده‌اند .

مثال - دستور زیر را پیدا کنید :

$$th\,\mathrm{v}=\frac{sh\,۲\mathrm{v}}{ch\,۲\mathrm{v}+۱} \qquad (۶)$$

حل - دو طرف روابط (۵) را بیکدیگر تقسیم میکنیم ، داریم :

$$th^{۲}\mathrm{v}=\frac{ch\,۲\mathrm{v}-۱}{ch\,۲\mathrm{v}+۱} \qquad (۷)$$

$$=\frac{ch\,۲\mathrm{v}-۱}{ch\,۲\mathrm{v}+۱}\times\frac{ch\,۲\mathrm{v}+۱}{ch\,۲\mathrm{v}+۱}=\frac{ch^{۲}۲\mathrm{v}-۱}{(ch\,۲\mathrm{v}+۱)^{۲}}$$

چون $ch^{۲}۲\mathrm{v}-۱=sh^{۲}۲\mathrm{v}$ است ، رابطهٔ (۷) به صورت زیر درمیاید :

$$th^{۲}\mathrm{v}=\frac{sh^{۲}۲\mathrm{v}}{(ch\,۲\mathrm{v}+۱)^{۲}} \qquad (۸)$$

پس
$$th\ v = \pm \frac{sh\ ۲v}{ch\ ۲v + ۱}$$

برای تعیین علامت کسر طرف راست ملاحظه میکنیم که بنابر رابطهٔ (۳)

$$sh\ ۲v = \frac{۲sh\ v}{ch\ v} ch^۲ v = ۲th\ v\ ch^۲ v$$

است . این رابطه نشان میدهد که $sh\ ۲v$ و $th\ v$ همواره دارای یک علامتند و چون $ch\ ۲v+۱$ همیشهٔ مثبت است ، علامت جلوی کسر $+$ است و بدین ترتیب دستور (٦) بدست میاید .

اگر بجای v ، $\frac{v}{۲}$ بگذاریم ، دستور (٦) به صورت زیر درمیاید :

$$th\ \frac{v}{۲} = \frac{sh\ v}{ch\ v + ۱} \qquad (۹)$$

تمرین

۱) در تمرینهای الف تا ت مقدار عددی یکی از توابع هذلولی x داده شده است. مقادیر عددی توابع هذلولی دیگر x را حساب کنید و درستی جوابهایتان را ، تا آنجا که ممکن است ، با اعداد جدول صفحهٔ ٦۹۷ بیازمایید :

الف - $ch\ x = ۱٫۲۵$ ب - $cosech\ x = -۰٫۷۵$

پ - $sh\ x = ۱۰$ ت - $coth\ x = -۲٫۵$

دستورهای ۲ تا ۷ مذکور در زیر را ثابت کنید و آنها را با دستورهای نظیر از روابط (۲) ، (٤) ، (٥) ، (٦) صفحه‌های ٥ و ٦ مقایسه نمایید :

۲) $۱ - coth^۲ v = - cosech^۲ v$

۳) $sh\ (v-w) = sh\ v\ ch\ w - ch\ v\ sh\ w$

$ch\ (v-w) = ch\ v\ ch\ w - sh\ v\ sh\ w$

۴) $$th\,(v \pm w) = \frac{th\,v \pm th\,w}{1 \pm th\,v\,th\,w}$$

۵) $$sh\,\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{ch\,v - 1}{2}} \quad , \quad ch\,\frac{v}{2} = +\sqrt{\frac{ch\,v + 1}{2}}$$

۶) $$sh\,v + sh\,w = 2sh\,\frac{v+w}{2}\,ch\,\frac{v-w}{2}$$

$$ch\,v + ch\,w = 2ch\,\frac{v+w}{2}\,ch\,\frac{v-w}{2}$$

۷) $$th\,\frac{v-w}{2} = \frac{sh\,v - sh\,w}{ch\,v + ch\,w}$$

۸) نشان دهید که معادلهٔ منحنی زنجیر را میتوان به صورت $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ نوشت (شکل آن را در فصل ۲۶ ببینید).

۹) جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ را به صورت مجموع جبری چند تابع هذلولی پیدا کنید درصورتی که میدانیم به ازای $x = 0$ ، $y = 3$ و به ازای $x = \frac{4}{5}$ ، $y = 0$ است. جواب : $y = 3ch\,x - 3{,}75sh\,x$

۱۰) نشان دهید که $sech\,(-x) = sech\,x$ است . خم نمایش $sech\,x$ را رسم کنید و ثابت نمایید که $\lim_{x \to \infty} sech\,x = 0$ است .

۱۱) نشان دهید که $coth\,(-x) = -coth\,x$ است . خم نمایش $coth\,x$ را رسم کنید و ثابت نمایید که $\lim_{x \to +\infty} coth\,x = 1$ است .

۱۲) نشان دهید که $cosech\,(-x) = -cosech\,x$ است. خم نمایش $cosech\,x$ را رسم کنید وثابت نمایید که $\lim_{x \to \infty} cosech\,x = 0$ است .

۱۳) درستی روابط زیر را ثابت کنید :

الف) $sh\,3u = 3sh\,u + 4sh^3u$

ب) $ch\,3u = 4ch^3u - 3ch\,u$

۱۴) نشان دهید که به ازای هرعدد صحیح و مثبت n رابطهٔ زیر برقرار است :

$$(sh\,x + ch\,x)^n = sh\,nx + ch\,nx$$

۱۵) ثابت کنید که $sh^2x - sh^2y = sh\,(x+y)\,sh\,(x-y)$ است .

۱۶) کسر $\dfrac{ch\,2u + ch\,4v}{sh\,2u + sh\,4v}$ را مختصر کنید . جواب : $coth\,(u+2v)$

۱۷) معادلات پارامتری تراکتریس را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$x = t - a\,th\,\frac{t}{a} \quad , \quad y = a\,sech\,\frac{t}{a}$$

t پارامتر و a مقدار ثابتی است. خم تراکتریس‌را به‌ازای $a=4$ رسم کنید [تراکتریس خمی است که طول قطعهٔ مماس به آن (شمارهٔ ۴۳) در هرنقطه برابر مقدار ثابت a است . شکل آن را در فصل ۲۶ ببینید] .

۱۸) معادلهٔ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = n^2(y - mx^2)$ را حل کنید .

جواب : $y = A\,ch\,nx + B\,sh\,nx + mx^2 + \dfrac{2m}{n^2}$

۲۱۴ـ مشتق توابع هذلولی . - در دستورهای زیرکه مشتق توابع هذلولی را میدهند ، v تابعی از x است :

XXVII $\qquad \dfrac{d}{dx}sh\,v = ch\,v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

XXVIII $\qquad \dfrac{d}{dx}ch\,v = sh\,v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

XXIX $\qquad \dfrac{d}{dx}th\,v = sech^2v \cdot \dfrac{dv}{dx}$

XXX $$\frac{d}{dx} \coth v = -\operatorname{cosech}^{۲} v \cdot \frac{dv}{dx}$$

XXXI $$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} v = -\operatorname{sech} v \operatorname{th} v \cdot \frac{dv}{dx}$$

XXXII $$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} v = -\operatorname{cosech} v \coth v \cdot \frac{dv}{dx}$$

اثبات دستور XXVII . - بنابر تعریف $sh\, v = \frac{e^{v} - e^{-v}}{۲}$ است ، پس

$$\frac{d}{dx} sh\, v = \frac{e^{v} \frac{dv}{dx} + e^{-v} \frac{dv}{dx}}{۲}$$

$$= \frac{e^{v} + e^{-v}}{۲} \times \frac{dv}{dx}$$

$$= ch\, v \frac{dv}{dx}$$

دستور XXVIII به طریق مشابهی اثبات میشود . اثبات XXIX نیز مانند اثباتی است که در شمارهٔ ۷۲ برای مشتق $tg\, v$ ذکر شده است . برای اثبات دستورهای XXX تا XXXII از روابط (۱) شمارهٔ ۲۱۱ مشتق میگیریم . جزئیات مطالب مذکور را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده میگذاریم .

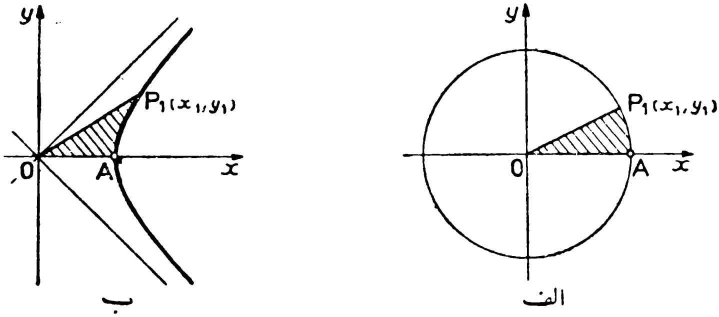
۲۱۵ - روابط بین توابع هذلولی و هذلولی متساوی‌الساقین . - خم نمایش معادلات پارامتری

(۱) $$x = a\, ch\, v \quad , \quad y = a\, sh\, v$$

همان هذلولی متساوی‌الساقین $x^{۲} - y^{۲} = a^{۲}$ است ، زیرا اگر معادلات (۱) را مجذور کنیم و مقدار $x^{۲} - y^{۲}$ را تشکیل دهیم ، داریم :

$$x^۲ - y^۲ = a^۲(ch^۲v - sh^۲v) = a^۲$$

شکل ۱۸۰ ب یک قطاع هذلولی ، $OAP_۱$ ، را نشان میدهد. این قطاع محدود



شکل ۱۸۰

است به شعاع حامل $OP_۱$ ، نیم محور قاطع OA و پاره خم $AP_۱$ از منحنی نمایش (۱).
فرض میکنیم که در نقطهٔ $P_۱$ ، $v = v_۱$ است ، نشان میدهیم که :

قضیه - مساحت قطاع $OAP_۱$ برابر $\frac{۱}{۲} a^۲v_۱$ است .

اثبات - اگر مختصات قطبی یک نقطهٔ غیر مشخص از قوس $AP_۱$ را (ρ , θ) فرض کنیم ، جزء سطح آن (شمارهٔ ۱۰۹) ، $dA = \frac{۱}{۲} \rho^۲ d\theta$ میشود .

اما
$$\rho^۲ = x^۲ + y^۲ = a^۲(ch^۲v + sh^۲v)$$

و بنابر روابط (٥) صفحهٔ ۸

$$\theta = arc\ tg \frac{y}{x} = arc\ tg\ (th\ v)$$

و لذا
$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{sech^۲v}{۱ + th^۲v}$$

است . اکنون از روابط (C) و (۱) شمارهٔ ۲۱۱ استفاده میکنیم ، داریم :

$$d\theta = \frac{dv}{ch^۲v + sh^۲v}$$

بنابراین
$$dA = \frac{۱}{۲} a^۲ dv$$

از دو طرف این معادله انتگرال میگیریم . چون در نقطهٔ A ، $v = ۰$ است ، حکم قضیه بدست میاید .

معادلات پارامتری دایرهٔ شکل ۱۸۰ الف

$$x = r\, cos\, t \quad , \quad y = r\, sin\, t$$

است . اگر اندازهٔ t ی نظیر به نقطهٔ $P_۱$ را $t_۱$ بنامیم ، زاویهٔ مرکزی قطاع $AOP_۱$ برحسب رادیان برابر $t_۱$ و مساحت قطاع دایره ، $AOP_۱$ ، مساوی $\frac{۱}{۲} r^۲ t_۱$ میشود.

اگر $r = a = ۱$ باشد ، در شکل ۱۸۰ الف در نقطهٔ $P(x, y)$

$$x = cos\, t \quad , \quad y = sin\, t \quad , \quad \frac{۱}{۲} t = (\text{مساحت } AOP)$$

و در شکل ۱۸۰ ب در نقطهٔ $P(x, y)$

$$x = ch\, v \quad , \quad y = sh\, v \quad , \quad \frac{۱}{۲} v = (\text{مساحت } AOP)$$

است . بنابراین روابط موجود بین توابع هذلولی و هذلولی متساوی‌الساقین همان روابطی است که بین توابع مثلثاتی و دایره موجود است .

تمرین

۱) نشان دهید که جزء طول قوس منحنی زنجیر $y = a\, ch \frac{x}{a}$ با دستور $ds = ch \frac{x}{a} dx$ تعیین میشود .

۲) ثابت کنید که در منحنی زنجیر مسئلهٔ ۱ شعاع انحنا برابر $\frac{y^۲}{a}$ است .

درستی بسطهای زیر را بیازمایید و فاصلهٔ تقارب آنها را پیدا کنید :

۳) $sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$

جواب : تمام مقادیر x

٤) $ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

جواب : تمام مقادیر x

با استفاده از سریهای مسائل ۳ و ٤ و روشهای مذکور در شمارهٔ ۱۹۵ ، درستی بسطهای زیر را بیازمایید :

٥) $sech\,x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{61}{720}x^6 + \cdots$

٦) $th\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

۷) اکسترممهای تابع $5ch\,x + 4sh\,x$ را پیدا کنید .

جواب : تابع مذکور مینیممی مساوی ۳ دارد .

۸) اکسترممهای تابع $A\,sh\,x + B\,ch\,x$ را پیدا کنید .

جواب : اگر $B^2 > A^2$ و $B < 0$ باشد، تابع مذکور ماکزیممی مساوی $-\sqrt{B^2 - A^2}$ دارد ، و اگر $B^2 > A^2$ و $B > 0$ باشد ، تابع مذکور مینیممی مساوی $+\sqrt{B^2 - A^2}$ دارد .

۹) سریهای مسائل ۳ و ٤ را با جمع و تفریق بسطهای e^x و e^{-x} بدست آورید [از روابط (A) و شمارهٔ ۱۹۵ استفاده کنید] .

۱۰) در دایره یا در هذلولی متساوی‌الساقین شمارهٔ ۲۱۵ ، جزء طول قوس را ds و شعاع حامل نقطهٔ $P(x, y)$ را $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ فرض میکنیم و حدود انتگرال را همان حدود مربوط به پاره خم AP_1 (شکل ۱۸۰) درنظر میگیریم . نشان دهید که در دایره $\int \frac{ds}{\rho} = t_1$ ودر هذلولی $\int \frac{ds}{\rho} = v_1$ است .

۱۱) نشان دهید که $\lim\limits_{x\to+\infty}(ch\,x - sh\,x)=0$ است .

۱۲) مقدار هریک از صور مبهم زیر را پیدا کنید :

(الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sh\,x}{x}$ ، (ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{th\,x}{x}$ ، (پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-ch\,x}{x^2}$

جواب : (الف) ۱ ، (ب) ۱ ، (پ) $-\dfrac{1}{2}$

۱۳) $tg\,\varphi = sh\,x$ است ، نشان دهید که $\dfrac{d\varphi}{dx}=sech\,x$ میباشد .

۱٤) با استفاده از سری مسئلهٔ ٥ و انتگرال گیری (طریق مذکور در شمارهٔ ۱۹٦) بسط زیر را پیدا کنید :

$$arc\ tg\,(sh\,x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5-\frac{61}{5040}x^7+\cdots$$

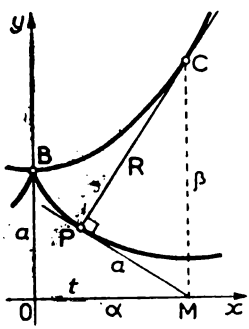
۱٥) در تراکتریس

$$x=t-a\,th\frac{t}{a}\quad,\quad y=a\,sech\frac{t}{a}$$

(شکل ۱۸۱) نشان دهید که

(الف) پارامتر t مساوی طول نقطهٔ تقاطع خط مماس به خم با محور x هاست .

(ب) طول قطعهٔ مماس به خم (شمارهٔ ٤۲) مساوی مقدار ثابت a است .



شکل ۱۸۱

(پ) گستردهٔ تراکتریس مذکور منحنی زنجیر $\beta=a\,ch\dfrac{\alpha}{a}$ است .

(ت) طول شعاع انحنا در هرنقطه مساوی $a\,sh\dfrac{t}{a}$ است (PC) .

۲۱٦- توابع هذلولی معکوس . - رابطهٔ

$$y = sh\, v \tag{۱}$$

را به صورت

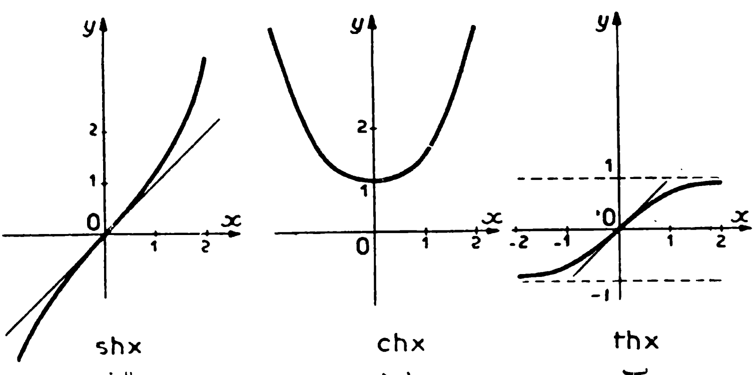
$$v = arg\, sh\, y \tag{۲}$$

نیزمینویسند وآن را با عبارت «v مساوی است باآرگومان سینوس هیپربلیک y» میخوانند. بنابراین دو تابع $sh\, v$ و $arg\, sh\, y$ معکوس یکدیگرند (شمارهٔ ۳۹) . به همین ترتیب $arg\, ch\, y$ و $ch\, v$ معکوس یکدیگرند .

خمهای

$$y = sh\, x \quad \text{و} \quad y = ch\, x \quad \text{و} \quad y = th\, x \tag{۳}$$

را درنظر میگیریم و فرض میکنیم که y داده شده است .



شکل ۱۸۲

در شکل۱۸۲ الف ، به y میتوان تمام مقادیر مثبت یا منفی را نسبت داد و بهازای هرمقدار y تنها یک مقدار برای x بدست میاید .

در شکل ۱۸۲ ب ، به y میتوان مقادیر مثبت بزرگتر یا مساوی ۱ را نسبت داد و به ازای هرمقدار y دو مقدار قرینه برای x بدست میاید .

در شکل ۱۸۲ پ ، به y میتوان مقادیری را که قدر مطلق آنها از ۱ کوچکتر است نسبت داد و به ازای هرمقدار y تنها یک مقدار برای x بدست میاید .

مطالب مذکور را به صورت مختصر زیر نیز میتوان نوشت :

تابع $arg\ sh\ v$ به‌ازای جمیع مقادیر v یکسان و $arg\ sh\ (-v) = -arg\ sh\ v$ است .

تابع $arg\ ch\ v$ به ازای مقادیر $v > ۱$ دو مقدار قرینه دارد و $arg\ ch\ ۱ = ۰$ است .

تابع $arg\ th\ v$ به‌ازای مقادیر $v^۲ < ۱$ یکسان‌و $arg\ th\ (-v) = -arg\ th\ v$ است .

توابع هذلولی ، در شمارهٔ ۲۱۰ ، با عبارتهایی‌از توابع نمایی تعریف شده‌اند. توابع هذلولی معکوس را نیز میتوان با عبارتهایی از توابع لگاریمی تعریف کرد ، یعنی میتوان نوشت :

$$arg\ sh\ x = ln\ (x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \qquad \text{(F)}$$ (به ازای تمام مقادیر x)

$$arg\ ch\ x = ln\ (x \pm \sqrt{x^۲ - ۱}) \qquad \text{(G)}$$ (به ازای $x \geqslant ۱$)

$$arg\ th\ x = \frac{۱}{۲}\ ln\ \frac{۱ + x}{۱ - x} \qquad \text{(H)}$$ (به ازای $x^۲ < ۱$)

اثبات دستور (F) . ـ فرض میکنیم $v = arg\ sh\ x$ است . مینویسیم :

$$x = sh\ v = \frac{e^v - e^{-v}}{۲} \qquad (٤)$$

برای حل معادلهٔ اخیر و پیدا کردن v مینویسیم :

$$e^v - \frac{۱}{e^v} - ۲x = ۰ \qquad > \qquad e^{۲v} - ۲xe^v - ۱ = ۰$$

معادلهٔ سمت راست نسبت به e^v یک معادلهٔ درجهٔ دوم‌و جوابهای‌آن $e^v = x \pm \sqrt{x^۲ + ۱}$ است. چون e^v همواره مثبت است ، جواب $x - \sqrt{x^۲ + ۱}$ پذیرفتنی نیست . ازدوطرف $e^v = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$ لگاریتم طبیعی میگیریم ، دستور (F) بدست میاید .

اثبات دستور (G) . ـ فرض میکنیم $v = arg\ ch\ x$ است . مینویسیم :

$$x = ch\, v = \frac{e^{v} + e^{-v}}{۲} \qquad (۵)$$

مانند بالا عمل میکنیم ، معادلهٔ $e^{۲v} - ۲xe^{v} + ۱ = ۰$ حاصل میگردد . آن را حل میکنیم :

$$e^{v} = x \pm \sqrt{x^{۲} - ۱}$$

هردو مقدار اخیر پذیرفتنی است . از دو طرف آن لگاریتم طبیعی میگیریم ، دستور (G) بدست میاید .

اثبات دستور (H) . - فرض میکنیم $v = arg\, th\, x$ است . مینویسیم :

$$x = th\, v = \frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}} \qquad (۶)$$

مخرج را ازبین میبریم و حاصل را ساده میکنیم :

$$(x - ۱)e^{v} + (x + ۱)e^{-v} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad e^{۲v} = \frac{۱ + x}{۱ - x}$$

از دو طرف معادلهٔ سمت راست لگاریتم طبیعی میگیریم ، دستور (H) بدست میاید .

مثال - عبارت

$$۵ch\, x + ۴sh\, x \qquad (۷)$$

را به صورت $c\, ch\, (x + a)$ درآورید . c و a مقادیری ثابتند و ضمن محاسبه بدست میایند .

حل - بنابر دستور (E) ی شمارهٔ ۲۱۲ داریم :

$$c\, ch\, (x + a) = c\, ch\, x\, ch\, a + c\, sh\, x\, sh\, a \qquad (۸)$$

برای‌آنکه (۷) به صورت مطلوب‌درآید ، باید مقادیر c و a درمعادلات زیر صدق کنند :

$$c\, ch\, a = ۵ \quad , \quad c\, sh\, a = ۴ \qquad (۹)$$

دو طرف این معادلات را نخست مجذور میکنیم و سپس از یکدیگر کم مینماییم ، با توجه به رابطهٔ (B) ی شمارهٔ ۲۱۰ ، $c^{۲} = ۹$ میشود . c را برابر ۳+ میگیریم زیرا $ch\, a$ باید مثبت باشد . از تقسیم دو طرف معادلات (۹) بیکدیگر $th\, a = \frac{۴}{۵}$ و لذا

بنابر (H)
$$a = arg\ th\ ۰٫۸ = \frac{۱}{۲}\ ln\ ۹$$

و از آنجا $a = ۱٫۰۹۹$ میشود و عبارت (۷) به صورت

$$۵ch\ x + ۴sh\ x = ۳ch\ (x + ۱٫۰۹۹) \qquad (۱۰)$$

درمیاید . خم نمایش تابع $۵ch\ x + ۴sh\ x$ از خم نمایش $۳ch\ x$ بدین ترتیب بدست میاید که محور y ها را موازی خود به مبدأ جدید (۰ , ۱٫۰۹۹) منتقل کنیم (این مثال را با مثال ۲ ی صفحهٔ ٦۵٦ مقایسه کنید) .

وقتی x در دست باشد ، مقادیر $arg\ sh\ x$ ، $arg\ ch\ x$ یا $arg\ th\ x$ را میتوان با استفاده از جدول صفحهٔ ٦۹۷ حداکثر تا سه رقم دقیق بدست آورد ، مثلاً $arg\ sh\ ۰٫۲۵ = ۰٫۲۴۷$ و $arg\ ch\ ۳ = \pm ۱٫۷٦$ است. اگردقت بیشتری لازم باشد باید از جدولهای لگاریتم طبیعی استفاده نمود * .

۲۱۷- مشتق توابع هذلولی معکوس . ـ دستورهای زیر که درآنها v تابعی از x است ، مشتق توابع هذلولی معکوس را بدست میدهند :

$$\frac{d}{dx}\, arg\ sh\ v = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{v^۲+۱}} \qquad \text{(به‌ازای جمیع مقادیر v)} \qquad \text{XXXIII}$$

$$\frac{d}{dx}\, arg\ ch\ v = \frac{\frac{dv}{dx}}{\pm\sqrt{v^۲-۱}} \qquad (v > ۱) \qquad \text{XXXIV}$$

$$\frac{d}{dx}\, arg\ th\ v = \frac{\frac{dv}{dx}}{۱-v^۲} \qquad (v^۲ < ۱) \qquad \text{XXXV}$$

---

* جدول «Hyperbolic Functions» چاپ سال ۱۹۰۹ از مجموعهٔ The Smithsonian Mathematical Tables مقادیر $sh\ u$ ، $ch\ u$ ، $th\ u$ و $coth\ u$ را تا پنج رقم دقیق میدهد . از این جدول میتوان مقادیر نظیر به توابع هذلولی معکوس را نیز تا پنج رقم دقیق بدست آورد .

اثبات دستور XXXIII . - (با شمارهٔ ۷۵ مقایسه کنید) فرض میکنیم :

$$y = arg\ sh\ v$$

پس

$$v = sh\ y$$

از دو طرف این معادله نسبت به y مشتق میگیریم :

$$\frac{dv}{dy} = ch\ y$$

و از آنجا

$$\frac{dy}{dv} = \frac{۱}{ch\ y}$$

چون v تابعی از x است ، مقدار اخیر را در دستور (A) ی شمارهٔ ۳۸ میگذاریم ، داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{ch\ y} \times \frac{dv}{dx} = \frac{۱}{\sqrt{v^۲ + ۱}} \times \frac{dv}{dx}$$

زیرا بنابر (B)

$$ch\ y = \sqrt{sh^۲ y + ۱} = \sqrt{v^۲ + ۱}$$

اثبات دستورهای XXXIV و XXXV نیز به همین شکل است. دستورهای دیگر توابع هذلولی معکوس عبارتند از :

$$\text{(I)} \qquad arg\ coth\ x = \frac{۱}{۲}\ ln \frac{x + ۱}{x - ۱} \qquad (x^۲ > ۱)$$

$$\text{(J)} \qquad arg\ sech\ x = ln\left(\frac{۱}{x} \pm \sqrt{\frac{۱}{x^۲} - ۱}\right) \qquad (۰ < x \leqslant ۱)$$

$$\text{(K)} \qquad arg\ cosech\ x = ln\left(\frac{۱}{x} + \sqrt{\frac{۱}{x^۲} + ۱}\right) \qquad (x^۲ > ۰)$$

$$\text{XXXVI} \qquad \frac{d}{dx}\ arg\ coth\ v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{v^۲ - ۱} \qquad (v^۲ > ۱)$$

$$\text{XXXVII} \qquad \frac{d}{dx}\, arg\ sech\ v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{\pm v\sqrt{1-v^2}} \qquad (0 < v < 1)$$

$$\text{XXXVIII} \qquad \frac{d}{dx}\, arg\ cosech\ v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{v^2\sqrt{1+\frac{1}{v^2}}} \qquad (v^2 > 0)$$

جزئیات اثبات این دستورها در تمرینهای ۵ تا ۸ مذکور در زیر به عهدهٔ خواننده گذاشته شده است .

تمرین

۱) نشان دهید که دو مقدار $arg\ ch\ x$ که با دستور (G) تعیین میشوند ، دو عدد قرینه‌اند .

۲) خم نمایش $y = \frac{1}{2}\, arg\ sh\ x$ رارسم کنید. مقادیر y و y' را به‌ازای $x=2$ از روی شکل بدست آورید . جواب : $y = 0{,}72$ ، $y' = 0{,}2236$

۳) دستور XXXIII را با مشتق گیری از دستور (F) مستقیماً ثابت کنید .

۴) خم نمایش توابع زیررا رسم کنید و مقادیر y و y' را به ازای مقدار مذکور x از روی شکل تعیین نمایید :

(الف) $y = arg\ ch\ x$ در $x = 2$

(ب) $y = arg\ th\ x$ در $x = -0{,}75$

۵) دستورهای XXXIV و XXXV را ثابت کنید .

۶) دستورهای (I) و XXXVI را ثابت کنید .

۷) دستورهای (J) و XXXVII را ثابت کنید .

۸) دستورهای (K) و XXXVIII را ثابت کنید.

۹) با استفاده از مطالب مذکور در شمارهٔ ۱۹۵ بسط زیر را پیدا کنید :

$$arg\ th\ x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots$$

۱۰) $sh\ x = tg\ \varphi$ است ، نشان دهید که

(الف) $x = ln\ (sec\ \varphi + tg\ \varphi)$ ، (ب) $\frac{dx}{d\varphi} = sec\ \varphi$

۱۱) نشان دهید که $arg\ cosech\ v = arg\ sh\ \frac{۱}{v}$ است . با استفاده از این رابطه دستور XXXVIII را از دستور XXXIII بدست آورید .

۱۲) $\lim\limits_{x \to \infty} x\ arg\ coth\ x$ را پیدا کنید . جواب : ۱

۱۳) $\lim\limits_{x \to \infty} x\ arg\ cosech\ x$ را پیدا کنید .

۱٤) بسط زیر را بدست آورید :

$$arg\ sh\ x = x - \frac{۱}{۲} \times \frac{x^۳}{۳} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ٤} \times \frac{x^۵}{۵} - \cdots$$

۱۵) $\lim\limits_{x \to +\infty} (arg\ sh\ x - ln\ x)$ را پیدا کنید . جواب : $ln\ ۲$

۱٦) نشان دهید که $arg\ coth\ v = arg\ th\ \frac{۱}{v}$

$$arg\ sech\ v = arg\ ch\ \frac{۱}{v}$$

و با استفاده از این روابط درستی دستورهای XXXVI و XXXVII را بیازمایید .

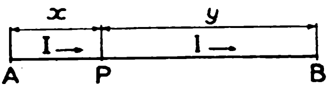
۱۷) نشان دهید که $\frac{d}{dx} arg\ th\ \frac{th\ a\ tg\ x}{sech\ a + sec\ x} = \frac{sh\ a}{۱ + ch\ a\ cos\ x}$ است .

۱۸) با استفاده از قضیهٔ مذکور در تمرین ۲۸ صفحهٔ ٦۲ ، خمهای نمایش

(الف) $y = arg\ coth\ x$ ، (ب) $y = arg\ sech\ x$ ، (پ) $y = arg\ cosech\ x$

را رسم کنید .

۲۱۸- خط تلگراف . - یک خط تلگراف را درنظر میگیریم و فرض میکنیم که کاملاً عایق شده است . جریان الکتریسیته از پست فرستندهٔ A بسمت پست گیرندهٔ B میرود . هدر* در تمام طول خط یکنواخت و خطی است . P یک نقطهٔ غیر مشخص از خط تلگراف است . فرض میکنیم که



شکل ۱۸۳

نیروی الکتروموتوری ** (برحسب ولت) در نقطهٔ A ، E_A ، در نقطهٔ B ، E_B و در نقطهٔ P ، E است .

شدت جریان(برحسب آمپر) در نقطهٔ A ، I_A ، درنقطهٔ B ، I_B ودرنقطهٔ P ، I است .

مقادیر ثابت α و r_0 هدر و مقاومت خطی را در واحد طول مشخص میسازند . α و r_0 اعدادی مثبتند .

طول AP را x مینامیم . در مبحث الکتریسیته نشان میدهند که E و I توابعی از x اند و بین آنها روابط زیر برقرار است :

$$\frac{d^2E}{dx^2}-\alpha^2E=0 \tag{۱}$$

$$r_0\alpha I=-\frac{dE}{dx} \tag{۲}$$

دراینجا نشان میدهیم که نیروی الکتروموتوری و شدت‌جریان در نقطهٔ P با دستورهای زیر تعیین میشوند :

$$E=E_A\, ch\, \alpha x-r_0 I_A\, sh\, \alpha x \tag{۳}$$

$$I=I_A\, ch\, \alpha x-\frac{E_A}{r_0}\, sh\, \alpha x \tag{۴}$$

اثبات - جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارتست از (مثال شمارهٔ ۲۱۰ را ببینید) :

* Leakage (فرانسوی perte)

** Electromotive force

$$E = Ach\ \alpha x + Bsh\ \alpha x \qquad (۵)$$

مشتق این مقدار را در (۲) میگذاریم ، داریم :

$$r_\circ I = -Ash\ \alpha x - Bch\ \alpha x \qquad (۶)$$

اما وقتی $x = ۰$ است ، $E = E_A$ و $I = I_A$ است . بنابراین $A = E_A$ و $B = -r_\circ I_A$ است و معادلات (۵) و (۶) به صورت (۳) و (۴) درمیایند .

در تمرین ۲ ی زیر ، مقدار نیروی الکتروموتوری و شدت جریان در نقطهٔ P برحسب نیروی الکتروموتوری و شدت جریان در پست گیرنده داده شده است .

تمرین

موضوع تمام مسائل زیر یک خط تلگراف با شرایط مذکور در بالاست و L اندازهٔ طول AB است .

۱) درخطی $E_A = ۲۰۰\ V$ ، $L = ۵۰۰\ Km$ ، $r_\circ = ۴۰۰۰\ \Omega$ ، $\alpha = ۰٫۰۰۲۵$ ، $I_B = ۰$ است . I_A و E_B را پیدا کنید .

جواب : $I_A = ۰٫۰۵\ th\ ۱٫۲۵ = ۰٫۰۴۲۳۸\ A$

$E_B = ۲۰۰\ sech\ ۱٫۲۵ = ۱۰۵٫۸\ V = ۰٫۵۳\ E_A$

۲) اگر فاصلهٔ نقطهٔ P از پست گیرنده $y = PB$ باشد ، نشان دهید که :

$$E = E_B\,ch\ \alpha y + r_\circ I_B\,sh\ \alpha y \quad , \quad I = I_B\,ch\ \alpha y + \frac{E_B}{r_\circ}\,sh\ \alpha y$$

۳) درخطی $E_A = ۲۰۰\ V$ ، $I_A = ۰٫۰۴\ A$ ، $r_\circ = ۴۰۰۰\ \Omega$ ، $\alpha = ۰٫۰۰۲۵$ است . نشان دهید که دراین خط :

$$E = ۱۲۰\ ch\ (۱٫۰۹۹ - ۰٫۰۰۲۵\ x) \quad , \quad I = ۰٫۰۳\ sh\ (۱٫۰۹۹ - ۰٫۰۰۲۵\ x)$$

(مثال شمارهٔ ۲۱۶ را ببینید . بدین ترتیب وقتی x بسمت ۴۳۹٫۶ میل میکند ، E بسمت مینیممی برابر ۱۲۰ ولت و I بسمت صفر میل مینماید .)

۴) در خطی $E_A=160\ V$ ، $I_A=0.05\ A$ ، $r_0=4000\ \Omega$ ، $\alpha=0.0025$ است . نشان دهید که دراین خط :

$$E=120\ sh\,(1.099-0.0025\,x)\quad,\quad I=0.03\ ch\,(1.099-0.0025\,x)$$

(مثال شمارهٔ ۲۱۶ را ببینید . بدین ترتیب وقتی x بسمت ۴۳۹٫۶ میل میکند ، E بسمت صفر و I بسمت مینیممی برابر ۰٫۰۳ A نزول مینماید .)

۵) نشان دهید که $\dfrac{d^2I}{dx^2}-\alpha^2I=0$ است (بنابراین E و I جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی به صورت $y''-\alpha^2y=0$ است) .

۶) در خطی $E_A=r_0I_A$ است . نشان دهید که دراین خط

(الف) $E=E_Ae^{-\alpha x}\quad,\quad I=I_Ae^{-\alpha x}$

(ب) $E=r_0I$

(پ) وقتی x بسمت بینهایت میل میکند ، $E\to 0$

(مثلاً اگر $r_0=4000$ ونیروی الکتروموتوری در پست فرستنده ۴۰۰۰ برابر شدت‌جریان باشد ، نیروی مذکور در هرنقطه از خط ۴۰۰۰ برابر شدت جریان است و وقتی طول خط بسمت بینهایت میل کند ، نیروی الکتروموتوری کاهش می‌یابد و بسمت صفر میگراید .)

۷) نشان‌دهید که درمسئلهٔ ۶ نیروی الکتروموتوری در یک‌واحد فاصله درامتداد خط از نقطهٔ P برابر $Ee^{-\alpha}$ است . e پایهٔ لگاریتم طبیعی است .

۸) نشان دهید که

(الف) اگر $I_B=0$ باشد ، $E_A=r_0I_A\,coth\,\alpha L$ است .

(ب) اگر $E_B=0$ باشد ، $E_A=r_0I_A\,th\,\alpha L$ است .

تمرین اضافی

نشان دهید که

۱) اگر $E_A>r_0I_A$ و $\tau=arg\ th\,\dfrac{r_0I_A}{E_A}$ باشد ، داریم :

$$E = E_A \, sech\, \tau \, ch\,(\tau - \alpha x) \quad , \quad I = I_A \, cosech\, \tau \, sh\,(\tau - \alpha x)$$

۲) اگر $E_A < r_\circ I_A$ و $\tau = arg\, th \dfrac{E_A}{r_\circ I_A}$ باشد ، داریم :

$$E = E_A \, cosech\, \tau \, sh\,(\tau - \alpha x) \quad , \quad I = I_A \, sech\, \tau \, ch\,(\tau - \alpha x)$$

۲۱۹- انتگرال توابع هذلولی . - در زیر چند دستور دیگر از انتگرالهای مقدماتی که مکمل شمارهٔ ۱۲۸ و شامل توابع هذلولی‌اند ، داده شده‌اند .

$$\int sh\, v\, dv = ch\, v + C \qquad (۲۴)$$

$$\int ch\, v\, dv = sh\, v + C \qquad (۲۵)$$

$$\int th\, v\, dv = ln\, ch\, v + C \qquad (۲۶)$$

$$\int coth\, v\, dv = ln\, sh\, v + C \qquad (۲۷)$$

$$\int sech^2 v\, dv = th\, v + C \qquad (۲۸)$$

$$\int cosech^2 v\, dv = -coth\, v + C \qquad (۲۹)$$

$$\int sech\, v\; th\, v\, dv = -sech\, v + C \qquad (۳۰)$$

$$\int cosech\, v\; coth\, v\, dv = -cosech\, v + C \qquad (۳۱)$$

درستی این دستورها ، بجز (۲۶) و (۲۷) ، بدون محاسبه ازدستورهای XXVII تا XXXII نتیجه میشود . برای اثبات دستور (۲۶) مینویسیم :

$$\int th\, v\, dv = \int \frac{sh\, v}{ch\, v}\, dv$$

$$=\int \frac{d(ch\, v)}{ch\, v}=ln\, ch\, v+C$$

اثبات دستور (۲۷) نیز شبیه به همین است .

مثال - دستورهای زیر را بدست آورید :

$$\int sech\, v\, dv = arc\, tg\, (sh\, v)+C \qquad (۱)$$

$$\int cosech\, v\, dv = ln\, th\, \frac{v}{۲}+C \qquad (۲)$$

حل - چون $sech\, v=\frac{۱}{ch\, v}=\frac{ch\, v}{ch^{۲} v}=\frac{ch\, v}{۱+sh^{۲} v}$ است ، داریم :

$$\int sech\, v\, dv=\int \frac{ch\, v\, dv}{۱+sh^{۲} v}=\int \frac{d(sh\, v)}{۱+sh^{۲} v}$$

$$=\int d[arc\, tg\, (sh\, v)]=arc\, tg\, (sh\, v)+C$$

برای بدست آوردن رابطهٔ (۲) مینویسیم (باشمارهٔ ۱۳۱ مقایسه کنید) :

$$cosech\, v=cosech\, v\, \frac{cosech\, v+coth\, v}{cosech\, v+coth\, v}$$

$$=\frac{cosech^{۲} v+cosech\, v\, coth\, v}{cosech\, v+coth\, v}$$

$$\int cosech\, v\, dv=-\int \frac{-cosech^{۲} v-cosech\, v\, coth\, v}{cosech\, v+coth\, v}\, dv$$

$$=-\int \frac{d(coth\, v+cosech\, v)}{coth\, v+cosech\, v}$$

$$=-ln\, (coth\, v+cosech\, v)+C$$

$$=-ln\left(\frac{ch\, v}{sh\, v}+\frac{۱}{sh\, v}\right)+C$$

$$= -ln\ (ch\ v+۱)+ln\ sh\ v+C$$

$$= ln\ \frac{sh\ v}{ch\ v+۱}+C = ln\ th\ \frac{v}{۲}+C$$

تمرین

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱) $\int sh^{۲} v\ dv = \frac{۱}{۴}\ sh\ ۲v - \frac{v}{۲} + C$

۲) $\int ch^{۲} v\ dv = \frac{۱}{۴}\ sh\ ۲v + \frac{v}{۲} + C$

۳) $\int th^{۲} v\ dv = v - th\ v + C$

۴) $\int coth^{۲} v\ dv = v - coth\ v + C$

۵) $\int sh^{۳} v\ dv = \frac{۱}{۳}\ ch^{۳} v - ch\ v + C$

۶) $\int ch^{۳} v\ dv = \frac{۱}{۳}\ sh^{۳} v + sh\ v + C$

۷) $\int th^{۳} v\ dv = ln\ ch\ v - \frac{۱}{۲}\ th^{۲} v + C$

۸) $\int th^{۴} v\ dv = v - th\ v - \frac{۱}{۳}\ th^{۳} v + C$

۹) $\int cosech^{۳} v\ dv = -\frac{۱}{۲}\ cosech\ v\ coth\ v - \frac{۱}{۲}\ ln\ th\ \frac{v}{۲} + C$

۱۰) $\int x\ sh\ x\ dx = x\ ch\ x - sh\ x + C$

۱۱) $\int cos\ x\ sh\ x\ dx = \frac{۱}{۲}\ (cos\ x\ ch\ x + sin\ x\ sh\ x) + C$

$$۱۲)\quad \int sh\,(mx)\,sh\,(nx) = \frac{۱}{m^۲-n^۲}\,[m\,sh\,(nx)\,ch\,(mx)$$

$$-n\,ch\,(nx)\,sh\,(mx)]+C$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

$۱۳)\quad \int sh^۴x\,dx$

$۱۴)\quad \int sech^۴ ۲x\,dx$

$۱۵)\quad \int sin\,x\,ch\,x\,dx$

$۱۶)\quad \int x\,ch\,x\,dx$

$۱۷)\quad \int x^۲ ch\,x\,dx$

$۱۸)\quad \int e^x\,sh\,x\,dx$

$۱۹)\quad \int e^{ax}\,ch\,x\,dx$

هریک از انتگرالهای زیر را با استفاده از تغییر متغیر مذکور پیدا کنید :

$۲۰)\quad \int \sqrt{x^۲-۴}\,dx \quad , \quad x = ۲ch\,v$

جواب : $\frac{x}{۲}\sqrt{x^۲-۴} - ۲arg\,ch\frac{x}{۲} + C$

$۲۱)\quad \int \frac{du}{(a^۲-u^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \quad , \quad u = a\,th\,z$

$۲۲)\quad \int \frac{(x+۲)dx}{x^۲+۲x+۵} \quad , \quad x = ۲sh\,z-۱$

۲۳) پاره خمی از منحنی زنجیر $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ راکه بین دو نقطهٔ $(۰ , a)$ و (x , y) محدود است ، در حول محور y ها دوران دهید و با استفاده از توابع هذلولی مساحت رویهٔ حاصل را حساب کنید .

۲۴) مرکز ثقل هندسی قطاع هذلولی $OAP_۱$ (شکل ۱۸۰ ب) را پیدا کنید

(با تمرین ۱۲ ی صفحهٔ ۵٦۵ مقایسه نمایید) .

جواب : $\bar{y}=\frac{۲}{۳}a\frac{ch\,v_۱-۱}{v_۱}$, $\bar{x}=\frac{۲}{۳}a\frac{sh\,v_۱}{v_۱}$

۲۲۰ - چند انتگرال دیگر . - از دستورهای XXXIII تا XXXVIII دستورهای زیر نتیجه میشوند . بعضی‌از این دستورها راکه مقدارشان در اینجا به صورتی از توابع هذلولی معکوس داده شده‌اند ، در شمارهٔ ۱۲۸ دیده‌ایم .

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^۲+a^۲}}=arg\,sh\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۲)$$ (تمام مقادیر v)

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^۲-a^۲}}=arg\,ch\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۳)$$ $(v\geqslant a)$

$$\int\frac{dv}{a^۲-v^۲}=\frac{۱}{a}\,arg\,th\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳٤)$$ $(v^۲<a^۲)$

$$\int\frac{dv}{v^۲-a^۲}=-\frac{۱}{a}\,arg\,coth\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۵)$$ $(v^۲>a^۲)$

$$\int\frac{dv}{v\sqrt{a^۲-v^۲}}=-\frac{۱}{a}\,arg\,sech\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳٦)$$ $(۰<v<a)$

$$\int\frac{dv}{v\sqrt{v^۲+a^۲}}=-\frac{۱}{a}\,arg\,cosech\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۷)$$ (تمام مقادیر v)

$$\int\sqrt{v^۲+a^۲}\,dv=\frac{v}{۲}\sqrt{v^۲+a^۲}+\frac{a^۲}{۲}\,arg\,sh\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۸)$$

$$\int\sqrt{v^۲-a^۲}\,dv=\frac{v}{۲}\sqrt{v^۲-a^۲}-\frac{a^۲}{۲}\,arg\,ch\,\frac{v}{a}+C \qquad (۳۹)$$

در دستورهای (۳۳) و (۳۹) باید مقدار مثبت کسینوس هیپربلیک معکوس و در دستور (۳٦) مقدار مثبت سکانت هیپربلیک معکوس راگرفت .

اثبات دستورهای (۳۲) و (۳۳) . - در دستور (F) بجای x ، $\frac{v}{a}$ میگذاریم ، داریم :

$$arg\,sh\,\frac{v}{a}=ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^{۲}}{a^{۲}}+۱}\right)=ln\,(v+\sqrt{v^{۲}+a^{۲}})-ln\,a$$

و از آنجا

$$ln\,(v+\sqrt{v^{۲}+a^{۲}})=arg\,sh\,\frac{v}{a}+ln\,a \qquad (۱)$$

به همین طریق از (G) رابطهٔ زیر نتیجه میشود :

$$ln\,(v+\sqrt{v^{۲}-a^{۲}})=arg\,ch\,\frac{v}{a}+ln\,a \qquad (۲)$$

این مقادیر را در دستور (۲۱) صفحهٔ ۳۱٤ میگذاریم ، دستورهای (۳۲) و (۳۳) بدست میایند .

اثبات دستورهای (۳٤) و (۳۵) . - در دستور (H) بجای x ، $\frac{v}{a}$ میگذاریم ، داریم :

$$\frac{۱}{۲}\,ln\,\frac{a+v}{a-v}=arg\,th\,\frac{v}{a} \qquad (۳)$$

از این تساوی و دستور (a ۱۹) ی صفحهٔ ۳۱۳ دستور (۳٤) نتیجه میگردد .

به همین طریق از دستور (I) و دستور (۱۹) ی صفحهٔ ۳۱۳ دستور (۳۵) بدست میاید [در (۱۹) ، $ln\,\frac{v-a}{v+a}=-ln\,\frac{v+a}{v-a}$ است] .

اثبات دستور (۳٦) . - چون

$$d\left(-\frac{۱}{a}\,arg\,sech\,\frac{v}{a}\right)=\frac{\frac{۱}{a}d\left(\frac{v}{a}\right)}{\pm\frac{v}{a}\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{a^{۲}}}}=\frac{dv}{\pm v\sqrt{a^{۲}-v^{۲}}}$$

است ، اگر علامت مثبت جلو رادیکال را بگیریم ، داریم :

$$\int\frac{dv}{v\sqrt{a^{۲}-v^{۲}}}=-\frac{۱}{a}\,arg\,sech\,\frac{v}{a}$$

اثبات دستور (۳۷) نیز به همین طریق است .

از تساویهای (۱) و (۲) و دستور (۲۳) ی صفحهٔ ۳۱٤ دستورهای (۳۸) و (۳۹) نتیجه میشوند .

یادآوری - چون

$$arg\ coth\ \frac{v}{a} = arg\ th\ \frac{a}{v} \quad \text{و} \quad arg\ sech\ \frac{v}{a} = arg\ ch\ \frac{a}{v}$$

و

$$arg\ cosech\ \frac{v}{a} = arg\ sh\ \frac{a}{v}$$

است ، انتگرالهای (۳۰) تا (۳۷) را میتوان به صورتهایی نوشت که برای استفاده از جدول صفحهٔ ۶۹۷ مناسبترند .

مثال - دستور (۳۷) را با تغییر متغیر $v = a\ cosech\ z$ بدست آورید (با شمارهٔ ۱۳۵ مقایسه کنید) .

حل - داریم

$$\sqrt{v^2 + a^2} = \sqrt{a^2 cosech^2 z + a^2} = a\ coth\ z$$

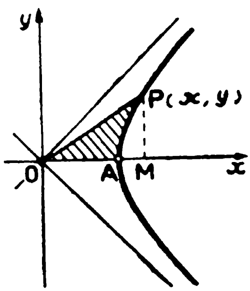
و

$$dv = -a\ cosech\ z\ coth\ z\ dz$$

بنابراین

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{-a\ cosech\ z\ coth\ z\ dz}{a\ cosech\ z \times a\ coth\ z} = -\frac{1}{a} z + C$$

چون $z = arg\ cosech\ \frac{v}{a}$ است ، دستور (۳۷) بدست میاید .



شکل ۱۸٤

تمرین

۱) شکل ۱۸٤ خم نمایش هذلولی متساوی‌الساقین $x^2 - y^2 = a^2$ است. بادرنظر گرفتن مطالب شمارهٔ ۱٤۲ نشان دهید که :

(الف) $(\text{مساحت مثلث } OMP) = (\text{مساحت } AMP) - \frac{1}{2} a^2 arg\ ch\ \frac{x}{a}$

(ب) $(\text{مساحت قطاع } OAP) = \frac{1}{2} a^2 arg\ ch\ \frac{x}{a} - \frac{1}{2} a^2 v$

دراین دو تساوی $x = a\,ch\,v$ است . (بدین‌ترتیب راه دیگری برای اثبات قضیهٔ شمارهٔ ۲۱۵ بدست میاید .)

۲) دو بسط زیر را با انتگرال گیری (شمارهٔ ۱۹۶) بدست آورید :

$$\arg th\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

$$\arg sh\, x = x - \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5} - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۳) $\int \arg sh\, x\, dx = x \arg sh\, x - \sqrt{1+x^2} + C$

۴) $\int \arg th\, x\, dx$

۵) $\int x \arg ch\, x\, dx$

مقدار انتگرالهای زیر را با استفاده از توابع هذلولی بدست آورید :

۶) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$

۷) $\int_0^2 \frac{dx}{25-4x^2}$

۸) $\int_3^5 \sqrt{x^2-9}\, dx$

۹) با استفاده از توابع هذلولی طول پاره خمی از سهمی $x^2 = 4y$ را که بین دو نقطهٔ $(0\,,\,0)$ و $(4\,,\,4)$ قرار دارد ، حساب کنید .

جواب : $\sqrt{20} + \arg sh\, 2 = 5{,}92$

۱۰) مساحت سطح محدود بین منحنی زنجیر $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ و خط $y = 2a$ چقدر است ؟

۱۱) شتاب جسمی در سقوط آزاد با دستور $a=۳۲-\frac{۱}{۲}v^۲$ (واحد طول فوت) تعیین میشود . میدانیم که وقتی $t=۰$ است ، $v=۰$ و $s=۰$ است. مقدار v و s را حساب کنید . جواب : $s=۲\ln ch\, ۴t$ و $v=۸th\, ۴t$

۲۲۱- گودرمانین * . - تابع $arc\, tg\, (sh\, v)$ را که اغلب در ریاضیات [مثلاً در (۱) مثال شمارهٔ ۲۱۹] پیش میاید ، گودرمانین v مینامند و با نشانهٔ $gd\, v$ نشان میدهند.

بدین ترتیب :

$$gd\, v=arc\, tg\, (sh\, v) \qquad (۱)$$

اگر v تابعی از x باشد ، مشتق آن به صورت زیر است :

$$\frac{d}{dx} gd\, v=sech\, v\, \frac{dv}{dx} \qquad \text{XXXIX}$$

اثبات . - از دو طرف (۱) نسبت به v مشتق میگیریم :

$$\frac{d}{dv}\, gd\, v=\frac{ch\, v}{۱+sh^۲ v}$$

اما

$$۱+sh^۲v=ch^۲v \quad \text{و} \quad \frac{۱}{ch\, v}=sech\, v$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}\, gd\, v=sech\, v\, \frac{dv}{dx}$$

با درنظرگرفتن تعریف (۱) و شمارهٔ ۷۷ داریم :

$$\begin{aligned} &gd\,(۰)=۰ \quad , \quad gd\,(-v)=-gd\,(v) \\ &gd\,(+\infty)=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad gd\,(-\infty)=-\frac{\pi}{۲} \end{aligned} \qquad (۲)$$

مقدار $gd\, v$ بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $+\frac{\pi}{۲}$ است و وقتی v زیاد میشود ، $gd\, v$ نیز زیاد میگردد (زیرا $sech\, v>۰$ است) .

* این نامگذاری بدان سبب است که Gudermann ، ریاضی‌دان آلمانی ، در این زمینه کار کرده و اثرش دراین باره به سال ۱۸۳۰ منتشر شده است .

در جدول مقابل مقدار $gd\ v$ به ازای چند مقدار از v داده شده است.

v	$gd\ v$
۰ر۰	۰ر۴۸۰
۱ر۰	۰ر۸۶۴
۱ر۵	۱ر۱۳۲
۲ر۰	۱ر۳۰۲
۲ر۵	۱ر۴۰۷
۳ر۰	۱ر۴۷۱
۳ر۵	۱ر۵۱۰
۴ر۰	۱ر۵۳۴
۴ر۵	۱ر۵۴۹
۵ر۰	۱ر۵۵۷

بنابر دستور (۱) شمارهٔ ۲۱۹

$$\int sech\ v\ dv = gd\ v + C \qquad (۴۰)$$

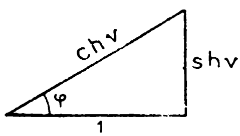
برای پیدا کردن تابع معکوس $gd\ v$ (شمارهٔ ۳۹) مینویسیم :

$$\varphi = arc\ tg\ (sh\ v) \quad \left(-\frac{\pi}{۲} < \varphi < \frac{\pi}{۲}\right) \qquad (۳)$$

v را از معادلهٔ اخیر بدست میاوریم :

$$v = arg\ sh\ (tg\ \varphi) \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۳) نشان میدهد که $tg\ \varphi = sh\ v$ است و چون بنابر تساوی (B) ، $ch^۲ v = ۱ + sh^۲ v$ است ، وقتی $v > ۰$ است ، میتوان توابع مثلثاتی φ را از مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۸۵ بدست‌آورد. بدین ترتیب



شکل ۱۸۵

$sin\ \varphi = th\ v$ ، $cos\ \varphi = sech\ v$ ، ...

پس تابع معکوس * (۴) را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$v = ln\ (sec\ \varphi + tg\ \varphi) \qquad (۵)$$

اثبات ـ در دستور (F) شمارهٔ ۲۱۶ بجای x ، $tg\ \varphi$ میگذاریم ، با درنظرگرفتن $۱ + tg^۲\varphi = sec^۲\varphi$ ، رابطهٔ (۵) بدست میاید .

بعکس اگر رابطهٔ (۵) داده شده باشد ، میتوان تساوی $\varphi = gd\ v$ را نوشت .

اثبات ـ تساوی (۵) را به صورت نمایی مینویسیم :

$$sec\ \varphi + tg\ \varphi = e^v \quad \Longrightarrow \quad tg\ \varphi - e^v = -sec\ \varphi$$

* در بعضی از کتابهای آمریکایی نشانهٔ $gd^{-۱}\varphi$ را بکار برده‌اند $(v = gd^{-۱}\varphi)$.

دو طرف تساوی سمت راست را مجذور میکنیم ، بجای $sec^{۲}\varphi$ ، $۱+tg^{۲}\varphi$ میگذاریم و مختصر مینماییم ، داریم :

$$-۲tg\,\varphi\cdot e^{v}+e^{۲v}=۱$$

ازاین معادله $tg\,\varphi$ را بدست میاوریم :

$$tg\,\varphi=\frac{e^{v}-e^{-v}}{۲}=sh\,v$$

بنابراین

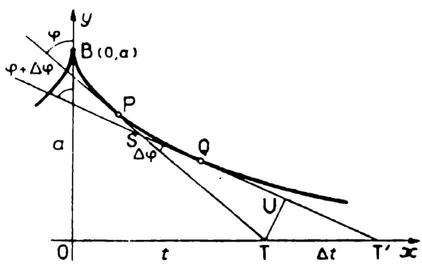
$$\varphi=arc\,tg\,(sh\,v)=gd\,v$$

مثال - در یک تراکتریس

طول قطعهٔ مماس PT را که بنابر تعریف ثابت است ، a ،

طول نقطهٔ تقاطع خط مماس با محور x ها را t ،

و زاویه‌ای را که خط مماس با محور y ها میسازد ، φ مینامیم .



شکل ۱۸۶

نیز فرض میکنیم که وقتی $t=۰$ است ، $\varphi=۰$ است .

دراین صورت نقطهٔ $B(۰\,,a)$ روی خم است .

نشان میدهیم که :

$$\varphi=gd\left(\frac{t}{a}\right)\qquad(٦)$$

اثبات - وقتی t در دست باشد ، φ را میتوان تعیین کرد . بنابراین φ تابعی از t است . مقادیر t و φ را برای مماس به خم در نقطهٔ Q که در مجاورت P است ، بترتیب $t+\Delta t(=OT')$ و $\varphi+\Delta\varphi$ فرض میکنیم . از نقطهٔ T عمودی به QT′

فرود میاوریم و پای عمود را U مینامیم . اگر محل تقاطع دو مماس را S بنامیم ، در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ UTT' و STU داریم :

$$TU = TT' \cos \widehat{UTT'} \quad \text{و} \quad TU = TS \sin \widehat{TSU}$$

بنابراین
$$TT' \cos \widehat{UTT'} = TS \sin \widehat{TSU}$$

اما $\widehat{UTT'} = \varphi + \Delta\varphi$ ، $\widehat{TSU} = \Delta\varphi$ ، $TT' = \Delta t$ است ، پس :

$$\Delta t \cos(\varphi + \Delta\varphi) = TS \sin \Delta\varphi$$

اگر Q روی خم بسمت P میل کند ، $\Delta\varphi$ بسمت صفر میل مینماید. بنابراین Δt و $\Delta\varphi$ دوبینهایت کوچک‌اند . دراین صورت S بسمت P و طول TS بسمت a میگراید . پس بنابرقضیهٔ تعویض بینهایت کوچکها ، شمارهٔ ۹۸ ، وتساوی (B) ی شمارهٔ ۶۸ داریم :

$$dt \cos \varphi = a\, d\varphi \quad \Longrightarrow \quad d\frac{t}{a} = \sec \varphi\, d\varphi$$

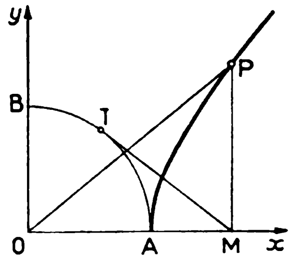
از دو طرف تساوی سمت راست انتگرال میگیریم ، با درنظرگرفتن این که وقتی $t = ٠$ است ، $\varphi = ٠$ است ، داریم :

$$\frac{t}{a} = \ln(\sec \varphi + tg\, \varphi)$$

پس بنابر (۵)
$$\varphi = gd\left(\frac{t}{a}\right)$$

تمرین

۱) شکل ۱۸۷ دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ وهذلولی متساوی‌الساقین $x^2 - y^2 = 1$ را در ناحیهٔ اول مختصات نشان میدهد . P یک نقطه از هذلولی و MP موازی محور



شکل ۱۸۷

y هاست. MT ، مماس به دایره را رسم میکنیم. زاویهٔ AOT را φ و مساحت قطاع هذلولی OAP را $\frac{v}{۲}$ مینامیم (شمارهٔ ۲۱۰). نشان دهید که $\varphi = gd\, v$ است.

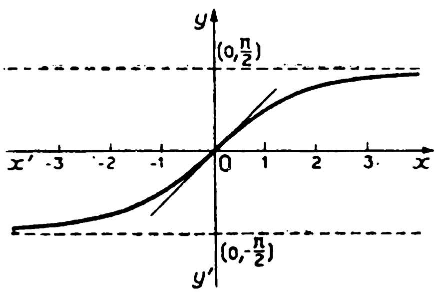
۲) نشان دهید که

(الف) $$gd\, v = ۲ arc\, tg\, e^v - \frac{\pi}{۲}$$

(ب) $$\int sh\, v\, th\, v\, dv = sh\, v - gd\, v + C$$

۳) خم نمایش $y = gd\, x$ را رسم کنید و مقدار y و y' را به ازای x=۱ پیدا نمایید (شکل ۱۸۸ را ببینید).

جواب : $y = ۰٫۸٦$ ، $y' = ۰٫٦۵$



شکل ۱۸۸

٤) در مثال صفحهٔ ۷۲۸ ، اگر مختصات نقطهٔ P را (x , y) فرض کنیم. نشان دهید که

$$x = t - a\, sin\, \varphi \quad , \quad y = a\, cos\, \varphi$$

از روابط اخیر و رابطهٔ (٦) ، معادلات پارامتری تراکتریس یعنی

$$x = t - a\, th\frac{t}{a} \quad , \quad y = a\, sech\frac{t}{a}$$

را نتیجه بگیرید و سپس معادلهٔ قائم آن را بدست آورید .

۵) درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int sech^{3} v\, dv = \frac{1}{2}\, sech\, v\ th\, v + \frac{1}{2}\, gd\, v + C$$

۶) طول قطعهٔ مماس به خمی در هر نقطه (شمارهٔ ۴۳) مقدار ثابت a است. (الف) نشان دهید که $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^{2}-y^{2}}}$ است . (ب) جواب این معادله را با تغییر متغیر $y = a\, sech\, \frac{t}{a}$ پیدا کنید ونشان دهید که جواب خصوصی نظیر به «$x=0$ ، $t=0$» معادلهٔ تراکتریس مذکور در تمرین ۴ را بدست میدهد .

۷) حد هریک از کسرهای زیر را با مشتق گیری بدست آورید :

$$\text{(a)}\ \lim_{x \to 0} \frac{gd\, x - x}{x^{3}} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x \to 0} \frac{gd\, x - \sin x}{x^{5}}$$

جواب : (a) $-\frac{1}{6}$ ، (b) $\frac{1}{30}$

۸) با استفاده از بسط مذکور در تمرین ۱۴ ی شمارهٔ ۲۱۵ یعنی

$$gd\, x = x - \frac{1}{6} x^{3} + \frac{1}{24} x^{5} - \frac{61}{5040} x^{7} + \cdots$$

مقدار gd ۰٫۵ را تا چهار رقم دقیق اعشار حساب کنید . جواب : ۰٫۴۸۰۴

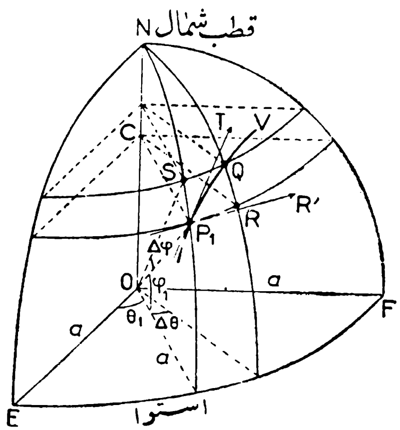
۹) با استفاده از دستورهای (۲) و (۴) و (۵) صفحه‌های ۵ و ۶ نشان دهید که میتوان معادلهٔ (۵) صفحهٔ ۷۲۷ را به صورت زیر نوشت :

$$v = ln\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

۲۲۲- نقشهٔ مرکاتر* .- شکل ۱۸۹ یک هشتم سطح زمین را نشان میدهد :

* نقشه بردار نامی ، Gerardus Mercator (۱۵۱۲-۱۵۹۴) ، نقشهٔ جهانش را به سال ۱۵۶۹ منتشر ساخت . این نام لاتینی شدهٔ Gerhard Kremer است .

N قطب شمال ، EF استوا ، θ_1 طول جغرافیایی و φ_1 عرض جغرافیایی نقطهٔ P_1 است . نقطهٔ Q با طول جغرافیایی $\theta_1+\Delta\theta$ و عرض جغرافیایی $\varphi_1+\Delta\varphi$ در مجاورت نقطهٔ P_1 روی خم P_1QV قرار دارد . مدارات و نصف‌النهارات ماربر نقاط P_1 و Q (که در شکل ۱۸۹ رسم شده‌اند) یک چهارضلعی کروی تشکیل داده‌اند. ما در زیرعباراتی برای قوسهای مستدیر RQ و P_1R بدست میاوریم .



شکل ۱۸۹

نقطهٔ O مرکزقوسهای RQ و P_1S است . این دو قوس با یکدیگر برابرند و زاویهٔ مرکزی هردوی آنها $\Delta\varphi$ است . داریم :

$$\widehat{RQ}=\widehat{P_1S}=a\,\Delta\varphi \qquad (۱)$$

از طرفی C مرکز قوس P_1R است . زاویهٔ مرکزی قوس اخیر $\Delta\theta$ و لذا $\widehat{P_1R}=CP_1\cdot\Delta\theta$ است . اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ OP_1C (C قائمه) $CP_1=a\cos\varphi_1$ است ، پس

$$\widehat{P_1R}=a\cos\varphi_1\,\Delta\theta \qquad (۱')$$

خط P_1R' درنقطهٔ P_1 به مدار P_1R و خط P_1T در همین‌نقطه به خم P_1QV

مماس است * . بنابراین زاویهٔ بین خم و مدار در نقطهٔ P_1 همان زاویهٔ $R'P_1T$ است و

$$tg\ \widehat{R'P_1T} = sec\ \varphi_1 \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)_1 \qquad (۲)$$

$\frac{d\varphi}{d\theta}$ از معادلهٔ

$$\theta = f(\varphi) \qquad (۳)$$

بدست میاید . این معادله رابطهٔ بین طول و عرض جغرافیایی نقاط خم P_1QV است .

اثبات رابطهٔ (۲) . ـ بنابر قضیهٔ تعویض بینهایت کوچکها ، شمارهٔ ۹۸ ، میتوان نشان داد که **:

$$tg\ \widehat{R'P_1T} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\widehat{RQ}}{\widehat{P_1R}} \qquad (٤)$$

اگر مقادیر (۱) و ('۱) را در (٤) بگذاریم ، رابطهٔ (۲) بدست میاید .

در نقشهٔ مرکاتر نقطه‌ای از سطح زمین که مختصات جغرافیایی آن θ و φ است، در یک دستگاه قائم با مختصات

$$x = \theta \quad , \quad y = ln\ (sec\ \varphi + tg\ \varphi) \qquad (٥)$$

نشان داده شده است . بعکس

$$\theta = x \quad , \quad \varphi = gd\ y \qquad (٦)$$

است . در روابط (٥) و (٦) ، θ و φ برحسب رادیان است . در نقشهٔ مرکاتر نصف‌النهارات (θ = مقدار ثابت) با خطوط موازی محور y ها و مدارات (φ = مقدار ثابت) با خطوط موازی محور x ها نشان داده میشوند. دراین صورت معادلات پارامتری خم (۳) به صورت زیر درمیایند :

---

* بنابر تعریف شمارهٔ ۲۸ ، حد قاطع P_1Q ، وقتی نقطهٔ Q روی خم P_1Q بسمت P میل کند و برآن‌منطبق‌گردد ، مماس P_1T است .

** جزئیات اثبات این مطلب در تمرینهای اضافی صفحهٔ ٧٤٠ ذکر شده است . باید توجه داشت که در مثلث منحنی‌الخط P_1RQ ، قوس RQ مقابل زاویهٔ P_1 و قوس P_1R مجاور آن است .

$$x=f(\varphi) \quad , \quad y=ln\,(sec\,\varphi+tg\,\varphi) \qquad (۷)$$

قضیه - زاویهٔ بین یك خم کروی و یك مدار برابر زاویهٔ نظیر درنقشهٔ مرکاتر است .

اثبات - فرض میکنیم $(x_1\,,\,y_1)$ مختصات نقطه‌ای از خم (۷) است که به ازای $\varphi=\varphi_1$ بدست آمده است. مدار مار براین نقطه در نقشه خط $y=y_1$ است. پس باید نشان داد که در خم (c) :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=sec\,\varphi_1\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)_1 \qquad \text{[با استفاده از (۲)]} \qquad (۸)$$

بااستفاده از روابط (۷) و (۳) میتوان نوشت :

$$\frac{dy}{d\varphi}=sec\,\varphi \quad , \quad \frac{dx}{d\varphi}=f'(\varphi)=\frac{d\theta}{d\varphi}$$

از تساویهای اخیر و دستورهای (A) ی شمارهٔ ۸۱ و (C) ی شمارهٔ ۳۹ ، رابطهٔ (۸) بدست میاید .

نتیجهٔ I . - زاویهٔ بین‌دوخم کروی P_1QR و $P_1Q'R'$ برابر زاویهٔ بین دوخم نظیر از نقشه است . پس دراین نوع نقشه برداری زاویهٔ بین دو خم محفوظ میماند .

نتیجهٔ II - هر خط مستقیم از نقشه ، با شیب $tg\,\alpha$ ، به خمی ازکره نظیر است که تمام مدارات را با زاویهٔ α قطع میکند . این خم را لکسدرم * مینامند .

در تمام طول یک لکسدرم رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\varphi=gd\,(\theta\,tg\,\alpha+b) \qquad (۹)$$

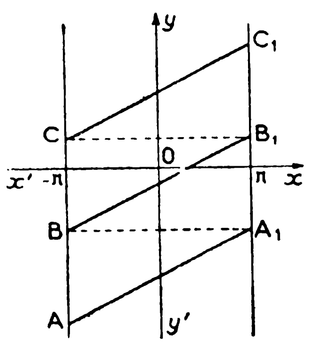
این تساوی از روابط (٦) و $y=x\,tg\,\alpha+b$ حاصل میگردد . مسیر هرکشتی که در یک امتداد حرکت کند ، یک لکسدرم است. دردستگاه (٥) ، θ و بنابراین x ، درفاصلهٔ $[-\pi\ ,\ +\pi]$ قرار دارد . اما y میتواند هرمقداری را بگیرد (شمارهٔ ۲۲۱) . پس نقشهٔ سطح زمین در نواری از صفحهٔ xy که بین دو خط $x=-\pi$ و $x=+\pi$ است ، میفتد .

* Loxodrome

از جدول صفحهٔ ۷۲۷ میتوان عرض جغرافیایی هریک از خطوط افقی نقشه، مقدار ثابت $y=$، را برحسب درجه بدست‌آورد.

y	عرض جغرافیایی
۰	۰°
۰٫۵	۲۷° ۳۱′
۱٫۰	۴۹° ۳۶′
۱٫۵	۶۴° ۵۱′
۲	۷۴° ۳۵′
۳	۸۴° ۱۸′
۴	۸۷° ۵۴′
۵	۸۹° ۱۴′

در نقشه، یک لکسدرم با مجموعه‌ای از پاره خطهای موازی مانند AA_1، BB_1، CC_1، ... نشان‌داده میشود. خطوط BA_1، CB_1، ... موازی محور x ها هستند (شکل ۱۹۰). بنابر نتیجهٔ I نقشهٔ مرکاتریک تصویر و نمایش «همشکل *» است، یعنی شکل یک ناحیهٔ کوچک محفوظ میماند. مثلاً یک مثلث ازسطح زمین که بین سه لکسدرم محدود است**، در نقشه بایک مثلث‌نشان داده میشودوزاویه‌های نظیر دردو شکل برابرند. اما تغییر مساحت یک قطعه ازسطح زمین که براثر نقشه برداری حاصل میگردد، بستگی به فاصلهٔ آن از استوا دارد. تمرین ۴ صفحهٔ ۷۳۸ این مطلب‌راروشن میسازد.



شکل ۱۹۰

۲۲۳- روابط بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولی

.- فرض کنیم که در تابع نمایی e^v، v عدد مختلط $x+iy$ است(x و y دوعدد حقیقی و $i=\sqrt{-1}$ است). بنابر تعریف، تساوی

---

* The representation is conformal

** خطوط $x=-\pi$ و $x=+\pi$ یک نصف‌النهار را نشان میدهند (۱۸۰° غربی یا ۱۸۰° شرقی). دراینجا فرض برآن است که این نصف‌النهار مثلث منحنی‌الخط را قطع نمیکند. در شکل ۱۹۰، A_1 و B یک نقطه و B_1 و C یک نقطهٔ دیگر از سطح زمین را نشان میدهند.

$$e^{x+iy}=e^x\, e^{iy}=e^x\,(\cos y+i\sin y) \tag{۱}$$

نیز برقرار است . اگر $x=۰$ باشد ، (صفحهٔ ٦٥٥ را ببینید) داریم :

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{۲}$$

y را به $-y$ تبدیل میکنیم ، رابطهٔ اخیر به صورت

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y \tag{۳}$$

درمیاید . ازمعادلات (۲) و (۳) ، $\sin y$ و $\cos y$ را پیدا میکنیم :

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{۲i} \quad , \quad \cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{۲} \tag{٤}$$

در (٤) سینوس وکسینوس یک متغیر حقیقی با عباراتی از توابع نمایی با نماهای موهومی بیان شده‌اند .

دستورهای (٤) و (A) تعریفهای توابع سینوس وکسینوس را برای وقتی که متغیر عدد مختلطی مانند z است ، مطرح میسازند . بنابر تعریف مینویسیم :

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i} \quad , \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} \tag{٥}$$

$$sh\, z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{۲} \quad , \quad ch\, z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{۲}$$

دیگرتوابع مثلثاتی و هذلولی‌از متغیر مختلط z نیز با همان نسبتهایی تعریف میشوند که به هنگام حقیقی بودن متغیر تعریف شده‌اند .

از روابط (٥) تساویهای زیر نتیجه میشوند :

$$sh\, iz=i\sin z \quad , \quad ch\, iz=\cos z \tag{L}$$

زیرا $i\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲}=sh\, iz$ و ...

اگر دو طرف روابط (L) را بیکدیگر تقسیم کنیم ، داریم :

$$th\, iz=i\, tg\, z \tag{٦}$$

علت شباهتی که بین بعضی‌ازدستورهای این فصل ودستورهای نظیر از توابع مثلثاتی موجود است ، بادستورهای (L) و (٦) بیان شده است(مثال ۲ ی زیر را ببینید) . طرفهای راست روابط (٥) را میتوان به صورت اعداد مختلط نوشت . دراین صورت قسمت حقیقی آنها تنها شامل توابع مثلثاتی و هذلولی از متغیرهای حقیقی است. مثال ۱ زیر این مطلب را روشن میسازد .

مثال ۱- دستور زیر را پیدا کنید :

$$sh\,(x+iy)=sh\,x\,cos\,y+i\,ch\,x\,sin\,y \qquad (۷)$$

حل - اگر در رابطهٔ (٥) بجای z ، $x+iy$ بگذاریم ، داریم :

$$sh\,(x+iy)=\frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{۲} \qquad (۸)$$

$$=\frac{e^{x}\,(cos\,y+i\,sin\,y)-e^{-x}\,(cos\,y-i\,sin\,y)}{۲} \qquad (۹)$$

بنابر روابط (۱) شمارهٔ ۲۱۰ ، اگر $v=x$ باشد ، داریم :

$$e^{x}=ch\,x+sh\,x \quad , \quad e^{-x}=ch\,x-sh\,x$$

این مقادیر را در رابطهٔ (۹) میگذاریم و مختصر میکنیم ، رابطهٔ (۷) بدست میاید. بجای i ، $-i$ میگذاریم ، رابطهٔ (۷) به صورت زیر درمیاید .

$$sh\,(x-iy)=sh\,x\,cos\,y-i\,ch\,x\,sin\,y$$

مقایسهٔ طرف راست رابطهٔ اخیر و طرف راست رابطهٔ (۷) بسیار جالب است .

مثال ۲- بااستفاده از تعریفهای (٥) روابط زیر را مستقیماً بدست آورید :

$$sin^{۲}z+cos^{۲}z=۱ \quad , \quad ch^{۲}z-sh^{۲}z=۱$$

حل - راه اثبات همان است که برای نشان دادن رابطهٔ (B) ی شمارهٔ ۲۱۰ ذکر شده است .

رابطهٔ اول را میتوان به طریق زیر از رابطهٔ دوم بدست آورد :

بجای z ، iv میگذاریم ، تساوی $ch^{۲}iv-sh^{۲}iv=۱$ حاصل میگردد . اما

بنابر روابط (L) ، $ch\,iv = cos\,v$ و $sh\,iv = i\,sin\,v$ است . بنابراین $cos^2 v + sin^2 v = 1$ میشود .

تمرین

۱) با استفاده از بینهایت کوچکها نشان دهید که تغییر فاصلهٔ بین دو خط موازی محور x ها که در نقشهٔ مرکاتر دو مدار به عرضهای جغرافیایی φ_1 و $\varphi_1 + \Delta\varphi$ را نشان میدهند ، مانند تغییر $sec\,\varphi_1$ است .

۲) در طول یک لکسدرم $\varphi = gd\,(\theta\,tg\,\alpha + b)$ است. با مشتق گیری نشان دهید که $tg\,\alpha = sec\,\varphi \dfrac{d\varphi}{d\theta}$ است .

۳) h، ارتفاع منطقه‌ای از کره که در بین مدارهای $\varphi = \varphi_2$ و $\varphi = \varphi_1$ $(\varphi_2 > \varphi_1)$ محدود است ، برابر $a(sin\,\varphi_2 - sin\,\varphi_1)$ است (شکل ۱۸۹ را ببینید) . اگر $y = y_2$ و $y = y_1$ مدارهای نظیر در نقشه باشند ، نشان دهید که

$$h = a(th\,y_2 - th\,y_1) \qquad \text{(الف)}$$

(ب) اگر $\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi$ باشد ، $dy = \dfrac{1}{a} sec^2\varphi_1 dh$ است .

۴) با استفاده از حکم ب تمرین ۳ نشان دهید که مناطق کم ارتفاعی که مساحت آنها برابر و عرض مدار تحتانی آنها بترتیب °۰ ، °۳۰ ، °۴۵ و °۶۰ است ، در نقشهٔ مرکاتر با مستطیلهایی نشان داده میشوند که مساحت آنها بترتیب متناسب با اعداد ۳ ، ۴ ، ۶ و ۱۲ است (مساحت یک منطقه برابر است با حاصلضرب ارتفاع منطقه در محیط یک دایرهٔ عظیمه) .

۵) امتداد یک خم کروی را در دو حالت زیر مطالعه کنید : (الف) وقتی $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = 0$ است ، (ب) وقتی $\dfrac{d\varphi}{d\theta}$ بینهایت میشود .

۶) با روش مذکور در مثال ۱ دستورهای زیر را بدست آورید :

$$ch\,(x + iy) = ch\,x\,cos\,y + i\,sh\,x\,sin\,y \qquad \text{(الف)}$$

$$sin\,(x + iy) = sin\,x\,ch\,y + i\,cos\,x\,sh\,y \qquad \text{(ب)}$$

(پ) $\cos(x+iy)=\cos x\, ch\, y - i \sin x\, sh\, y$

بااستفاده از این روابط مقادیر $ch(x-iy)$ ، $\sin(x-iy)$ و $\cos(x-iy)$ را بنویسید .

۷) نشان دهید که :

(الف) $sh\left(i\frac{\pi}{۲}\pm x\right)=i\, ch\, x$

(ب) $ch\left(i\frac{\pi}{۲}\pm x\right)=\pm i\, sh\, x$

۸) مقادیر زیر را تا دو رقم اعشار بدست آورید :

(الف) $sh(۱٫۵+i)$ ، (ب) $ch(۱-i)$

(پ) $\cos(۰٫۸+۰٫۵\,i)$ ، (ت) $\sin(۰٫۵+۰٫۸\,i)$

جواب : (الف) $۱٫۱۵+۱٫۹۸\,i$ ، (پ) $۰٫۷۸-۰٫۳۷\,i$

۹) مقدار هریک از صورتهای مبهم زیر را پیدا کنید :

(الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{sh\, nx}{sh\, x}$ جواب : n

(ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{sh^۲ x}{x^۲}$ ۱

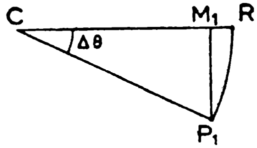
(پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{sech\, x-۱}{x^۲}$ $-\frac{۱}{۲}$

(ت) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{sh\, x-x}{x^۳}$ $\frac{۱}{۶}$

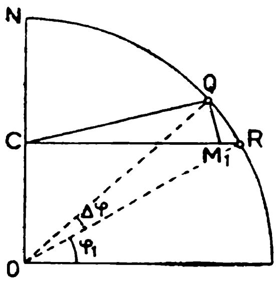
(ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-th\, x}{x^۳}$ $\frac{۱}{۳}$

تمرین اضافی

۱) در شکل ۱۸۹ ، P_1M_1 عمود بر CR رسم شده و لذا برصفحهٔ نصف‌النهار NQR عمود است ، پس مثلث P_1QM_1 قائم‌الزاویه و $tg\,\widehat{M_1P_1Q}=\dfrac{M_1Q}{P_1M_1}$ است(وتر P_1Q رسم نشده است) . وقتی $\Delta\theta$ بسمت صفر میل میکند ، خط P_1M_1 بسمت مماس P_1R' و زاویهٔ M_1P_1Q بسمت زاویهٔ $R'P_1T$ میل مینماید . بنابراین



شکل ۱۹۱



شکل ۱۹۲

$$(۱۰)\qquad tg\,\widehat{R'P_1T}=\lim_{\Delta\theta\to ۰}\frac{M_1Q}{P_1M_1}$$

این رابطه را با رابطهٔ (٤) شمارهٔ ۲۲۲ مقایسه کنید و نشان دهید که

(الف) $\lim\limits_{\Delta\theta\to ۰}\dfrac{P_1M_1}{\text{قوس } P_1R}=۱$ (شکل ۱۹۱ را ببینید .)

(ب) $\lim\limits_{\Delta\theta\to ۰}\dfrac{M_1Q}{\text{قوس } RQ}=۱$ (شکل ۱۹۲ را ببینید . این شکل نصف‌النهار NQR را نشان میدهد) . در مثلث M_1QR نشان دهید که وقتی $\Delta\theta$ و $\Delta\varphi$ از یک مرتبه‌اند (شمارهٔ ۹۹) ، مرتبهٔ بینهایت کوچک M_1R از مرتبهٔ QR بالاتر است . سپس مسئلهٔ صفحهٔ ۲٤۰ را ببینید .

با استفاده از روابط (الف) و (ب) و قضیهٔ تعویض بینهایت کوچکها ، شمارهٔ ۹۸ ، نشان دهید که رابطهٔ (۱۰) به صورت رابطهٔ (٤) شمارهٔ ۲۲۲ درمیاید .

۲) اگر ds_1 جزء طول قوس یک خم از کرهٔ شمارهٔ ۲۲۲ باشد ، نشان دهید که

$(P_1Q \text{ وتر})^2 = \overline{P_1M_1}^2 + \overline{M_1Q}^2$ ، ۱۸۹ درشکل] $.ds_1^2 = a^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\theta^2)$

و $\lim \frac{P_1Q \text{ وتر}}{P_1Q \text{ قوس}} = 1$ است .[

۳) اگر ds دیفرانسیل طول قوس یک خم‌در نقشهٔ مرکاتر باشد ، نشان دهید که $ds^2 = \sec^2\varphi(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\theta^2)$ است (اگر با تمرین ۲ مقایسه‌کنیم ، داریم : $(ds_1^2 = a^2\cos^2\varphi\, ds^2$.

٤) طول یک پاره خم لکسدرم راکه بین دو نقطه با اختلاف عرض جغرافیایی $\Delta\varphi$ قرار دارد ، بدست آورید . جواب : $a \operatorname{cosec} \alpha\, \Delta\varphi$ (a شعاع کرهٔ زمین است)

٥) نشان دهیدکه اگر در چهار دستور اول (٤) صفحهٔ ٦ و دستورهای (D) و (E) ی صفحهٔ ٦۹۸ بجای x ، y ، v و w اعداد مختلط بگذاریم ، درستی دستورها محفوظ میماند [از تعریفهای (٥) استفاده‌کنید] .

٦) بااستفاده از نتایج تمرین اضافی ٥ و تساویهای (L) دستورهای تمرین ٦ صفحهٔ ۷۲۸ را ثابت‌کنید .

۷) نشان دهید که $th\,(x+iy) = \frac{sh\, 2x + i \sin 2y}{ch\, 2x + \cos 2y}$ است .

۸) با استفاده از تساوی تمرین اخیر دستوری برای $tg\,(x+iy)$ پیداکنید .

فصل بیست و سوم

مشتقهای جزئی

۲۲۴- توابع چند متغیر - پیوستگی . - درفصلهای‌قبل‌در بارهٔ موارد استعمال دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیر صحبت کرده‌ایم . اکنون به مطالعهٔ توابع چند متغیر مستقل میپردازیم . بسیاری از دستورهای ریاضیات مقدماتی مثالهای ساده‌ای از این نوع توابع‌اند. مثلاً دستوری که v ، حجم یک استوانهٔ قائم دوار را میدهد ، عبارتست‌از

$$v = \pi x^{۲} y \qquad (۱)$$

v تابعی از دو متغیر مستقل x (شعاع قاعده) و y (ارتفاع) است . به همین ترتیب در دستوری که u ، مساحت یک مثلث دلخواه را میدهد :

$$u = \frac{۱}{۲} xy \sin \alpha \qquad (۲)$$

u تابعی از سه متغیر مستقل x و y و α (دو ضلع و زاویهٔ بین آنها) است .

روشن است که میتوان به متغیرهای طرف راست (۱) و (۲) مقادیر دلخواهی که مستقل از یکدیگرند ، نسبت داد .

مکان هندسی نقاط $M(x, y, z)$ در یک دستگاه مختصات قائم ، بشرط آنکه x و y و z نقطهٔ M در رابطهٔ

$$z = f(x, y) \qquad (۳)$$

صدق کنند ، یک رویه است که آن را نمایش هندسی تابع دو متغیر $f(x, y)$ مینامند .

تابع $f(x, y)$ از دو متغیر مستقل x و y وقتی به ازای $x = a$ ، $y = b$ **پیوسته** است که

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b) \qquad (A)$$

باشد و حداخیر به راه گرایش نقطهٔ (x, y) بسمت حدش ، نقطهٔ (a, b) ، بستگی نداشته باشد .

گاهی این تعریف‌را بدین گونه خلاصه میکنند : **اگر یکی‌ازمتغیرها یا هردوی آنها تغییر بسیارکوچکی نمایند ، مقدارتابع تغییر بسیارکوچکی میکند** * .

این تعریف را با تعبیر هندسی آن روشن میسازیم . رویهٔ نمایش معادلهٔ

$$z = f(x, y) \qquad (۳)$$

رادرنظر میگیریم و نقطهٔ ثابت P به مختصات $x = a$ و $y = b$ راروی‌آن فرض میکنیم.

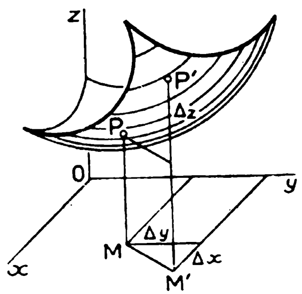
نمو x و y را بترتیب Δx و Δy و نمو نظیر تابع z را Δz و نقطهٔ به مختصات

$$(x+\Delta x \ , \ y+\Delta y \ , \ z+\Delta z)$$

را P' مینامیم (شکل ۱۹۳) .

مقدار تابع در نقطهٔ P برابر

$$z = f(a, b) = MP$$



شکل ۱۹۳

است . اگر تابع در نقطهٔ P پیوسته باشد ، وقتی Δx و Δy به طریقی بسمت صفر میل کنند ، Δz بسمت‌صفر میل میکندونقطهٔ P' روی خمی‌از رویهٔ (۳) بسمت P میل مینماید.

برای پیوستگی توابع بیش‌از دو متغیر نیز تعریف مشابهی میکنند .

در مطالب زیر آن مقادیری از متغیرهای مستقل مورد نظر ماست که تابع به ازای آنها پیوسته است .

۲۲۵- مشتق جزئی . رابطهٔ

$$z = f(x, y) \qquad (۱)$$

را درنظر میگیریم و فرض میکنیم که y مقدار ثابتی است و تنها x تغییر میکند . دراین

* برای آنکه خواننده این مطلب را بهتر درك نماید ، میتواند به شمارهٔ ۱۷ ، توابع پیوسته از یك متغیر ، مراجعه کند .

صورت z تابعی از یک متغیر x است و میتوان مشتق آن را به طریق عادی محاسبه کرد .
این مشتق را با نشانهٔ $\frac{\partial z}{\partial x}$ نشان میدهند :

(y ثابت میماند *)　　مشتق جزئی z نسبت به x　$\frac{\partial z}{\partial x}=$

به همین ترتیب

(x ثابت میماند **)　　مشتق جزئی z نسبت به y　$\frac{\partial z}{\partial y}=$

برای مشتقهای جزئی توابع سه متغیر یا بیشتر نیز نشانه‌هایی مانند اینها بکار میبرند .
به منظوراحترازازهراشتباه برای نشان‌دادن مشتقهای‌جزئی توابع چند متغیر بطورکلی از نشانهٔ ∂ *** استفاده میکنند .

مثال ۱ - مشتقهای جزئی $z=ax^2+2bxy+cy^2$ را پیداکنید .

حل -

y را مقدار ثابتی درنظر میگیریم :　$\frac{\partial z}{\partial x}=2ax+2by$

x را مقدار ثابتی درنظر میگیریم :　$\frac{\partial z}{\partial y}=2bx+2cy$

مثال ۲- مشتقهای جزئی $u=\sin(ax+by+cz)$ را پیداکنید .

حل -

y و z را مقادیر ثابتی درنظر میگیریم :　$\frac{\partial u}{\partial x}=a\cos(ax+by+cz)$

x و z را مقادیر ثابتی درنظر میگیریم :　$\frac{\partial u}{\partial y}=b\cos(ax+by+cz)$

x و y را مقادیر ثابتی درنظر میگیریم :　$\frac{\partial u}{\partial z}=c\cos(ax+by+cz)$

---

* در تابع ، قبل‌از محاسبهٔ مشتق ، بجای y مقدار ثابت میگذاریم .

** در تابع ، قبل‌از محاسبهٔ مشتق ، بجای x مقدار ثابت میگذاریم .

*** این نشانه توسط Jacobi (۱۸۰٤-۱۸۵۱) ابداع شده و بکار رفته است .

با درنظر گرفتن رابطهٔ (۱) ، نشانه هایی که معمولاً برای نشان دادن مشتقهای جزئی بکار میروند عبارتند از :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x(x,y)=f'_x=z'_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y(x,y)=f'_y=z'_y$$

برای توابع بیش از دو متغیر نیز نشانه های مشابهی بکار میروند .

بنابر شمارهٔ ۲٤ داریم :

$$f'_x(x,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y_0)-f(x,y_0)}{\Delta x} \qquad (۲)$$

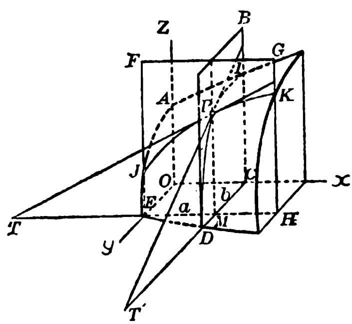
$$f'_y(x_0,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y+\Delta y)-f(x_0,y)}{\Delta y} \qquad (۳)$$

۲۲٦- تعبیر هندسی مشتقهای جزئی . -

فرض میکنیم که شکل ۱۹٤ رویهٔ

$$z=f(x,y)$$

را نشان میدهد .



شکل ۱۹٤

ازنقطه‌ای از رویه مانند P (که مختصات تصویر آن برصفحهٔ xOy ، $x=a$ و $y=b$ است)صفحهٔ EFGH را موازی صفحهٔ xOz میگذرانیم . چون معادلهٔ این صفحه

$$y=b$$

است ، معادلهٔ منحنی فصل مشترك صفحهٔ $y=b$ و رویهٔ $z=f(x,y)$ ، یعنی معادلهٔ خم JPK

$$z=f(x,b)$$

است ، بشرط آنکه EF را محور z ها و EH را محور x ها درنظر بگیریم . در صفحهٔ

HEF ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ همان معنی $\frac{dz}{dx}$ را دارد و میتوان نوشت :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=tg\,\widehat{MTP}=(\text{شیب خم فصل مشترک JPK در نقطهٔ P}) \qquad (۱)$$

به همین طریق اگر از نقطهٔ P صفحهٔ BCD را موازی صفحهٔ yOz بگذاریم ،

معادلهٔ آن $x=a$

است و در خم فصل مشترک DPI ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ همان معنی $\frac{dz}{dy}$ را دارد . بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-tg\,\widehat{MT'P}=(\text{شیب خم فصل مشترک DPI در نقطهٔ P}) \qquad (۲)$$

مثال - بیضوی $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{6}=1$ مفروض است. شیب خم فصل مشترک این بیضوی را (الف) با صفحهٔ $y=1$ در نقطهٔ به طول $x=4$ و آنجا که z مثبت است ، پیدا کنید. (ب) با صفحهٔ $x=2$ درنقطهٔ به عرض $y=3$ و آنجا که z مثبت است ، پیدا نمایید .

حل - اگر y را مقدار ثابتی درنظر بگیریم :

$$\frac{2x}{24}+\frac{2z}{6}\times\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{4z}$$

و اگر x را مقدار ثابتی درنظر بگیریم :

$$\frac{2y}{12}+\frac{2z}{6}\times\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{2z}$$

(الف) وقتی $y=1$ و $x=4$ است ، $z=\sqrt{\frac{3}{2}}$ است و از آنجا

جواب : $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ب) وقتی $x=2$ و $y=3$ است ، $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است و از آنجا

جواب : $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

تمرین

مشتقهای جزئی هریک از توابع زیر را پیدا کنید :

جواب

۱) $z=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2Ax+By+D \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=Bx+2Cy+E$$

۲) $f(x, y)=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$

$$f'_x(x, y)=3(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$$

$$f'_y(x, y)=3(Bx^2+2Cxy+Dy^2)$$

۳) $f(x, y)=\frac{Ax+By}{Cx+Dy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(AD-BC)y}{(Cx+Dy)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(BC-AD)x}{(Cx+Dy)^2}$$

٤) $u=xy+yz+zx$ $\qquad u'_x=y+z \ , \ u'_y=x+z \ , \ u'_z=x+y$

۵) $f(x, y)=(x+y)\sin(x-y)$

$$f'_x(x, y)=\sin(x-y)+(x+y)\cos(x-y)$$

$$f'_y(x, y)=\sin(x-y)-(x+y)\cos(x-y)$$

جواب

۶) $\rho=\sin ۲\theta \cos ۳\varphi$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=۲\cos ۲\theta \cos ۳\varphi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}=-۳\sin ۲\theta \sin ۳\varphi$$

۷) $\rho=e^{\theta+\varphi} \cos (\theta-\varphi)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}= e^{\theta+\varphi}\left\{\cos (\theta-\varphi)-\sin (\theta-\varphi)\right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}= e^{\theta+\varphi}\left\{\cos (\theta-\varphi)+\sin (\theta-\varphi)\right\}$$

۸) $f(x , y)=۳x^{٤}-٤x^{۳}y+۶x^{۲}y^{۲}$ ۹) $u=\dfrac{x+۲y}{y+۲z}$

۱۰) $z=e^{\frac{x}{y}} \ln \dfrac{y}{x}$ ۱۱) $f(x , y)=(x+۲y) \operatorname{tg} (۲x+y)$

۱۲) $\rho=\operatorname{tg} ۲\theta \operatorname{cotg} ٤\varphi$ ۱۳) $\rho=e^{-\theta} \cos \dfrac{\varphi}{\theta}$

۱٤) $f(x , y)=۲x^{۲}-۳xy+٤y^{۲}$ است ، نشان دهید که
$f'_x(۲ , ۳)=-۱$ و $f'_y(۲ , ۳)=۱۸$ است .

۱۵) $f(x , y)=\dfrac{۲x}{x-y}$ است ، نشان دهید که $f'_x(۳ , ۱)=-\dfrac{۱}{۲}$ و
$f'_y(۳ , ۱)=\dfrac{۳}{۲}$ است .

۱۶) $f(x , y)=e^{-x} \sin (x+۲y)$ است ، نشان دهید که
$f'_x\left(۰ , \dfrac{\pi}{٤}\right)=-۱$ و $f'_y\left(۰ , \dfrac{\pi}{٤}\right)=۰$ است .

۱۷) $u=Ax^{٤}+۲Bx^{۲}y^{۲}+Cy^{٤}$ است ، نشان دهید که
$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=٤u$ است .

۱۸) $u=\dfrac{x^{۲}y^{۲}}{x+y}$ است ، نشان دهید که $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=۳u$ است .

۱۹) $u=x^۲y+y^۲z+z^۲x$ است ، نشان دهید که
$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=(x+y+z)^۲$ است .

۲۰) $u=\frac{Ax^n+By^n}{Cx^۲+Dy^۲}$ است ، نشان‌دهید که $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(n-۲)u$ است .

۲۱) برای تعیین مساحت مثلثی‌از دستور $S=\frac{۱}{۲}bc\sin A$ استفاده میکنیم . $b=۱۰\ cm$ ، $c=۲۰\ cm$ و $A=٦۰^\circ$ است .

(الف) مساحت مثلث را پیدا کنید .

(ب) اگرزاویهٔ A ثابت بماند ، نرخ تغییر مساحت‌نسبت به هریک از اضلاع b و c چقدر است ؟

(پ) اگر اضلاع b و c ثابت بمانند ، نرخ تغییر مساحت نسبت به زاویهٔ A چقدر است ؟

(ت) با استفاده از جواب (پ) مقدار تقریبی تغییر مساحت را ، وقتی به زاویهٔ A یک درجه افزوده میشود ، حساب کنید .

(ث) اگر مساحت و زاویهٔ A ثابت بمانند ، نرخ تغییرضلع c نسبت به ضلع b چقدر است ؟

۲۲) درهرمثلث $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$ است. درمثلثی $b=۱۰\ cm$ ، $c=۱۵\ cm$ و $A=٦۰^\circ$ است .

(الف) a را حساب کنید .

(ب) اگر c و A ثابت بمانند ، نرخ تغییر a نسبت به b چقدر است ؟

(پ) بااستفاده ازجواب (ب) مقدار تقریبی تغییر a را ، وقتی از b یک سانتیمتر کم میشود ، محاسبه نمایید .

(ت) اگر b و c ثابت بمانند ، نرخ تغییر a نسبت به A چقدر است ؟

(ث) اگر a و b ثابت بمانند ، نرخ تغییر c نسبت به A چقدر است ؟

۲۲۷ـ دیفرانسیل کامل . ـ در شمارهٔ ۹۱ دیفرانسیل تابع یک متغیر را تعریف و مطالعه کردیم و دیدیم که وقتی $y=f(x)$ است ،

$$dy = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{dy}{dx}dx \qquad (۱)$$

است . دراینجا تابع

$$u = f(x, y) \qquad (۲)$$

را که از دو متغیر x و y تبعیت میکند درنظر میگیریم و نخست قضیهٔ زیر را ثابت میکنیم :

قضیه ـ اگر u ومشتقهای جزئی مرتبهٔ اول آن درنزدیکی نقطهٔ (x, y) پیوسته باشند ، اعدادی مانند ε و ε' وجود دارند بطوریکه :

$$\Delta u = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon'\Delta y$$

و

$$\lim_{\Delta x \to ۰, \Delta y \to ۰} \varepsilon = ۰ \qquad \lim_{\Delta x \to ۰, \Delta y \to ۰} \varepsilon' = ۰$$

اثبات ـ اگر Δx و Δy بترتیب نموهای x و y، و Δu نمو نظیر u باشد ، داریم :

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (۳)$$

این مقدار را **نمو کامل** u مینامند .

به طرف راست (۳) ، $f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$ میفزاییم :

$$\Delta u = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \qquad (٤)$$

دستور میانه [(D) ، شمارهٔ ۱۱۶] را در هریک از تفاضلهای (٤) بکار میبندیم . در تفاضل اول $(\Delta a = \Delta x$ ، $a = x)$ x تغییر میکند ، درحالی‌که $y+\Delta y$ ثابت میماند . بنابراین نسبت به x مشتق جزئی میگیریم :

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x \qquad (۵)$$

در تفاضل دوم $(\Delta a = \Delta y$ ، $a = y)$ y تغییر میکند ، در حالی که x ثابت میماند . بنابراین نسبت به y مشتق جزئی میگیریم :

$$f(x\,,\,y+\Delta y)-f(x\,,\,y)=f'_y(x\,,\,y+\theta_2\Delta y)\Delta y \qquad (۶)$$

مقادیر (۵) و (۶) را در (۴) میگذاریم ، داریم :

$$\Delta u=f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x\,,\,y+\theta_2\Delta y)\Delta y \qquad (۷)$$

چون $f'_x(x\,,\,y)$ و $f'_y(x\,,\,y)$ در نزدیکی $(x\,,\,y)$ پیوسته‌اند ، میتوان نوشت :

$$\varepsilon=f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\Delta y)-f'_x(x\,,\,y) \qquad (۸)$$

$$\varepsilon'=f'_y(x\,,\,y+\theta_2\Delta y)-f'_y(x\,,\,y) \qquad (۹)$$

از طرفی تابع u در مجاورت $(x\,,\,y)$ پیوسته است ، پس :

$$\lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta y\to 0}\varepsilon=0 \qquad \lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta y\to 0}\varepsilon'=0$$

مقادیر $f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\Delta y)$ و $f'_y(x\,,\,y+\theta_2\Delta y)$ را از معادلات (۸) و (۹) بدست میاوریم و در رابطهٔ (۷) میگذاریم ، رابطهٔ مطلوب بدست میاید :

$$\Delta u=f'_x(x\,,\,y)\Delta x+f'_y(x\,,\,y)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\varepsilon'\Delta y \qquad (۱۰)$$

اکنون **دیفرانسیل کامل** u را با تساوی زیر تعریف میکنیم :

$$du=f'_x(x\,,\,y)\Delta x+f'_y(x\,,\,y)\Delta y \qquad (۱۱)$$

طرف راست (۱۱) «قسمت اصلی» طرف راست (۱۰) است ، یعنی برای مقادیر کوچک Δx و Δy ، مقدار du به مقدار Δu خیلی نزدیک است (با شمارهٔ ۹۲ مقایسه کنید).

روشن است که اگر $u=x$ باشد ، $dx=\Delta x$ میشود و اگر $u=y$ باشد ، $dy=\Delta y$ میگردد. بنابراین در رابطهٔ (۱۱) بجای Δx و Δy دیفرانسیلهای نظیر آنها را میگذاریم ، رابطهٔ مهم زیر بدست میاید :

$$du=f'_x(x\,,\,y)dx+f'_y(x\,,\,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (B)$$

مقایسهٔ این دستور با دستور (۱) که در اول این شماره ذکر شده است ، بسیار جالب است.

اگر u تابعی از سه متغیر باشد ، دیفرانسیل کامل آن به صورت زیر است :

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (C)$$

دیفرانسیل کامل توابعی که از بیش‌از سه متغیر تبعیت میکنند نیز کاملاً شبیه به همین شکل است .

در شمارهٔ ۲۳۸ یک تعبیر هندسی برای دستور (B) داده شده است .

مثال ۱- تابع

$$u=۲x^۲+۳y^۲ \qquad (۱۲)$$

مفروض است . Δu و du را به ازای $x=۱۰$ ، $y=۸$ ، $\Delta x=۰٫۲$ و $\Delta y=۰٫۳$ حساب کنید و نتیجه‌ها را با یکدیگر مقایسه نمایید .

حل - مقدار Δu را حساب میکنیم (با شمارهٔ ۲۷ مقایسه کنید) :

$$u+\Delta u=۲(x+\Delta x)^۲+۳(y+\Delta y)^۲$$

$$=۲x^۲+۳y^۲+٤x\,\Delta x+٦y\,\Delta y+۲(\Delta x)^۲+۳(\Delta y)^۲$$

$$\Delta u=٤x\,\Delta x+٦y\,\Delta y+۲(\Delta x)^۲+۳(\Delta y)^۲ \qquad (۱۳)$$

از رابطهٔ (۱۲) مشتق میگیریم ، $\frac{\partial u}{\partial x}=٤x$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=٦y$ و بنابر (B)

$$du=٤x\,dx+٦y\,dy \qquad (۱٤)$$

میشود. با توجه به این مطلب که $\Delta x=dx$ و $\Delta y=dy$ است ، طرف راست (۱٤) « قسمت اصلی » طرف راست (۱۳) است زیرا جملات اضافی (۱۳) ضرایبی از قوای دوم Δx و Δy است . این مطلب دستورهای (۱۰) و (۱۱) را روشن میسازد ($\varepsilon=۲\Delta x$ و $\varepsilon'=۳\Delta y$) .

داده‌های مسئله را در (۱۳) و (۱٤) میگذاریم ، داریم :

$$\Delta u=۸+۱٤٫٤+۰٫۰۸+۰٫۲۷=۲۲٫۷۵ \qquad (۱۵)$$

$$du=۸+۱٤٫٤=۲۲٫٤ \qquad (۱٦)$$

بنابراین

$$\Delta u-du=۰٫۳۵=(\text{١٫٦ درصد } \Delta u)$$

مثال ۲- دیفرانسیل کامل $u=arc\,tg\,\frac{y}{x}$ را پیدا کنید.

حل - $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

این مقادیر را در (B) میگذاریم :

جواب : $du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

تمرین

دیفرانسیل کامل هریک از توابع زیر را پیدا کنید :

۱) $z = 2x^3 - 4xy^2 + 3y^3$

جواب : $dz = (6x^2 - 4y^2)dx + (9y^2 - 8xy)dy$

۲) $u = \frac{Ax+By}{Cx+Dy}$ جواب : $du = \frac{(AD-BC)(y\,dx - x\,dy)}{(Cx+Dy)^2}$

۳) $u = xy^2z^3$ جواب : $du = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$

۴) $u = x^2 \cos 2y$ ۵) $\theta = arc\,tg\,\frac{y}{x}$

۶) $u = (x-y)\ln(x+y)$

۷) $x^2+y^2+z^2 = a^2$ است. نشان دهید که $dz = -\frac{x\,dx + y\,dy}{z}$ است.

۸) $4x^2 - 9y^2 - 16z^2 = 100$ است . dz را پیدا کنید .

۹) تابع $u = x^2 - 3xy + 2y^2$ مفروض است. مقدار Δu و du رابه‌ازای $x = 2$ ، $y = -3$ ، $\Delta x = -0{,}3$ و $\Delta y = 0{,}2$ پیدا کنید .

جواب : $\Delta u = -7{,}15$ ، $du = -7{,}5$

۱۰) تابع $u = (x+y)\sqrt{x-y}$ مفروض است. مقدار du رابه‌ازای $x = 6$ ، $y = 2$ ، $dx = \frac{1}{4}$ و $dy = -\frac{1}{2}$ پیدا کنید . جواب : ۱

۱۱) تابع $u=xy+2x-4y$ مفروض‌است . مقدار Δu و du را به‌ازای $x=2$ ، $y=3$ ، $\Delta x=0.4$ و $\Delta y=-0.2$ پیدا کنید .

۱۲) تابع $\rho=e^{\frac{\theta}{2}}\sin(\theta-\varphi)$ مفروض است. مقدار $d\rho$ را به ازای $\theta=0$ ، $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ، $d\theta=0.2$ و $d\varphi=-0.2$ پیدا کنید .

۲۲۸- مقدار تقریبی نمو کامل - محاسبهٔ تقریبی خطا . - برای محاسبهٔ مقدار تقریبی Δu دستورهای (B) و (C) را بکار میبندند . مثلاً وقتی مقادیر x و y با اندازه‌گیری یاباآزمایش بدست آمده‌اند ودارای خطاهای کوچک Δx و Δy میباشند، مقدارتقریبی‌خطای u رابادستور (B) محاسبه میکنند (با شماره‌های ۹۲و۹۳ مقایسه کنید) .

مثال ۱ - مقدار تقریبی حجم حلبی جعبه‌ای را پیدا کنید که به شکل استوانه است ، در آن باز ، قطر و ارتفاع داخلی آن بترتیب ۶ و ۸ سانتیمتر و ضخامت حلبی آن $\frac{1}{8}$ سانتیمتر است .

حل - حجم استوانهٔ قائم دواری که قطر آن x و ارتفاع آن y است ،

$$v=\frac{1}{4}\pi x^2 y \qquad (1)$$

است. روشن‌است که مقدار دقیق حجم حلبی برابر Δv یعنی برابر تفاضل حجم دو استوانه به اندازه‌های « $x=6.25$ ، $y=8.125$ » و « $x=6$ ، $y=8$ » است .

چون مقدارتقریبی‌حجم حلبی خواسته شده است ، به عوض Δv ، dv راحساب میکنیم.

از رابطهٔ (۱) مشتق میگیریم و در (B) میگذاریم ، داریم :

$$dv=\frac{1}{2}\pi xy\,dx+\frac{1}{4}\pi x^2 dy \qquad (2)$$

دراین رابطه مقادیر $x=6$ ، $y=8$ ، $dx=0.25$ و $dy=0.125$ را قرار میدهیم ، جواب بدست میاید : $dv=7.125\pi=22.4\ cm^3$

حجم دقیق حلبی $\Delta v=23.1\ cm^3$ است .

مثال ۲ - طول دو ضلع مثلثی ۶۳ و ۷۸ متر و زاویهٔ بین آنها $60°$ است . حداکثر

خطای هرضلع ۱ر۰ متر وحداکثرخطای زاویهٔ بین آنها ۱ درجه است. مقدار تقریبی حداکثر خطای مطلق و خطای نسبی ضلع سوم را پیدا کنید .

حل - u ، طول ضلع سوم مثلث را با استفاده از دستور

$$u^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos\alpha \qquad (۳)$$

پیدا میکنیم . دراین دستور x و y اضلاع داده شده ، α زاویهٔ بین آنها و u ضلع سوم است . داده‌های مسئله عبارتند از :

$$x=۶۳ \ , \ y=۷۸ \ , \ \alpha=۶۰^\circ=\frac{\pi}{۳} \ , \ dx=dy=۰٫۱ \ , \qquad (۴)$$

رادیان $d\alpha=۰٫۰۱۷۴۵$

مشتقهای جزئی (۳) را حساب میکنیم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-y\cos\alpha}{u} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y-x\cos\alpha}{u} \ , \ \frac{\partial u}{\partial\alpha}=\frac{xy\sin\alpha}{u}$$

این مقادیر را در دستور (C) میگذاریم :

$$du=\frac{۱}{u}\left[(x-y\cos\alpha)dx+(y-x\cos\alpha)dy+xy\sin\alpha\, d\alpha)\right]$$

مقادیر (۴) را در رابطهٔ اخیر قرار میدهیم :

جواب : $du=\frac{۱}{۷۱٫۷}(۲٫۴+۴٫۶۵+۷۴٫۲۵)=۱٫۱۳\ m$

جواب : $\text{خطای نسبی}=۱۰۰\times\frac{du}{u}=۱٫۶٪$

تمرین

۱) طول اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای بترتیب ۶ و ۸ متر و حداکثر خطای هریک از آنها ۱ر۰ متر است . مقدار تقریبی حداکثر خطای مطلق و خطای نسبی (الف) مساحت مثلث و (ب) وتر مثلث را پیدا کنید .

جواب : (الف) ۷ر۰ متر مربع و ۹ر۲٪ ، (ب) ۱۴ر۰ متر و ۴ر۱٪

۲) در تمرین قبل زاویهٔ مقابل به‌ضلع بزرگتر را پیدا کنید و مقدار تقریبی حداکثر خطای آن را برحسب رادیان و درجه حساب نمایید .

۳) طول شعاعهای دوقاعدهٔ مخروط دوار ناقصی بترتیب ۵ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر ، طول مولد آن ۱۲ سانتیمتر و حداکثر خطای مطلق هریک از آنها ۰٫۱ سانتیمتر است . مقدار تقریبی خطای مطلق و خطای نسبی (الف) ارتفاع و (ب) حجم مخروط ناقص را حساب کنید [روابط (۱۲) ی شمارهٔ ۱ را ببینید] .

جواب : (الف) ۰٫۲۳ سانتیمتر و ۲٫۲٪ ، (ب) π۲۴٫٤ سانتیمترمکعب و ۳٫۵٪

٤) طول یک ضلع مثلثی ۲۰۰۰ متر و حداکثرخطای آن ۱ $\pm$ متر و اندازهٔ زاویه های مجاور به ضلع مذکور $۳۰°$ و $٦۰°$ و حداکثر خطای هریک از آنها $۳۰'$ است . مقدار تقریبی خطای مطلق و خطای نسبی (الف) ارتفاع وارد برضلع داده شده و (ب) مساحت مثلث را پیدا کنید . جواب : (الف) ۱۷٫۸۸ متر و ۲٫۱٪

۵) قطر و ارتفاع استوانهٔ قائم دواری بترتیب ۱۲ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر است . در اندازه گیری این دو طول محتملاً خطایی برابر ۰٫۲ سانتیمتر رخ داده است . اگرحجم استوانه را حساب کنیم ، مقدار تقریبی حداکثر خطای ممکن در نتیجهٔ محاسبه چقدراست ؟
جواب π۱٦٫۸ سانتیمترمکعب

٦) ابعاد جعبه‌ای عبارتنداز ٦ دسیمتر ، ۸ دسیمتر و ۱۲ دسیمتر . دراندازه‌گیری هریک از این ابعاد محتملاً خطایی برابر ۰٫۰۵ دسیمتر رخ داده است . حجم جعبه را حساب میکنیم . (الف) مقدار تقریبی حداکثر خطای ممکن درحجم حساب شده چقدر است ؟ (ب) خطای نسبی آن چقدر است ؟

جواب : (الف) ۱۰٫۸ دسیمتر مکعب ، (ب) $\frac{۱۵}{۸}$٪

۷) رویهٔ $z=\frac{x-y}{x+y}$ مفروض است. وقتی نقطهٔ M درصفحهٔ xOy از (۲,٤) به (۲٫۱ , ٤٫۱) میرود ، مقدار تقریبی تغییر z چقدر است ؟ جواب : $-\frac{۱}{۹۰}$

۸) وزن مخصوص جسمی را با دستور $s=\frac{P}{w}$ تعیین میکنیم (P وزن جسم در

خلأ و w وزن آب هم حجم آن است) . حداکثر خطای توزین در P ، $\pm\frac{۱}{۱۰}$ و در w ، $\pm\frac{۱}{۲۰}$ است . اگر دراین آزمایش $P=۸$ و $w=۱$ باشد ، حداکثر خطای مطلق وزن مخصوص در هریک از دو حالت (الف) و (ب) چقدر است : (الف) وقتی هردو خطا مثبت است ؟ (ب) وقتی یکی از خطاها منفی است ؟ - (پ) مقدار تقریبی حداکثر خطای نسبی چقدر است ؟ جواب : (الف) ۰٫۳ ، (ب) ۰٫۵ ، (پ) ۶٫۲۵٪

۹) قطر قاعده و مولد یک مخروط قائم دوار بترتیب ۱۰ سانتیمتر و ۲۰ سانتیمتر است . در اندازه‌گیری هریک از این دو طول محتملاً خطایی برابر ۰٫۲ سانتیمتر رخ داده است . مقدار تقریبی حداکثر خطای ممکن در (الف) حجم و (ب) سطح جانبی مخروط چقدر است ؟

جواب : (الف) سانتیمترمکعب $\frac{۳۷\pi\sqrt{۱۵}}{۱۸}=۲۵$ ، (ب) سانتیمترمربع $۳\pi=۹٫۴۲$

۱۰) دو ضلع مثلثی بترتیب ۶۳ متر و ۷۸ متر و زاویهٔ بین آنها °۶۰ است . اگر در اندازه‌گیری هریک از این دو ضلع محتملاً خطایی برابر ۰٫۵ متر و دراندازه‌گیری زاویه محتملاً خطایی برابر °۲ رخ داده باشد ، مقدار تقریبی حداکثر خطای ممکن در مساحت مثلث چقدر است ؟ [روابط (۷) شمارهٔ ۲ را ببینید .] جواب : ۷۳٫۶ متر مربع

۱۱) وزن مخصوص جسمی‌را با دستور $s=\frac{A}{A-W}$ تعیین میکنیم (A وزن جسم در هوا و W وزن جسم در آب است) . A که مقدار آن تا ۰٫۰۱ کیلوگرم خوانده میشود ، ۹ کیلوگرم و W که مقدار آن‌تا ۰٫۰۲ کیلوگرم خوانده میشود ، ۵ کیلوگرم‌است. (الف) مقدار تقریبی حداکثر خطای s چقدر است ؟ (ب) حداکثر خطای نسبی آن چقدر است ؟ جواب : (الف) ۰٫۰۱۴۴ ، (ب) $\frac{۲۳}{۳۶۰۰}$

۱۲) مقاومت‌یک مدار با دستور $I=\frac{E}{R}$ حساب شده است . در این دستور I شدت جریان (برحسب آمپر) و E نیروی‌الکتروموتوری (برحسب ولت) است . درخواندن I خطایی تا $\frac{۱}{۱۰}$ آمپر و در خواندن E خطایی تا $\frac{۱}{۲۰}$ ولت رخ داده و $I=۱۵A$ و $E=۱۱۰V$ خوانده شده است . (الف) مقدار تقریبی خطای مطلق R چقدر است ؟

(ب) خطای نسبی آن چقدر است ؟ جواب : (الف) ۰۰۵۲۲ر۰ اهم ، (ب) $\frac{۴۷}{۶۶}$٪

۱۲) اگر مقدار $sin\,(x+y)$ را با دستور

$$sin\,(x+y)=sin\,x\,cos\,y+cos\,x\,sin\,y$$

حساب کنیم و خطای اندازه‌گیری هریک از دوزاویهٔ حادهٔ x و y ، ۱°ر۰ و از طرف دیگر $sin\,x=\frac{۳}{۵}$ و $sin\,y=\frac{۵}{۱۳}$ باشد ، مقدار تقریبی خطای $sin\,(x+y)$ چقدر است ؟ جواب : ۰۰۱۸ر۰

۱۴) شتاب یک نقطهٔ مادی که روی صفحهٔ مایلی در حرکت است با دستور $a=g\,sin\,i$ تعیین میشود . i زاویهٔ بین صفحهٔ مایل و صفحهٔ افق است . مقدار عادی g برابر ۸۱ر۹ متردرثانیه‌درثانیه‌است‌ولی دراینجا تا ۰۳ر۰ متر در ثانیه درثانیه‌تغییر میکند. اندازه‌گیری i عدد ۳۰° را بدست‌داده و دقت اندازه‌گیری تا ۱° است. مقدار تقریبی‌خطای a را حساب کنید .

۱۵) زمان نوسان آونگ ساده با دستور $T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ تعیین میشود . مقدار g برابر ۸۱ر۹ متر در ثانیه در ثانیه و خطای آن ۰۲ر۰ متر در ثانیه در ثانیه و طول آونگ ۳ متر و خطای اندازه‌گیری آن ۰۳ر۰ $\pm$ متر است . مقدار تقریبی حداکثر خطای مطلق و خطای نسبی زمان نوسان را حساب کنید .

۱۶) طول شعاع قاعده وارتفاع مخروط قائم دواری بترتیب ۴ و ۶ سانتیمتر است. وسیلهٔ اندازه‌گیری در هرسانتیمتر محتملاً یک صدم سانتیمتر کوتاه است . مقدار تقریبی حداکثر خطای محتمل در اندازهٔ سطح کل و حجم مخروط چقدر است ؟

جواب : سانتیمترمربع $dS=$۸۱۸ر۲ ، سانتیمترمکعب $dV=$۰۱۵۹ر۳

۱۷) درآونگ ساده بین l و T ، طول آونگ و زمان نوسان آن ، رابطهٔ $۴\pi^۲l=T^۲g$ برقرار است . T را مساوی ۱ ثانیه و g را مساوی ۸۱ر۹ متردرثانیه درثانیه گرفته و l را حساب کرده‌ایم ، درصورتی که مقادیر دقیق T و g بترتیب ۰۲ر۱ ثانیه و ۸۱۵ر۹ متر در ثانیه در ثانیه بوده است . مقدار تقریبی خطای مطلق و خطای نسبی l را حساب کنید .

۱۸) به دو سر استوانهٔ دواری دونیمکره نصب شده است. قطر استوانه ۱۶ سانتیمتر و طول کامل جسم ۴۰ سانتیمتر است. حجم و سطح آن را حساب کردمایم. اگر متری که برای اندازه گیری بکاربردهایم بطور یکنواخت به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$٪ کش آمده باشد، مقدار تقریبی خطای حجم و سطح چقدر است؟

۱۹) اگرمعادلهٔ مشخص یک گاز کامل $vp=Rt$ باشد، رابطهٔ بین دیفرانسیلهای dv ، dp ، dt کدام است؟ درمعادلهٔ مذکور: حجم$=v$ ، فشار$=p$ ، درجهٔحرارت$=t$ و R مقدار ثابتی است. جواب: $v\,dp+p\,dv=R\,dt$

۲۰) هوا را میتوان در حوالی ۳۰۰ درجهٔ مطلق یک گاز کامل فرض کرد و نتیجهٔ تمرین قبل را برای آن بکار بست. فرض میکنیم که در آزمایشی $t=۳۰۰°K$ ، $p=۱٫۱Kg/cm^۲$ و $v=۱۳۰dm^۳$ است. وقتی t به $۳۰۱°K$ بالا میرود و v به $۱۳۱dm^۳$ میرسد و $R=۱۰۰$ است، مقدار تغییر p چقدر است؟

۲۲۹- مشتق کامل - نرخ تغییر . ـ اکنون فرض میکنیم که در

$$u=f(x\,,\,y) \qquad (۱)$$

x و y متغیرهای مستقلی نیستند بلکه مثلاً هردوی آنها از متغیر سومی مانند t تبعیت میکنند:

$$x=\varphi(t) \quad , \quad y=\psi(t) \qquad (۲)$$

اگر این دو مقدار را در (۱) بگذاریم، u تابعی از متغیر t میشود و میتوانیم مشتق آن را به طریق عادی حساب کنیم. نیز داریم:

$$du=\frac{du}{dt}dt \quad , \quad dx=\frac{dx}{dt}dt \quad , \quad dy=\frac{dy}{dt}dt \qquad (۳)$$

دستور (B) با فرض مستقل بودن متغیرهای x و y بدست آمده است. اما بآسانی میتوان نشان داد که دستور (B) در حالت اخیر نیز صحیح است. بدین منظور دو طرف رابطهٔ (۱۰) شمارهٔ ۲۲۷ را به Δt تقسیم میکنیم، با کمی تغییر شکل داریم:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\Delta y}{\Delta t}+\left(\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon'\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \qquad (۴)$$

اکنون اگر Δt بسمت صفر میل کند ، Δx و Δy نیز بسمت صفر میل میکنند و از آنجا (شمارهٔ ۲۲۷ را ببینید) :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon' = 0$$

بنابراین وقتی Δt بسمت صفر میل میکند ، رابطهٔ (٤) به صورت زیر در میاید :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \tag{D}$$

اگر دو طرف این معادله را در dt ضرب کنیم واز روابط (۳) استفاده نماییم ، دستور (B) بدست میاید ، یعنی **دستور (B) هنگامی نیزکه x و y توابعی از متغیر سومی مانند t هستند ، صحیح است .**

به همین طریق اگر

$$u = f(x, y, z)$$

و x و y و z توابعی از t باشند ، داریم :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \frac{dz}{dt} \tag{E}$$

این دستور را برای توابع بیش‌از سه متغیر هم میتوان نوشت .

اگر در دستور (D) بجای t ، x بگذاریم ، y تابعی از x میشود. در آن صورت u تابعی از یک متغیر x است و داریم :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dx} \tag{F}$$

به همین طریق اگر y و z توابعی از x باشند، دستور (E) به صورت زیردرمیاید:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \frac{dz}{dx} \tag{G}$$

یادآور میشویم که $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{du}{dx}$ دارای دو معنی کاملاً متفاوتند : هنگام محاسبهٔ مشتق

جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}$ فرض میکنیم که **تنها متغیر خاص x تغییر میکند** و متغیرهای دیگر ثابت میمانند . اما

$$\frac{du}{dx}=\lim_{\triangle x\rightarrow .}\left(\frac{\triangle u}{\triangle x}\right)$$

است. دراین دستور $\triangle u$ **نمو کامل** u است که براثر نمو **تمام متغیرها** ، که خود براثر نمو x تغییر میکنند ، حاصل میگردد . برای متمایز ساختن $\frac{du}{dt}$ و $\frac{du}{dx}$ از مشتقهای جزئی ، دو مقدار اخیر را بترتیب **مشتق کامل** u نسبت به t و مشتق کامل u نسبت به x مینامیم .

باید توجه داشت که در هرنقطهٔ (x , y) ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ مقدار کاملاً معینی است ، در صورتی که مقدار $\frac{du}{dx}$ نه تنها به مکان نقطهٔ (x , y) ، بلکه به امتداد انتخاب شده برای رسیدن به آن نقطه نیز بستگی دارد .

مثال ۱- توابع $u=\sin\frac{x}{y}$ ، $x=e^t$ ، $y=t^۲$ مفروضند . $\frac{du}{dt}$ را پیدا کنید.

حل - $\frac{dy}{dt}=۲t$, $\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^۲}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۱}{y}\cos\frac{x}{y}$

این مقادیر را در دستور (D) میگذاریم :

$$\frac{du}{dt}=(t-۲)\,\frac{e^t}{t^۳}\cos\frac{e^t}{t^۲}\ :\ \text{جواب}$$

مثال ۲- توابع $u=e^{ax}(y-z)$ ، $y=a\sin x$ ، $z=\cos x$ مفروضند . $\frac{du}{dx}$ را پیدا کنید .

حل -

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ae^{ax}(y-z)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^{ax}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-e^{ax}\ ,$$

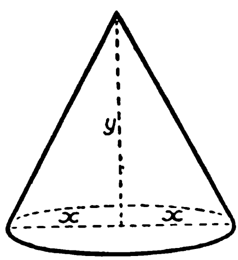
$$\frac{dy}{dx}=a\cos x\ ,\ \frac{dz}{dx}=-\sin x$$

این مقادیر را در دستور (G) میگذاریم :

جواب : $\frac{du}{dx}=ae^{ax}(y-z)+ae^{ax}\cos x+e^{ax}\sin x=e^{ax}(a^۲+۱)\sin x$

یادداشت ـ در مثالهایی مانند دو مثال مذکور میتوان نخست بجای متغیرهای غیر مستقل مقادیر آنها را قرار داد ، u را به صورت تابع صریحی از متغیر مستقل در آورد وسپس مشتق آن را مستقیماً حساب نمود . اما معمولاً راه اخیر طولانیتر و در بسیاری از حالات غیر عملی است .

دستورهای (D) و (E) هنگامی بکار میروند که متغیرها همگی از یک متغیر مستقل تبعیت میکنند . روش محاسبه همان دستورالعمل مذکور در شمارهٔ ۵۲ است ، جز آن که بجای مشتق گرفتن نسبت به t (عمل سوم) ، مشتقهای نسبی را پیدا میکنیم و در دستور (D) یا (E) میگذاریم . این مطلب را با ذکر یک مثال روشن میسازیم .



شکل ۱۹۵

مثال ۳- ارتفاع مخروط قائم‌دواری ۱۰۰ سانتیمتر است و از آن درهرثانیه ۱۰ سانتیمتر کم میشود . شعاع قاعدهٔ مخروط ۵۰ سانتیمتر است و به آن درهرثانیه ۵ سانتیمتر افزوده میگردد . سرعت تغییر حجم چقدر است ؟

حل - اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را x و ارتفاع آن را y بنامیم ، داریم :

$$u=\frac{۱}{۳}\pi x^۲ y=\text{حجم} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۲}{۳}\pi xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{۱}{۳}\pi x^۲$$

این مقادیر را در (D) میگذاریم :

$$\frac{du}{dt}=\frac{۲}{۳}\pi xy\frac{dx}{dt}+\frac{۱}{۳}\pi x^۲\frac{dy}{dt}$$

اما $\quad x=۵۰ \quad , \quad y=۱۰۰ \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۵ \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-۱۰$

بنابراین $\frac{du}{dt}=\frac{۲}{۳}\pi\times ۵۰۰۰\times ۵-\frac{۱}{۳}\pi\times ۲۵۰۰\times ۱۰=۲٦۱۸۰$

سرعت افزایش حجم مخروط درنخستین لحظه برابر ۲٦۱۸۰ سانتیمتر مکعب در ثانیه است.

۲۳۰- تغییر متغیر . ـ اگر در تابع

$$u=f(x,y) \qquad (۱)$$

تغییر متغیر

$$x=\varphi(r,s) \quad , \quad y=\psi(r,s) \qquad (۲)$$

بدهیم ، میتوانیم مشتقهای جزئی u را نسبت به متغیرهای جدید r و s با دستور (D) بدست آوریم . زیرا اگر s را ثابت نگهداریم ، x و y توابعی از متغیر r خواهند بود و داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial r} \qquad (۳)$$

دراین دستور تمام مشتقها جزئی هستند و نسبت به r حساب شده‌اند .

به همین طریق داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (٤)$$

اگر

$$x=x'+h \quad , \quad y=y'+k \qquad (۵)$$

(و 'x و 'y متغیرهای جدید و h و k مقادیر ثابتی) باشند ،

$$\frac{\partial x}{\partial x'}=۱ \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial y'}=۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x'}=۰ \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial y'}=۱$$

میشود و روابط (۳) و (٤) به صورت زیر درمیایند :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x'} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y'} \qquad (٦)$$

بنابراین **تبدیل (۵) در مشتقهای جزئی تغییری بوجود نمیاورد .**

اگر مقادیر (۵) را در (۱) بگذاریم ، داریم :

$$u = f(x, y) = F(x', y') \tag{۷}$$

و نتایج مذکور در (٦) به صورت زیر در میایند :

$$f'_x(x, y) = F'_{x'}(x', y') \quad , \quad f'_y(x, y) = F'_{y'}(x', y') \tag{۸}$$

در شمارهٔ ۲۲۹ دیده‌ایم که دستور (B) ، وقتی x و y توابعی‌از یک متغیر مستقل t هستند ، نیز برقرار است . اکنون نشان میدهیم که وقتی x و y توابعی از دو متغیر مستقل r و s مانند(۲)میباشند ، دستور (B) بازهم برقرار است. وقتی r و s متغیرهای مستقلی هستند ، بنابر (B) داریم :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds \quad , \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds$$

این مقادیر را در عبارت

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{۹}$$

میگذاریم و حاصل را با توجه به روابط (۳) و (٤) مختصر میکنیم ، داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds \tag{۱۰}$$

اما بنابر روابط (۱) و (۲) ، u تابعی از متغیرهای مستقل r و s است. پس بنابر رابطهٔ (B) ، مقدار (۱۰) برابر du و بنابراین مقدار (۹) نیز برابر du است .

پس دستور (B) ، وقتی x و y توابعی ازیک یا دو متغیر مستقلند ، درست است. به همین طریق میتوان نشان‌داد که دستور (C) نیز ، وقتی x و y و z توابعی از یک، دو یا سه متغیر مستقلند ، صحیح است .

۲۳۱- مشتق توابع ضمنی . ـ معادلهٔ

$$f(x, y) = 0 \tag{۱}$$

یکی‌از متغیرهای x یا y را به صورت تابعی ضمنی ازمتغیر دیگر بیان میکند. اگر دریک معادلهٔ غیر مشخص‌از x و y تمام جملات‌را به یک طرف ببریم ، یک تابع ضمنی بدست میاید . $f(x, y)$ را بطورکلی u مینامیم :

$$u=f(x,y) \qquad (۲)$$

بنابر دستور (F) داریم :

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dx}$$

دراین رابطه y تابع دلخواهی از x است . اکنون اگر y را ، تابعی از x ، طوری درنظر بگیریم که در معادلهٔ (۱) صدق کند ، $u=٠$ و $du=٠$ میشود و از آنجا

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dx}=٠ \qquad (۳)$$

میگردد. مقدار $\frac{dy}{dx}$ را از این معادله بدست میاوریم ، یک دستور برای محاسبهٔ مشتق توابع ضمنی پیدا میشود :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\neq ٠\right) \qquad (H)$$

این دستور به صورت حل نشدهٔ آن (۳) هم ارز همان روشی است که در شمارهٔ ٤١ برای محاسبهٔ مشتق توابع ضمنی بکار رفته است و تمام مثالهای صفحه‌های ٦٠ و ٦١ را میتوان با آن حل کرد .

وقتی معادلهٔ یک خم به صورت (۱) است ، دستور (H) شیب خم را در هرنقطه بآسانی میدهد .

مثال ۱ - تابع $x^۲y^٤+\sin y=٠$ مفروض است . $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید .

حل - مینویسیم

$$f(x,y)=x^۲y^٤+\sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲xy^٤ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=٤x^۲y^۳+\cos y$$

بنابراین

جواب : $$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲xy^٤}{٤x^۲y^۳+\cos y}$$

مثال ۲ - سرعت‌افزایش x هنگام عبور از مقدار $x=۳$ cm برابر ۲سانتیمتر درثانیه است. سرعت تغییر y هنگام عبوراز مقدار $y=۱$ cm چه باشد تا تابع $۲xy^۲-۳x^۲y$ ثابت بماند ؟

حل - مینویسیم $u=۲xy^۲-۳x^۲y$. چون u ثابت میماند ، $\frac{du}{dt}=۰$ است . این مقدار را در طرف چپ دستور (D) میگذاریم و مقدار $\frac{dy}{dt}$ را ازآن‌پیدا میکنیم:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\times\frac{dx}{dt} \tag{٤}$$

نیز داریم : $\frac{\partial u}{\partial x}=۲y^۲-٦xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=٤xy-۳x^۲$

مقادیر اخیر را در (٤) میگذاریم : $\frac{dy}{dt}=-\frac{۲y^۲-٦xy}{٤xy-۳x^۲}\times\frac{dx}{dt}$

اما $x=۳ \;,\; y=۱ \;,\; \frac{dx}{dt}=۲$ است ،

بنابراین : $\frac{dy}{dt}=-۲\frac{۲}{۱۵}$ سانتیمتر در ثانیه.

به همین ترتیب ، معادلهٔ

$$F(x,y,z)=۰ \tag{٥}$$

z را به صورت تابعی ضمنی از دو متغیر مستقل x و y بیان میکند . برای بدست آوردن مشتقهای جزئی z نسبت به x و y به ترتیب زیر عمل میکنیم :

مینویسیم $u=F(x,y,z)$

بنابر دستور (C) $du=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$

این دستور به ازای هرمقدار از متغیرهای مستقل برقرار است (شمارهٔ ۲۳۰) . اکنون اگر

z را ، تابعی از x و y ، طوری درنظر بگیریم که در معادلهٔ (٥) صدق کند ، $u=0$ و $du=0$ میشود و از آنجا

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0 \tag{٦}$$

میگردد . اما بنابر دستور(B) ، $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ است .

این مقدار را در (٦) میگذاریم و ساده میکنیم ، داریم :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0$$

چون در تساوی اخیر $dx(=\Delta x)$ و $dy(=\Delta y)$ نموهای مستقلی هستند ، میتوانیم $dy=0$ و $dx\neq 0$ درنظر بگیریم ، دوطرف آن را بر dx تقسیم کنیم و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بدست آوریم :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{I}$$

به همین‌طریق میتوانیم $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنیم :

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{J}$$

در طرف‌چپ دستورهای (I) و (J) ، z تابعی از دو متغیر x و y است ودر معادلهٔ (٥) صدق میکند . در طرف راست دستورهای (I) و (J) ، F تابعی از سه متغیر x و y و z به صورت طرف چپ (٥) است .

دستورهای (H) و (I) و (J) را به توابع‌ضمنی از چند متغیر نیز میتوان بآسانی تعمیم داد .

مثال - z تابعی ضمنی از دو متغیر x و y است و با رابطهٔ

$$\frac{x^۲}{۲٤}+\frac{y^۲}{۱۲}+\frac{z^۲}{٦}-۱=۰$$

تعیین شده است . مشتقهای جزئی آن را بدست آورید .

حل - مینویسیم $F=\frac{x^۲}{۲٤}+\frac{y^۲}{۱۲}+\frac{z^۲}{٦}-۱$

پس $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{۱۲}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{٦}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z}{۳}$

این مقادیر را در (I) و (J) میگذاریم ، داریم :

جواب : $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{٤z}\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{۲z}$

(با مثال شمارهٔ ۲۲٦ مقایسه کنید .)

تمرین

در تمرینهای ۱ تا ٥ ، $\frac{du}{dt}$ را پیدا کنید :

جواب

۱) $u=x^۲-۳xy+۲y^۲\ ,\ x=\cos t\ ,\ y=\sin t$ $\qquad \frac{du}{dt}=\sin ۲t-۳\cos ۲t$

۲) $u=x+٤\sqrt{xy}-۳y\ ,\ x=t^۳\ ,\ y=\frac{۱}{t}$ $\qquad \frac{du}{dt}=۳t^۲+٤+\frac{۳}{t^۲}$

۳) $u=e^x\sin y+e^y\sin x\ ,\ x=\frac{۱}{۲}t\ ,\ y=۲t$

$$\frac{du}{dt}=e^{\frac{t}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲t+۲\cos ۲t\right)+e^{۲t}\left(۲\sin\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos\frac{t}{۲}\right)$$

٤) $u=2x^2-xy+y^2 \;,\; x=\cos 2t \;,\; y=\sin t$

٥) $u=xy+yz+zx \;,\; x=\dfrac{1}{t} \;,\; y=e^t \;,\; z=e^{-t}$

در تمرینهای ٦ تا ١٠ ، $\dfrac{dy}{dx}$ را با استفاده از دستور (H) پیدا کنید :

جواب

٦) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}$

٧) $x^3+y^3-3axy=0$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

٨) $e^x \sin y-e^y \cos x=1$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y \sin x+e^x \sin y}{e^y \cos x-e^x \cos y}$

٩) $x^4-x^2y^2-x^2+2y^2=8$

١٠) $Ax^4+2Bx^2y^2+Cy^4=(x^2+y^2)^2$

درتمرینهای ١١ تا ١٥ نخست‌نشان دهیدکه مقادیر داده شدهٔ x و y در معادلهٔ مذکور صدق میکنند ، سپس مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ نظیر به آن مقادیر را حساب کنید :

جواب

١١) $x^2+2xy+2y=22 \;,\; x=2 \;,\; y=3$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5}{3}$

١٢) $x^3-y^3+4xy=0 \;,\; x=2 \;,\; y=-2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=1$

١٣) $Ax+By+Ce^{xy}=C \;,\; x=0 \;,\; y=0$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{A}{B}$

١٤) $2x-\sqrt{2xy}+y=4 \;,\; x=2 \;,\; y=4$

١٥) $e^x \cos y+e^y \sin x=1 \;,\; x=0 \;,\; y=0$

درتمرینهای ۱۶ تا ۲۰ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید :

جواب

۱۶) $Ax^۲+By^۲+Cz^۲=D$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Ax}{Cz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{By}{Cz}$

۱۷) $Axy+Byz+Czx=D$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Ay+Cz}{Cx+By}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Ax+Bz}{Cx+By}$

۱۸) $x+۲y+z-۲\sqrt{xyz}=۱۰$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-۲\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$$

۱۹) $x^۳+y^۳+z^۳-۳axyz=۰$

۲۰) $Ax^۲+By^۲+Cz^۲+۲Dxy+۲Eyz+۲Fzx=G$

۲۱) نقطهٔ M روی خم فصل مشترک کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۴۹$ و صفحهٔ $y=۲$ حرکت میکند . درلحظهٔ t_0 ، x برابر ٦ استوبا سرعت ٤ واحد در ثانیه زیاد میشود . (الف) سرعت نمو z و (ب) سرعت نقطهٔ متحرك را در لحظهٔ t_0 پیدا کنید.

جواب : (الف) ۸ واحد در ثانیه ، (ب) $۴\sqrt{۵}$ واحد در ثانیه

۲۲) نقطهٔ M روی خم فصل مشترك رویهٔ $x^۲+xy+y^۲-z^۲=۰$ و صفحهٔ $x-y+۲=۰$ حرکت میکند . درلحظهٔ t_0 ، x برابر ۳ است و با سرعت ۲ واحد درثانیه زیاد میشود. (الف) سرعت تغییر y و (ب) سرعت تغییر z و (پ) سرعت نقطهٔ متحرك را درلحظهٔ t_0 پیدا کنید .

جواب: (الف) ۲ واحد در ثانیه ، (ب) $\frac{۲۴}{۷}$ واحد در ثانیه ، (پ) ٤٫٤٤ واحد در ثانیه

۲۳) معادلهٔ مشخص گاز کاملی $R\theta=pv$ است . θ درجهٔ حرارت مطلق ، p مقدار فشار ، v اندازهٔ حجم و R مقدار ثابتی است . در لحظهٔ t_0 : حجم گاز ۵ مترمکعب است و به آن در هرثانیه ۰٫۰۱ متر مکعب افزوده میشود ، فشار گاز ۳ کیلوگرم برسانتیمتر مربع است و از آن در هرثانیه ۰٫۰۱ کیلوگرم برسانتیمتر مربع کم میگردد ، و $R=\frac{۱}{۲۰}$

است . درجهٔ حرارت گاز و سرعت تغییر آن در لحظهٔ t_0 چقدر است ؟

جواب : حرارت گاز ۳۰۰ درجهٔ مطلق است و از آن در هرثانیه ۴ر۰ درجه کم میشود .

۲۴) مثلث ABC به ترتیب زیر تغییر شکل میدهد : زاویهٔ A بطور یکنواخت زیاد میشود ودرمدت ۱۰ ثانیه از $0°$ به $90°$ میرسد ، از ضلع AC در هرثانیه یک سانتیمتر کم میشود و به ضلع AB در هرثانیه یک سانتیمتر افزوده میگردد . در لحظهٔ t_0 ، $A=60°$ ، $AC=16\,cm$ و $AB=10\,cm$ است. (الف) سرعت تغییر BC و (ب) سرعت تغییر مساحت مثلث را در لحظهٔ t_0 پیدا کنید .

جواب : (الف) ۹۱۱ر۰ سانتیمتر در ثانیه ، (ب) ۸۸ر۸ سانتیمتر مربع درثانیه

۲۳۲- مشتقهای مرتبهٔ بالاتر . - اگر u تابعی از x و y باشد ،

$$u=f(x\,,y) \tag{1}$$

مشتقهای آن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x\,,y)\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x\,,y) \tag{2}$$

خود، توابعی از x و y هستند و میتوان ازآنها نیز مشتق گرفت . اگر از تابع سمت چپ (۲) یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق بگیریم ، داریم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{xx}(x\,,y)\quad,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x\,,y) \tag{3}$$

به همین ترتیب اگر از تابع سمت راست (۲) یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق بگیریم ، داریم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x\,,y)\quad,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{yy}(x\,,y) \tag{4}$$

اینطوربنظر میرسد که u دارای چهار مشتق مرتبهٔ دوم است. در زیر نشان میدهیم که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \tag{K}$$

است، تنها به شرط آنکه دو مشتق اخیر پیوسته باشند. بنابراین **درمشتق گیری متوالی** ،

مقدار مشتق جزئی مستقل از ترتیب مشتق گیری نسبت به x و y است و $f(x, y)$ تنها سه مشتق جزئی مرتبهٔ دوم دارد که عبارتند از :

$$f''_{xx}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y), \quad f''_{yy}(x, y) \tag{۵}$$

این مطلب را میتوان بآسانی دربارهٔ مشتقهای مراتب بالاتر تعمیم دارد . مثلاً ، چون رابطهٔ (K) درست است ، روابط

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2}$$

نیز برقرارند . برای توابع بیش از دو متغیر هم میتوان روابط مشابهی نوشت .

مثال - تابع $u = x^3 y - 3x^2 y^3$ مفروض است . درستی تساوی

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ را بیازمایید .

حل - $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 3x^2 - 18xy^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y - 6xy^3$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 3x^2 - 18xy^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 9x^2 y^2$

پس تساوی مذکور برقرار است .

اثبات تساوی (K) . - عبارت

$$F = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y) \tag{۶}$$

و تابع

$$\varphi(u) = f(u, y+\Delta y) - f(u, y) \tag{۷}$$

را درنظر میگیریم . روشن است که :

$$\varphi(x+\Delta x) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)$$

$$\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \tag{۸}$$

پس تساوی (٦) را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$F=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x) \tag{۹}$$

دستور میانه را بکار میبندیم [شمارهٔ ۱۱٦ ، دستور (D) . دراینجا $f(x)=\varphi(u)$ ، $a=x$ و $\Delta a=\Delta x$ است] :

$$F=\Delta x\, \varphi'(x+\theta_1\Delta x) \qquad (0<\theta_1<1) \tag{۱۰}$$

برای‌بدست‌آوردن مقدار $\varphi'(x+\theta_1\Delta x)$ از دوطرف(۸) نسبت به x مشتق جزئی میگیریم ودر حاصل بجای x ، $x+\theta_1\Delta x$ میگذاریم. نتیجه را در (۱۰) قرار میدهیم ، داریم :

$$F=\Delta x\,[f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\Delta y)-f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,y)] \tag{۱۱}$$

اکنون دستور میانه‌را برای تابع $f'_x(x+\theta_1\Delta x\,,\,v)$ که در آن v متغیر مستقل است ، بکار میبندیم ،

$$F=\Delta x\Delta y\, f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\theta_2\Delta y) \qquad (0<\theta_2<1) \tag{۱۲}$$

میشود . اگر جای جمله های دوم و سوم طرف راست (٦) را عوض کنیم و همین عملیات‌را دنبال نماییم ، داریم :

$$F=\Delta y\Delta x\, f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x\,,\,y+\theta_4\Delta y) \tag{۱۳}$$

$$(0<\theta_3<1\,,\,0<\theta_4<1)$$

پس بنابر تساویهای (۱۲) و (۱۳)

$$f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x\,,\,y+\theta_2\Delta y)=f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x\,,\,y+\theta_4\Delta y) \tag{۱۴}$$

است . Δx و Δy را بسمت صفر میل میدهیم ، چون این توابع پیوسته‌اند ، تساوی‌زیر بدست میاید :

$$f''_{yx}(x\,,\,y)=f''_{xy}(x\,,\,y) \tag{۱۵}$$

تمرین

مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم هریک از توابع زیر را پیدا کنید :

جواب

۱) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$

$$f''_{xx}(x, y) = 2A \quad , \quad f''_{xy}(x, y) = 2B \quad , \quad f''_{yy}(x, y) = 2C$$

۲) $f(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$

$$f''_{xx}(x, y) = 6Ax + 2By \quad , \quad f''_{xy}(x, y) = 2Bx + 2Cy \quad ,$$
$$f''_{yy}(x, y) = 2Cx + 6Dy$$

۳) $f(x, y) = Ax + By + Ce^{xy}$

$$f''_{xx}(x, y) = Cy^2e^{xy} \quad , \quad f''_{xy} = C(1 + xy)e^{xy} \quad , \quad f''_{yy}(x, y) = Cx^2e^{xy}$$

٤) $f(x, y) = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$

٥) $f(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x$

٦) تابع $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3$ مفروض‌است. نشان‌دهید که:

$$f''_{xx}(2, 3) = 30 \quad , \quad f''_{xy}(2, 3) = 48 \quad , \quad f''_{yy}(2, 3) = 6$$

۷) تابع $f(x, y) = x^4 - 4x^3y + 8xy^3 - y^4$ مفروض است. نشان‌دهید که:

$$f''_{xx}(2, -1) = 96 \quad , \quad f''_{xy}(2, -1) = -24 \quad , \quad f''_{yy}(2, -1) = -108$$

۸) تابع $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + y^4$ مفروض‌است. مقادیرزیررا پیدا کنید:

$$f''_{xx}(2, -2) \quad , \quad f''_{xy}(2, -2) \quad , \quad f''_{yy}(2, -2)$$

۹) تابع $u = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$ مفروض‌است. درستی تساویهای زیر را بیازمایید:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24Ax + 6By \quad , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 6Bx + 4Cy$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = 4Cx + 6Dy \quad , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6Dx + 24Ey$$

۱۰) تابع $u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^3$ مفروض است. نشان دهید که:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2}$$

۱۱) تابع $u=\frac{xy}{x+y}$ مفروض است . نشان دهید که :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

۱۲) تابع $u=ln\sqrt{x^2+y^2}$ مفروض است . نشان دهید که :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

۱۳) تابع $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ مفروض است . نشان دهید که :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

تمرین اضافی

۱) سطح تپه‌ای به شکل رویهٔ دوار و مقطع قائم مرکزی آن خمی به معادلهٔ $x^2+160y-1600=0$ (با واحد متر) است . از قلهٔ تپه طوری خاکبرداری میکنند که سطح بالای تپه همواره به صورت یک صفحهٔ افقی باقی میماند و حجم خاکی که در هرروز کنده و حمل میشود، ۱۰۰ مترمکعب است. سرعت افزایش مساحت مقطع افقی تپه ، هنگامی که فاصلهٔ آن از رأس ۴ متر است ، چقدر است ؟

جواب : ۲۵ متر سربع در روز

۲) تابع $u=\frac{e^{xy}}{e^x+e^y}$ مفروض است . نشان دهید که :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y-1)u$$

۳) $u=\frac{1}{r}$ و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است . نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{r^4}$$

۴) تابع $z=x^2 arc\,tg\,\frac{y}{x}-y^2 arc\,tg\,\frac{x}{y}$ مفروض است. نشان دهید که :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

۵) تابع $u=z\,arc\,tg\,\frac{x}{y}$ مفروض است. نشان دهید که :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

۶) تابع $u=ln\,(e^x+e^y+e^z)$ مفروض است. نشان دهید که :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=2e^{x+y+z-3u}$$

۷) $u=f(x\,,y)$ ، $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ است . نشان دهید که :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\times\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\times\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

۸) تابع $u=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^k$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از k تساوی $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$ برقرار است؟

جواب : $k=1-\frac{n}{2}$ ، $(n>2)$

فصل بیست و چهارم

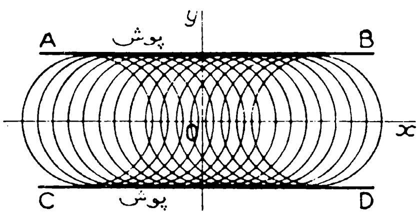
موارد استعمال مشتقهای جزئی

۲۳۳- پوش یك دسته خم . - معادلهٔ یک خم معمولاً علاوه بر متغیرهای x و y شامل مقادیر ثابتی است که ابعاد و شکل و جای این خم خاص را تعیین میکنند. مثلاً خم نمایش معادلهٔ

$$(x-\alpha)^2+y^2=r^2$$

دایره‌ای است که مرکز آن به فاصلهٔ α از مبدأ مختصات قرار دارد و شعاع آن r است .

فرض کنیم α مقادیر مختلفی بگیرد ولی r ثابت بماند . دراین صورت دایره‌های نظیر به مقادیر مختلف α دایره‌هایی برابرند وتنها فاصلهٔ آنها از مبدأ مختصات متفاوت است . شکل ۱۹۶ این دایره‌ها را نشان میدهد .



شکل ۱۹۶

مجموعهٔ خمهایی راکه بدین طریق تشکیل میشوند ، یک **دسته خم** و مقدار α را که در هریک از خمها مقدار ثابتی است ولی ازهرخم به خم دیگر تغییر میکند ، **پارامتر** مینامند . برای نشان دادن آنکه α یک پارامتر است و تغییر میکند ، معمولاً آن را در ترکیب تابع میگنجانند و مینویسند :

$$f(x\,,\,y\,,\,\alpha)=0$$

ممکن است خمهای یک دسته خم به یک یا چندخم مماس باشند. دراین صورت خم یاخمهای اخیر را **پوش** آن دسته خم مینامند. اکنون به بیان روشی میپردازیم که برای پیدا کردن معادلهٔ پوش یک دسته خم بکار میرود . - فرض میکنیم که خم

$$x=\varphi(\alpha) \quad و \quad y=\psi(\alpha) \tag{۱}$$

به هرخم ازدسته خم
$$f(x, y, \alpha)=0 \tag{۲}$$

مماس است . پارامتر α در هردو خم یک مقدار را نشان میدهد و به ازای هرمقدار آن معادلات (۱) درمعادلهٔ (۲) صدق میکنند . بنابراین اگر دستور (E) ی شمارهٔ ۲۲۹ را بکار ببندیم ، با توجه به اینکه دراینجا α بجای z است ، چون $u=f(x, y, \alpha)=0$ است ، $du=df=0$ است و داریم :

$$f'_x(x, y, \alpha)\varphi'(\alpha)+f'_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha)+f'_\alpha(x, y, \alpha)=0 \tag{۳}$$

شیب خم (۱) در هرنقطه عبارتست از

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \tag{۴}$$
[بنابر دستور (A) ی شمارهٔ ۸۱]

و شیب خم (۲) درهر نقطه عبارتست از

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)} \tag{۵}$$
[بنابر دستور (H) شمارهٔ ۲۳۱]

بنابراین اگر خمهای (۱) و (۲) بیکدیگر مماس باشند ، شیب آنها در نقطهٔ تماس برابر است و داریم :

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}=-\frac{f'_x(x, y, \alpha)}{f'_y(x, y, \alpha)}$$

یا
$$f'_x(x, y, \alpha)\varphi'(\alpha)+f'_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha)=0 \tag{۶}$$

مقایسهٔ معادلات (۳) و (۶) نشان میدهد که

$$f'_\alpha(x, y, \alpha)=0 \tag{۷}$$

است . بنابراین مختصات نقطهٔ تماس در دستگاه زیر صدق میکنند :

$$f(x, y, \alpha)=0 \quad و \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0 \tag{۸}$$

پس معادلات پارامتری پوش ، اگر وجود داشته باشد ، با حل معادلات (۸) و پیدا کردن

x و y برحسب پارامتر α بدست میاید .

دستورالعمل کلی برای بدست‌آوردن معادلات پارامتری پوش

عمل اول ـ معادلهٔ دسته خم را به صورت $f(x, y, \alpha)=0$ درمیاوریم و از آن نسبت به α مشتق میگیریم $f'_\alpha(x, y, \alpha)=0$

عمل دوم ـ ازاین دو معادله x و y را برحسب پارامتر α پیدا میکنیم .

برای بدست آوردن معادلهٔ قائم پوش باید α را بین معادلات (۸) و یا بین معادلات پارامتری پوش حذف کرد (شمارهٔ ۸۱) .

مثال ۱ـ در دسته دوایر مذکور در شروع این شماره

$$f(x, y, \alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-r^2=0$$

و

$$f'_\alpha(x, y, \alpha)=-2(x-\alpha)=0$$

است . α را بین این دو معادله حذف میکنیم ، $y^2-r^2=0$ وازآنجا $y=r$ و $y=-r$ بدست میایند . دو تساوی اخیر معادلات خطوط AB و CD درشکل ۱۹۶ هستند .

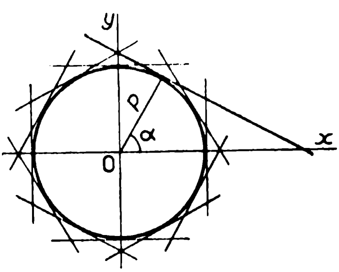
مثال ۲ـ پوش‌دسته خط $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ را پیداکنید . α پارامتراست.

حل ـ $f(x, y, \alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ (۹)

عمل‌اول ـ نسبت‌به α مشتق میگیریم :

$$f'_\alpha(x, y, \alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0 \quad (۱۰)$$

عمل دوم ـ دوطرف (۹) را در $\cos\alpha$ و دوطرف (۱۰) را در $\sin\alpha$ ضرب میکنیم . سپس (۱۰) را از (۹) کم مینماییم و مختصر میکنیم ، داریم :



شکل ۱۹۷

$$x=p\cos\alpha$$

به همین ترتیب x را بین (۹) و (۱۰) حذف میکنیم ، داریم :

$$y = p\ \sin \alpha$$

بنابراین **معادلات پارامتری پوش**

$$\begin{cases} x = p\ \cos \alpha \\ y = p\ \sin \alpha \end{cases} \qquad (۱۱)$$

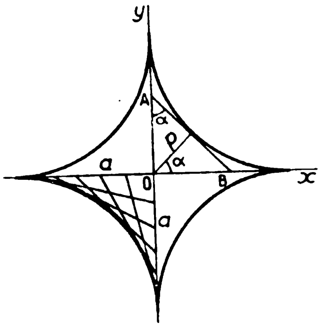
و α پارامتر آن است . معادلات (۱۱) را مجذور و سپس باهم جمع میکنیم ، معادلهٔ قائم پوش بدست میاید :

$$x^۲ + y^۲ = p^۲$$

چنانکه دیده میشود ، پوش یک دایره است .

مثال ۳- پوش پاره خطی را پیدا کنید که طول آن برابر مقدار ثابت a است و دوسر آن روی دو محور عمود به هم حرکت میکنند .

حل - فرض میکنیم $AB = a$ پاره خط مذکور و



شکل ۱۹۸

$$x\ \cos \alpha + y\ \sin \alpha - p = ۰ \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ آن است . چون AB حرکت میکند ، هم α و هم p ، هردو تغییر میکنند . اما میتوان p را برحسب α پیدا کرد ، زیرا در شکل ۱۹۸

$$AO = AB\ \cos \alpha = a\ \cos \alpha$$

پس

$$p = AO\ \sin \alpha = a\ \cos \alpha\ \sin \alpha$$

مقدار اخیر را در (۱۲) میگذاریم ، داریم :

$$x\ \cos \alpha + y\ \sin \alpha - a\ \cos \alpha\ \sin \alpha = ۰ \qquad (۱۳)$$

دراین معادله که به صورت $f(x, y, \alpha) = ۰$ است ، α پارامتر است . از آن نسبت به α مشتق میگیریم و معادلهٔ $f'_\alpha(x, y, \alpha) = ۰$ را تشکیل میدهیم :

$$-x \sin\alpha + y\cos\alpha + a\sin^2\alpha - a\cos^2\alpha = 0 \qquad (14)$$

ازمعادلات(۱۳) و (۱٤) ، x و y را برحسب α پیدا میکنیم،معادلات پارامتری پوش بدست میاید :

$$\begin{cases} x = a\sin^3\alpha \\ y = a\cos^3\alpha \end{cases} \qquad (15)$$

بنابراین پوش یک هیپوسیکلوئید است . اگر α را بین معادلات (۱۵) حذف کنیم ، معادلهٔ قائم پوش حاصل میگردد :

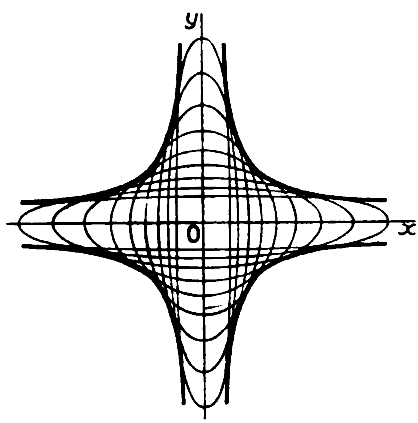
$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\sin^2\alpha$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos^2\alpha$$

معادلهٔ قائم هیپوسیکلوئید $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

در بسیاری‌از مسائل معادلهٔ دسته خم شامل دوپارامتر است و بین‌آن دو پارامتر یک شرط برقراراست. دراین‌صورت میتوان بااستفاده از شرط مذکور یکی‌از پارامترها را از معادلهٔ دسته‌خم‌حذف کرد. اما اغلب‌بهتر است روشی که درمثال زیر بکار رفته است دنبال گردد.

مثال ٤ - پوش دسته بیضی‌هایی را پیدا کنید که مساحت آنها مقدار ثابتی است و محورهای آنها برمحورهای مختصات منطبقند .



شکل ۱۹۹

حل - معادلهٔ این بیضی‌ها عبارتست از

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (16)$$

بین دو پارامتر a و b معادلهٔ زیر برقرار است :

$$\pi ab=k \qquad (17)$$

زیرا مساحت یک بیضی با نیم قطرهای a و b برابر πab است . اگر a و b را متغیرو x و y را مقادیر ثابتی فرض کنیم وازدوطرف معادلات (۱۶) و (۱۷) دیفرانسیل بگیریم ، داریم :

$$\frac{x^2da}{a^3}+\frac{y^2db}{b^3}=0$$

و

$$b\,da+a\,db=0$$

در هریک ازاین معادلات ، جملهٔ دوم را به طرف راست میبریم ، دو طرف را برهم تقسیم میکنیم و خلاصه مینماییم : $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$

پس بنابر تساوی اخیر و معادلهٔ (۱۶) :

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

یا

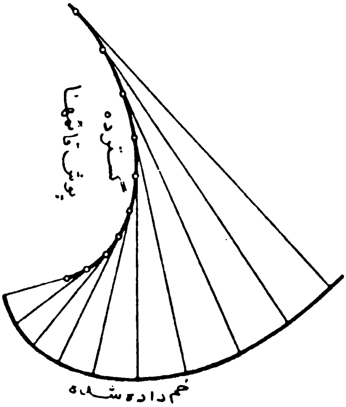
$$a=\pm x\sqrt{2} \quad \text{و} \quad b=\pm y\sqrt{2}$$

این مقادیر را در(۱۷) میگذاریم ، معادلهٔ پوش ، $xy=\pm\frac{k}{2\pi}$ ، بدست میاید .

چنانکه دیده میشود ، پوش دو هذلولی متساوی‌الساقین مزدوج است (شکل ۱۹۹) .

۲۳۴- گستردهٔ یک خم را میتوان پوش قائمهای آن خم دانست . - چون تمام قائمهای یک خم به گسترده مماسند (شمارهٔ ۱۱۰) ، میتوان گستردهٔ یک خم را پوش قائمهای آن خم دانست . این مطلب نیز جالب توجه است که اگر معادلات پارامتری پوش را با روش مذکور در شمارهٔقبل پیدا کنیم ، مختصات x و y مرکز انحنا را بدست

میاوریم و بدین ترتیب **روش دیگری برای پیدا کردن مختصات مرکز انحنا** پیدا میکنیم ، و اگر پارامتر را حذف کنیم ، معادلهٔ قائم گسترده را بدست میاوریم .



شکل ۲۰۰

مثال - گستردهٔ سهمی $y^۲=۴px$ را به منزلهٔ پوش قائمهای آن درنظر بگیرید و معادلهٔ آن را بدست آورید .

حل - معادلهٔ قائم به این سهمی در نقطهٔ $(x_۱ , y_۱)$ بنابر دستور (۲) ی شمارهٔ ۴۳ عبارتست از

$$y-y_۱=-\frac{y_۱}{۲p}(x-x_۱)$$

چون قائمها را در تمام طول خم درنظر میگیریم ، $x_۱$ و $y_۱$ تغییر میکنند ، اما همواره بین آنها رابطهٔ $y_۱^۲=۴px_۱$ برقرار است و میتوان معادلهٔ قائم را به صورت زیر نوشت :

$$y-y_۱=\frac{y_۱^۳}{۸p^۲}-\frac{xy_۱}{۲p} \qquad (۱)$$

یا

$$xy_۱+۲py-۲py_۱-\frac{y_۱^۳}{۴p}=۰$$

از دو طرف رابطهٔ اخیر نسبت به $y_۱$ مشتق میگیریم و از معادلهٔ حاصل x را پیدا میکنیم ، داریم :

$$x=\frac{۳y_۱^۲+۸p^۲}{۴p} \qquad (۲)$$

این مقدار x را در (۱) میگذاریم و y را بدست میاوریم :

$$y=-\frac{y_۱^۳}{۴p^۲} \qquad (۳)$$

معادلات (۲) و (۳) مختصات مرکز انحنای سهمی است و اگر آنها را باهم درنظر بگیریم ، معادلات پارامتری گسترده برحسب پارامتر $y_۱$ است . $y_۱$ را بین این دو معادله

حذف میکنیم ، معادلهٔ قائم گستردهٔ سهمی بدست میاید :

$$27py^2=4(x-2p)^3$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۱ شمارهٔ ۱۰۹ با روش نخست بدست آورده‌ایم.

تمرین

معادلهٔ پوش هریک از دسته خطهای زیر را پیدا کنید و خم نمایش آنها را رسم نمایید :

۱) $y=mx+m^2$ جواب : $x^2+4y=0$

۲) $y=\frac{x}{m}+m^2$ $27x^2=4y^3$

۳) $y=m^2x-2m^3$ $27y=x^3$

٤) $y=2mx+m^4$ $16y^3+27x^4=0$

۵) $y=tx-t^2$ ۶) $y=t^2x+t$ ۷) $y=mx-2m^2$

معادلهٔ پوش هریک از دسته دوایر زیر را پیدا کنید و خم نمایش آنها را رسم نمایید:

۸) $(x-c)^2+y^2=4c$ جواب : $y^2=4x+4$

۹) $x^2+(y-t)^2=2t$ ۱۰) $(x-t)^2+(y+t)^2=t^2$

معادلهٔ پوش هریک از دسته سهمی‌های زیر را پیدا کنید :

۱۱) $y^2=c(x-c)$ جواب : $2y=\pm x$

۱۲) $cy^2=1-c^2x$

۱۳) معادلهٔ قائمهای بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را به صورت

$$by=ax\,tg\,\varphi-(a^2-b^2)\sin\varphi$$

درنظر بگیرید وگستردهٔ بیضی را پیدا کنید . پارامتر φ زاویهٔ خروج از مرکز است .

جواب : $x=\frac{a^۲-b^۲}{a}\cos^۳\varphi \quad , \quad y=\frac{b^۲-a^۲}{b}\sin^۳\varphi$

یا $(ax)^{\frac{۲}{۳}}+(by)^{\frac{۲}{۳}}=(a^۲-b^۲)^{\frac{۲}{۳}}$

۱۴) معادلهٔ قائمهای هیپوسیکلوئید $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ را به صورت $y\cos\tau-x\sin\tau=a\cos ۲\tau$ درنظر بگیرید وگستردهٔ هیپوسیکلوئید را پیدا کنید .

جواب : $(x+y)^{\frac{۲}{۳}}+(x-y)^{\frac{۲}{۳}}=۲a^{\frac{۲}{۳}}$

۱۵) پوش دایره‌هایی را پیدا کنید که از مبدأ مختصات میگذرند و مراکز آنها برهذلولی $x^۲-y^۲=c^۲$ واقعند .

جواب : لمنیسکات $(x^۲+y^۲)^۲=۴c^۲(x^۲-y^۲)$

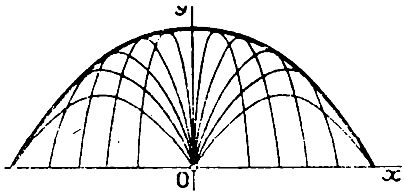
۱۶) خط AB طوری حرکت میکند که مجموع طولهای دو پاره خط جدا شده توسط آن روی محورهای مختصات همواره برابر مقدار ثابت c است . پوش خط AB را پیدا کنید .

جواب : سهمی $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=c^{\frac{۱}{۲}}$

۱۷) در بیضی $b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲$ ، a و b پارامترند وطوری تغییر میکنند که مجموع آنها ثابت میماند $(a+b=c)$. پوش این دسته بیضی را پیدا کنید .

جواب : هیپوسیکلوئید $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=c^{\frac{۲}{۳}}$

۱۸) سرلولهٔ تفنگی بسمت بالا و درنقطه‌ای ثابت است . لولهٔ تفنگ در صفحهٔ قائم حرکت میکند . بااین تفنگ گلوله هایی با سرعت اولیهٔ $v_۰$ وزاویه های گوناگون پرتاب میشوند . اگر از مقاومت هوا



شکل ۲۰۱

صرف‌نظر کنیم ، پوش مسیر گلوله ها چیست ؟

یادداشت : معادلهٔ مسیر گلوله در خلاء

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2 \alpha}$$

و α پارامتر است . جواب : سهمی $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$

۱۹) نشان دهید که اگر دسته خم

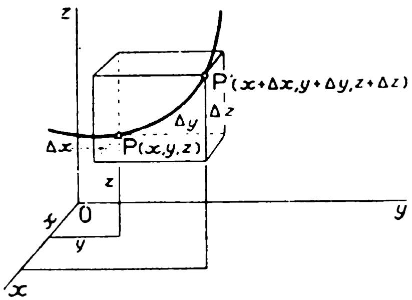
$$t^2 f(x, y) + t\, g(x, y) + h(x, y) = 0$$

پوشی داشته باشد ، معادلهٔ آن به شکل زیر است :

$$g^2(x, y) - 4 f(x, y) h(x, y) = 0$$

۲۳۵ - خط مماس و صفحهٔ قائم یک خم فضایی

.- قبلاً با نمایش پارامتری یک خم هامنی آشنا شده‌ایم (شمارهٔ ۸۱) . برای تعمیم مطلب به یک خم فضایی، فرض میکنیم که مختصات هرنقطهٔ $P(x, y, z)$ ازخم فضایی به صورت توابعی از متغیر دیگری مانند t در دست است :



شکل ۲۰۲

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad , \quad z = \chi(t) \qquad (1)$$

اگر پارامتر t را بین این معادلات ، دو به دو ، حذف کنیم ، معادلات استوانه‌های مصور خم برصفحات مختصات بدست میایند .

اکنون فرض میکنیم $P(x, y, z)$ نقطهٔ نظیر به مقدار t و $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ نقطهٔ نظیر به مقدار $t+\Delta t$ است. دراین‌صورت Δx و Δy و Δz نموهای x و y و z هستند که براثر نمو Δt حاصل شده و با معادلات (۱) محاسبه گردیده‌اند . در هندسهٔ تحلیلی دیده‌ایم که کسینوسهای هادی وتر PP' با مقادیر

$$\Delta x \ , \ \Delta y \ , \ \Delta z$$

متناسبند. پس اگراین مقادیر را بر Δt تقسیم کنیم وزاویه‌های وتر PP' رابا محورهای مختصات α' و β' و γ' بنامیم، داریم:

$$\frac{\cos\alpha'}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\cos\beta'}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{\cos\gamma'}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \tag{۲}$$

اکنون P' رادرطول خم بسمت P میل میدهیم. Δt و با آن Δx و Δy و Δz بسمت صفرمیل میکنند و وترPP' بسمت‌حدش، خط مماس به خم‌در نقطهٔ P، میل‌مینماید. اما $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ و ... است، پس برای خط مماس داریم:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos\beta}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{dz}{dt}} \tag{A}$$

وقتی نقطهٔ تماس $P_1(x_1, y_1, z_1)$ است، مقدار مشتقهارا دراین نقطه به صورت زیر مینویسیم:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1=\left(\text{مقدار } \frac{dx}{dt} \text{ به ازای } x=x_1 \text{ ، } y=y_1 \text{ ، } z=z_1\right) \tag{۳}$$

پس بنابر(۲) و (٤) صفحه‌های ۹ و ۱۰ میتوان گفت که:

معادلات خط مماس به خم (۱)

$$x=\varphi(t) \ , \ y=\psi(t) \ , \ z=\chi(t) \tag{۱}$$

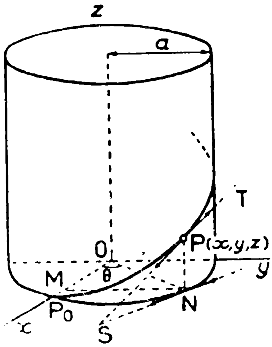
درنقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ **عبارتنداز**:

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_1}=\frac{z-z_1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1} \tag{B}$$

صفحهٔ قائم به یک خم فضایی در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ صفحه‌ای است که از نقطهٔ P_1 میگذرد و به‌خط مماس به خم‌در نقطهٔ P_1 عموداست. مخرجهای(B) پارامترهای هادی خط مماس در نقطهٔ P_1 است. بنابراین:

معادلهٔ صفحهٔ قائم به خم (۱) در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ عبارتست‌از

$$(C) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_1(y-y_1)+\left(\frac{dz}{dt}\right)_1(z-z_1)=0$$



شکل ۲۰۳

مثال - مارپیچ

$$(٤) \qquad \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

مفروض است. معادلات خط مماس و صفحهٔ‌قائم به‌این مارپیچ را (الف) درنقطهٔ (x_1, y_1, z_1)، (ب) در نقطهٔ نظیر به $\theta=2\pi$ پیدا کنید.

حل - داریم:

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta=-y \ , \ \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta=x \ , \ \frac{dz}{d\theta}=b$$

این مقادیر را در معادلات (B) و (C) میگذاریم، داریم:

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ (x_1, y_1, z_1)

$$(\text{٥}) \qquad \frac{x-x_1}{-y_1}=\frac{y-y_1}{x_1}=\frac{z-z_1}{b}$$

معادلهٔ صفحهٔ قائم در نقطهٔ (x_1, y_1, z_1)

$$-y_1(x-x_1)+x_1(y-y_1)+b(z-z_1)=0$$

وقتی $\theta=2\pi$ است، مختصات نقطهٔ خم $(a, 0, 2b\pi)$ است، معادلات خط مماس

$$\frac{x-a}{\text{۰}}=\frac{y-\text{۰}}{a}=\frac{z-\text{۲}b\pi}{b}$$

یا

$$x=a \quad , \quad by=az-\text{۲}ab\pi$$

و معادلهٔ صفحهٔ قائم $ay+bz-\text{۲}b^{\text{۲}}\pi=\text{۰}$ است .

یادداشت - بنابر روابط (۲) و (٤) صفحه‌های ۹ و ۱۰ ، برای خط مماس (٥) داریم :

$$\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{x_1^{\text{۲}}+y_1^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}}}=\frac{b}{\sqrt{a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}}}=\text{مقدار ثابت}$$

یعنی خم مارپیچ تمام مولدهای استوانهٔ $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}$ را با یک زاویه قطع میکند .

۲۳۶- طول قوس خم فضایی . - در شکل ۲۰۲ دیده میشود که

$$\frac{(\text{وتر } PP')^{\text{۲}}}{\Delta t^{\text{۲}}}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^{\text{۲}}+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^{\text{۲}}+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^{\text{۲}} \qquad (\text{۱})$$

قوس PP' را Δs مینامیم . با روش مذکور در شمارهٔ ٩٥ میتوان بآسانی نشان داد که

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^{\text{۲}}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\text{۲}}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\text{۲}}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^{\text{۲}} \qquad (\text{۲})$$

و از آنجا

$$s=\int_{t_\text{۰}}^{t_\text{۱}}(dx^{\text{۲}}+dy^{\text{۲}}+dz^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \qquad (D)$$

دراین دستور $x=\varphi(t)$ ، $y=\psi(t)$ و $z=\chi(t)$ است. اکنون میتوان کسینوسهای هادی‌را به صورت ساده‌ای درآورد. با توجه به رابطهٔ (A) ی شمارهٔ قبل و معادلهٔ (۲)ی بالا و دستورهای (۲) ی صفحهٔ ۹ میتوان نوشت :

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds} \;,\; \cos\beta=\frac{dy}{ds} \;,\; \cos\gamma=\frac{dz}{ds} \qquad (\text{۳})$$

مثال - طول پاره قوسی از خم فضایی

$$x=t \ , \ y=\frac{۱}{۲}t^{۲} \ , \ z=\frac{۱}{۳}t^{۳} \qquad (٤)$$

راکه بین نقاط نظیر به $t=۰$ و $t=٤$ محدود است ، پیدا کنید .

حل - از تساویهای (٤) دیفرانسیل میگیریم :

$$dx=dt \ , \ dy=t\,dt \ , \ dz=t^{۲}dt$$

این مقادیر را در (D) میگذاریم :
$$s=\int_{۰}^{٤}\sqrt{۱+t^{۲}+t^{٤}}\,dt$$

اگر فاصلهٔ انتگرال گیری را به ۸ قسمت کنیم و مقدار تقریبی انتگرال را با روش سمپسون محاسبه نماییم ، $s=۲۳{,}۹۲$ میشود .

تمرین

درهریک از خمهای فضایی زیر معادلات خط مماس و صفحهٔ قائم به خم را در نقطهٔ داده شده پیدا کنید :

جواب

۱) $x=at \ , \ y=bt^{۲} \ , \ z=ct^{۳} \ , \ t=۱$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y-b}{۲b}=\frac{z-c}{۳c} \ , \ ax+۲by+۳cz=a^{۲}+۲b^{۲}+۳c^{۲}$$

۲) $x=۲t \ , \ y=t^{۲} \ , \ z=٤t^{٤} \ , \ t=۱$

$$\frac{x-۲}{۲}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-٤}{۱٦} \ , \ x+y+۸z=۳٥$$

۳) $x=t^{۲}-۱ \ , \ y=t+۱ \ , \ z=t^{۳} \ , \ t=۲$

$$\frac{x-۳}{٤}=\frac{y-۳}{۱}=\frac{z-۸}{۱۲} \ , \ ٤x+y+۱۲z=۱۱۱$$

٤) $x=t^{۳}-۱ \ , \ y=t^{۲}+t \ , \ z=٤t^{۳}-۳t+۱ \ , \ t=۱$

$$\frac{x}{۳}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z-۲}{۹} \ , \ x+y+۳z=۸$$

۵) $x=۲t-۳ \ , \ y=۵-t^۲ \ , \ z=\frac{۲}{t} \ , \ t=۲$

۶) $x=a \cos t \ , \ y=b \sin t \ , \ z=t \ , \ t=\frac{۱}{۶}\pi$

۷) $x=t \ , \ y=e^t \ , \ z=e^{-t} \ , \ t=۰$

۸) $x=\cos t \ , \ y=\sin t \ , \ z=tg\, t \ , \ t=۰$

۹) طول پاره قوسی از مارپیچ

$$x=a \cos \theta \ , \ y=a \sin \theta \ , \ z=b\theta$$

راکه بین نقاط نظیر به $\theta=۰$ و $\theta=۲\pi$ محدود است ، پیدا کنید .

جواب : $۲\pi \sqrt{a^۲+b^۲}$

۱۰) طول پاره قوسی از خم

$$x=۳\theta \cos \theta \ , \ y=۳\theta \sin \theta \ , \ z=۴\theta$$

راکه بین نقاط نظیر به $\theta=۰$ و $\theta=۴$ محدود است ، پیدا کنید .

جواب : $۲۶+\frac{۲۵}{۶} \ln ۵=۳۲٫۷۰$

۱۱) طول پاره قوسی از خم

$$x=۲t \ , \ y=t^۲-۲ \ , \ z=۱-t^۲$$

راکه بین نقاط نظیر به $t=۰$ و $t=۲$ محدود است ، پیدا کنید .

۱۲) دو خم زیر مفروضند :

$$x=t \ , \ y=۲t^۲ \ , \ z=-\frac{۱}{t} \qquad (۵)$$

$$x=۱-\theta \ , \ y=۲\cos \theta \ , \ z=\sin \theta-۱ \qquad (۶)$$

(الف) نشان دهید که این دوخم یکدیگر را درنقطهٔ $A(۱ , ۲ , -۱)$ قطع میکنند.

(ب) کسینوسهای هادی خط مماس به خم (۵) را در نقطهٔ A پیدا کنید .

جواب : $\frac{۱}{\sqrt{۱۸}}$, $\frac{٤}{\sqrt{۱۸}}$, $\frac{۱}{\sqrt{۱۸}}$

(پ) کسینوسهای هادی خط مماس به خم (٦) را در نقطهٔ A پیدا کنید .

(ت) زاویهٔ تقاطع این دو خم را در نقطهٔ A پیدا کنید . جواب : ۹۰°

۱۳) دو خم زیر مفروضند :

$$x=۲-t \ , \ y=t^۲-٤ \ , \ z=t^۳-۸$$

$$x=\sin\theta \ , \ y=0 \ , \ z=۱-\cos\theta$$

(الف) نشان دهید که این دو خم یکدیگر را در مبدأ مختصات قطع میکنند .

(ب) کسینوسهای هادی خط مماس به هر خم را در مبدأ مختصات پیدا کنید .

(پ) زاویهٔ تقاطع این دو خم را در مبدأ مختصات بدست آورید .

۱٤) اگر در شکل ۱۸۹ محورهای Ox و Oy و Oz را بترتیب OF و OE و ON بگیریم و $P(x, y, z)$ نقطه‌ای در سطح کره و φ و θ بترتیب عرض و طول جغرافیایی P باشند ،

(الف) ثابت کنید که $x=a\cos\varphi\sin\theta$ ، $y=a\cos\varphi\cos\theta$ و $z=a\sin\varphi$ است .

(ب) با استفاده از تساویهای (۳) و روابط (۳) ی صفحهٔ ۹ ، α را پیدا کنید . α عبارتست از زاویهٔ بین مدار ماربر P و خمی از کره که از نقطهٔ P میگذرد و مختصات آن در $\theta=f(\varphi)$ صدق میکند . جواب : $tg\,\alpha=\sec\varphi\frac{d\varphi}{d\theta}$ مانند شمارهٔ ۲۲۲

۲۳۷- خط قائم و صفحهٔ مماس به یک رویه . - حدوتر ماربر نقطهٔ P و نقطهٔ P' را که روی رویه قرار دارد و در نزدیکی P است و در طول خمی از رویه بسمت P میل میکند ، **خط مماس به‌رویه** مینامند. اکنون به‌اثبات یک‌قضیهٔ اساسی‌و مهم میپردازیم:

قضیه - تمام خطوطی که دریک نقطه‌از رویه به‌رویه مماسند ، بریک صفحه واقعند.

اثبات - فرض میکنیم

$$F(x , y , z)=0 \qquad (۱)$$

معادلهٔ صفحهٔ داده شده و $P(x , y , z)$ نقطه‌ای از آن است . اگر P' در طول خم C که بررویهٔ (۱) واقع است و از نقاط P و P' میگذرد ، بسمت P میل کند ، روشن است که خط قاطع PP' بسمت خط مماس به خم C در نقطهٔ P میل مینماید . اکنون فرض میکنیم معادلات خم C به صورت زیرند :

$$x=\varphi(t) \ , \ y=\psi(t) \ , \ z=\chi(t) \qquad (۲)$$

دراین صورت اگر مقادیر اخیر را درمعادلهٔ (۱) بگذاریم ، طرف چپ متحد با صفر میشود و اگر $F(x , y , z)$ را u بنامیم ، $u=0$ و $du=0$ میگردد و بنابر دستور (E) ی شمارهٔ ۲۲۹ داریم :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\times\frac{dz}{dt}=0 \qquad (۳)$$

این معادله نشان میدهد که [مطالب (۳) ی شمارهٔ ٤ را ببینید]خط مماس به خم (۲) که کسینوسهای هادی آن با

$$\frac{dx}{dt} \ , \frac{dy}{dt} \ , \frac{dz}{dt}$$

متناسبند ، به خطی که کسینوسهای هادی آن با

$$\frac{\partial F}{\partial x} \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} \ , \ \frac{\partial F}{\partial z} \qquad (٤)$$

متناسبند ، عمود است . اکنون فرض میکنیم $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ نقطه‌ای از رویه و

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 \ , \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 \ , \ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 \qquad (٥)$$

مقادیر مشتقهای جزئی (٤) به ازای $x=x_1$ ، $y=y_1$ و $z=z_1$ باشند . خطی که از P_1 میگذرد و پارامترهای هادی آن مقادیر (٥) هستند ، **خط قائم به رویه** در نقطهٔ P_1 نامیده میشود . بنابراین

معادلات خط قائم به رویهٔ

$$F(x , y , z)=0 \tag{۱}$$

درنقطهٔ $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ **عبارتند از**

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1}=\frac{z-z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1} \tag{E}$$

استدلال بالا نشان میدهد که **تمام** خطوط مماس به رویهٔ (۱) در نقطهٔ P_1 به خط قائم در P_1 عمودند. بنابراین خطوط مذکور در یک صفحه قرار دارند و قضیه ثابت شده است. این صفحه را **صفحهٔ مماس** به رویه در نقطهٔ P_1 مینامند و میتوان گفت که:
معادلهٔ صفحهٔ مماس به رویهٔ (۱) درنقطهٔ $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ **به صورت زیر است:**

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1(y-y_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1(z-z_1)=0 \tag{F}$$

یادداشت - اگر در معادلات (E) تمام مخرجها صفر باشند، خط قائم و صفحهٔ مماس معین نیستند. چنین نقطه‌ای را **نقطهٔ غیر عادی*** رویه مینامند و ما دراینجا از بحث دربارهٔ آن صرف‌نظر میکنیم.

درحالتی که معادلهٔ رویه به صورت $z=f(x , y)$ داده شده باشد، داریم:

$$F(x , y , z)=f(x , y)-z=0 \tag{٦}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1$$

پس بنابر (E) میتوان گفت که:

معادلات خط قائم به رویهٔ $z=f(x , y)$ **درنقطهٔ** (x_1 , y_1 , z_1) **عبارتند از**

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1}=\frac{z-z_1}{-1} \tag{G}$$

---

* Singular point

و بنابر (F) داریم :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 (x-x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 (y-y_1) - (z-z_1) = 0 \qquad \text{(H)}$$

دستوراخیر **معادلهٔ صفحهٔ مماس به رویهٔ** $z=f(x, y)$ **درنقطهٔ** (x_1, y_1, z_1) است .

۲۳۸- تعبیر هندسی دیفرانسیل کامل .- اکنون با همان روش مذکور در شمارهٔ ۹۱ ، از نظر هندسی به بحث دربارهٔ دستور (B) ی شمارهٔ ۲۲۷ میپردازیم .

رویهٔ
$$z=f(x, y) \qquad (۱)$$

ونقطهٔ (x_1, y_1, z_1) رادر رویآن درنظر میگیریم. وقتی $x=x_1$ و $y=y_1$ است ، دیفرانسیل کامل (۱) عبارتست از

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 \Delta y \qquad (۲)$$

دراین تساویبجای dx و dy مقادیر معادلآنها Δx و Δy راگذاشتهایم. اکنون مقدار z را برای نقطهٔ P_1 از صفحهٔ مماس که مختصات دیگر آن

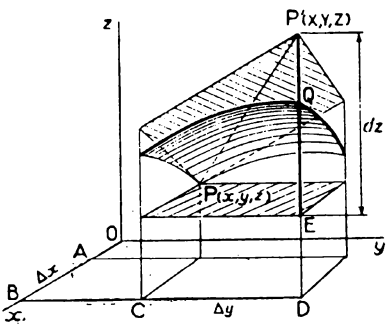
$$x=x_1+\Delta x \quad , \quad y=y_1+\Delta y$$

است ، پیدا میکنیم . این مقادیر را در دستور (H) شمارهٔ قبل میگذاریم ، داریم :

$$z-z_1=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 \Delta y \qquad (۳)$$

چون طرفهای راست (۲) و (۳) برابرند ، $dz=z-z_1$ است و میتوان گفت که :

قضیه - دیفرانسیل کامل تابع $f(x, y)$ نظیر به نموهای Δx و Δy برابر نمو نظیر z در صفحهٔ مماس به رویهٔ $z=f(x, y)$ است .



شکل ۲۰۴

درشکل ۲۰۴ ، PP' صفحهٔ

مماس به رویهٔ PQ درنقطهٔ $P(x, y, z)$ است . اگر AB را $\triangle x$ و CD را $\triangle y$ بنامیم ،

$$dz = z - z_1 = DP' - DE = EP'$$

میشود . درصورتی که $\triangle z = DQ - DE = EQ$ است .

مثال - معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم به کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ را درنقطهٔ $(3, 2, 1)$ پیدا کنید .

حل - $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$

و $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x , \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y , \ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z , \ x_1 = 1 , \ y_1 = 2 , \ z_1 = 3$

بنابراین $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 2 , \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = 4 , \ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = 6$

این مقادیر را در (F) میگذاریم ، معادلهٔ صفحهٔ مماس بدست میاید :

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$$

یا $x + 2y + 3z = 14$

مقادیر مذکور را در (E) میگذاریم ، معادلات خط قائم بدست میایند :

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{6}$$

یا $z = 3x \quad , \quad 2z = 3y$

تمرین

معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم به هریک از رویه های زیر را در نقطهٔ داده شده پیدا کنید :

۱) رویهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ درنقطهٔ $(6, 2, 3)$

جواب : $\frac{x - 6}{6} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} \ , \quad 6x + 2y + 3z = 49$

۲) رویهٔ $z=x^{2}+y^{2}-1$ در نقطهٔ $(2, 1, 4)$

جواب : $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$, $4x+2y-z=6$

۳) رویهٔ $x^{2}+xy^{2}+y^{3}+z+1=0$ در نقطهٔ $(2, -3, 4)$

جواب : $\frac{x-2}{13}=\frac{y+3}{15}=\frac{z-4}{1}$, $13x+15y+z+15=0$

۴) رویهٔ $x^{2}+2xy+y^{2}+z-7=0$ در نقطهٔ $(1, -2, 6)$

جواب : $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-6}{-1}$, $2x+2y-z+8=0$

۵) رویهٔ $x^{2}y^{2}+xz-2y^{3}-10=0$ در نقطهٔ $(2, 1, 4)$

جواب : $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{1}$, $4x+y+z-13=0$

۶) رویهٔ $x^{2}-y^{2}-z^{2}=1$ در نقطهٔ $(3, 2, 2)$

۷) رویهٔ $x^{2}+y^{2}-z^{2}=25$ در نقطهٔ $(5, 5, 5)$

۸) رویهٔ $2x^{2}+3y^{2}+4z^{2}=6$ در نقطهٔ $(1, 1, \frac{1}{2})$

۹) رویهٔ $x+y-z^{2}=3$ در نقطهٔ $(3, 4, 2)$

۱۰) معادلهٔ صفحهٔ مماس به هیپربلوئید دو پارچهٔ $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$ رادرنقطهٔ (x_1, y_1, z_1) پیدا کنید .

جواب : $\frac{x_1x}{a^{2}}-\frac{y_1y}{b^{2}}-\frac{z_1z}{c^{2}}=1$

۱۱) معادلهٔ صفحهٔ مماس به رویهٔ $ax^{2}+by^{2}+cz^{2}+d=0$ را در نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) پیدا کنید .

جواب : $ax_1x+by_1y+cz_1z+d=0$

۱۲) نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ مماس به کرهٔ

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}+2Lx+2My+2Nz+D=0$$

در نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) عبارتست از :

$$x_1x+y_1y+z_1z+L(x+x_1)+M(y+y_1)+N(z+z_1)+D=0$$

۱۳) معادلهٔ صفحهٔ مماس به رویهٔ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را در یک نقطهٔ غیر مشخص پیدا کنید و نشان دهید که مجموع مجذورات پاره خطهایی که با صفحهٔ مماس روی سه محور جدا میشوند ، مقدار ثابتی است .

۱٤) ثابت کنید که حجم چهاروجهی متشکل از صفحات مختصات و یک صفحهٔ مماس به رویهٔ $xyz=a^3$ مقدار ثابتی است .

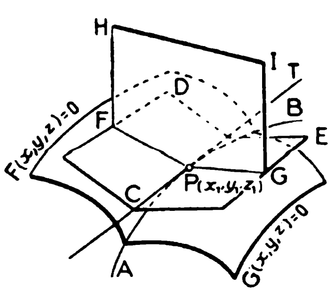
۱۵) خم $x=\frac{t^2}{2}$ ، $y=\frac{4}{t}$ ، $z=\frac{t-2t^2}{2}$ رویهٔ $x^2-4y^2-4z=0$ را در نقطهٔ $(2, 2, -3)$ قطع میکند . زاویهٔ تقاطع را پیدا کنید .

جواب : $90^\circ - arc\cos \frac{19}{3\sqrt{138}}=32^\circ\ 37'$

۱٦) خم $x=2t$ ، $y=\frac{3}{t}$ ، $z=-2t^2$ رویهٔ $x^2+y^2+3z^2=25$ را در نقطهٔ نظیر به $t=1$ قطع میکند . زاویهٔ تقاطع را پیدا کنید .

جواب : $90^\circ - arc\cos \frac{19}{7\sqrt{29}}=30^\circ\ 16'$

۱۷) خم $x=\frac{3}{2}(t^2+1)$ ، $y=t^4+1$ ، $z=t^3$ بیضوی $x^2+2y^2+3z^2=20$ رادرنقطهٔ $(1, 2, 3)$ قطع میکند . نشان دهید که خم به رویه عمود است .



شکل ۲۰۵

۲۳۹- صورتهای دیگر معادلات خط مماس وصفحهٔ قائم به یك خم فضایی .-
اگر خم مورد بحث فصل مشترك دورویهٔ متقاطع $F(x, y, z)=0$ و $G(x, y, z)=0$

خم‌درنقطهٔ $P(x_1 , y_1 , z_1)$ یعنی PT ، باید به هردو رویه مماس‌باشد ، پس باید هم درصفحهٔ مماس CD وهم‌درصفحهٔ مماس CE قرار داشته باشد لذا فصل مشترك آنهاست.

معادلات دو صفحهٔ مماس در نقطهٔ P بنابر (F) عبارتند از :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1(y-y_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1(z-z_1)=0$$

(۱)

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1(y-y_1)+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1(z-z_1)=0$$

این معادلات ، بشرط آنکه همزمان درنظرگرفته شوند ، معادلات خط مماس PT به خم فضایی AB هستند.

اگر پارامترهای هادی فصل مشترك دو صفحهٔ (۱) را A و B و C بنامیم ، بنابر (۶) شمارهٔ ٤ داریم :

$$A=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1$$

(۲)

$$B=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1$$

$$C=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1$$

پس معادلات خط مماس CPT

(۳)

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

و معادلهٔ صفحهٔ قائم PHI

(٤)

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

است.

مثالـ معادلات خط مماس وصفحهٔ قائم برخم فصل مشترك کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4r^2$

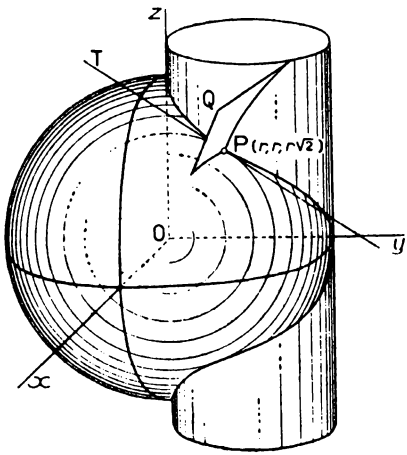
واستوانهٔ $x^۲+y^۲=۲ry$ رادرنقطهٔ $(r, r, r\sqrt{۲})$ پیدا کنید .

حل - مینویسیم

$$G=x^۲+y^۲-۲ry \quad \text{و} \quad F=x^۲+y^۲+z^۲-٤r^۲$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_۱=۲r \;,\; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_۱=۲r \;,\; \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_۱=۲r\sqrt{۲}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_۱=۲r \;,\; \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_۱=۰ \;,\; \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_۱=۰$$



شکل ۲۰٦

این مقادیر را در دستور (۲) میگذاریم ، داریم :

$$A=۰ \;,\; B=٤r^۲\sqrt{۲} \;,\; C=-٤r^۲$$

بنابر (۳)
$$\frac{x-r}{۰}=\frac{y-r}{\sqrt{۲}}=\frac{z-r\sqrt{۲}}{-۱}$$

یا
$$x=r \;,\; y+\sqrt{۲}\,z=۳r$$

اینها معادلات مماس PT در نقطهٔ P برخم فصل مشترکند .

اگر مقادیر مذکور را در دستور (٤) بگذاریم ، معادلهٔ صفحهٔ قائم بدست میاید :

$$\cdot \times (x-\text{r})+\sqrt{\text{۲}}(y-\text{r})-(z-\text{r}\sqrt{\text{۲}})=\cdot$$

یا

$$\sqrt{\text{۲}}\,y-z=\cdot$$

مثال ۲- در مثال قبل ، زاویهٔ تقاطع دو رویه را در نقطهٔ مذکور پیدا کنید .

حل - میدانیم که زاویهٔ تقاطع دو رویه در هرنقطه از فصل مشترك برابر زاویهٔ بین صفحات مماس به دو رویه یازاویهٔ بین خطوط قائم به دو رویه در آن نقطه است. درمثال ۱ پارامترهای هادی این دو خط را پیدا کرده‌ایم [دستور (E) ی شمارهٔ ۲۳۷ را ببینید] :

$$a=\text{۲r} \quad , \quad b=\text{۲r} \quad , \quad c=\text{۲r}\sqrt{\text{۲}}$$

$$a'=\text{۲r} \quad , \quad b'=\cdot \quad , \quad c'=\cdot$$

پس بنابر (٦) شمارهٔ ٤

$$\cos\theta=\frac{\text{٤r}^{\text{۲}}}{\text{۸r}^{\text{۲}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \implies \theta=\text{٦۰}^\circ$$: جواب

تمرین

معادلات خط مماس و صفحهٔ قائم به هریك از خمهای زیر را درنقطهٔ مذکور پیدا کنید :

۱) خم $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=\text{۱۳}$ ، $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=\text{٤۹}$ درنقطهٔ $(\text{۳}\,,\,\text{۲}\,,\,-\text{٦})$

جواب : $\text{۲}x-\text{۳}y=\cdot$ و $z+\text{٦}=\cdot$, $\frac{x-\text{۳}}{\text{۲}}=\frac{y-\text{۲}}{-\text{۳}}$

۲) خم $\text{۳}x^{\text{۲}}+\text{۲}y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=\text{۳۰}$ ، $z=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}-\text{۱}$ درنقطهٔ $(\text{۲}\,,\,\text{۱}\,,\,\text{٤})$

جواب : $\text{٥}x-\text{۱۱}y-\text{۲}z+\text{۹}=\cdot$, $\frac{x-\text{۲}}{\text{٥}}=\frac{y-\text{۱}}{-\text{۱۱}}=\frac{z-\text{٤}}{-\text{۲}}$

۳) خم $x^{\text{۲}}+\text{٤}y^{\text{۲}}+\text{٤}z^{\text{۲}}=\text{۸٤}$ ، $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}=\text{۱٦}$ درنقطهٔ $(\text{۲}\,,\,\text{٤}\,,\,\text{۲})$

جواب : $\text{۱٦}x-\text{٥}y+\text{٦}z=\text{۲٤}$, $\frac{x-\text{۲}}{\text{۱٦}}=\frac{y-\text{٤}}{-\text{٥}}=\frac{z-\text{۲}}{\text{٦}}$

۴) خم $۲x^۲+y^۲-z^۲=۰$ ، $x^۲+y^۲+۳z^۲=۳۲$ درنقطهٔ $(۲ , ۱ , ۳)$

جواب : $۶x-۲۱y+z+۶=۰$, $\frac{x-۲}{۶}=\frac{y-۱}{-۲۱}=\frac{z-۳}{۱}$

۵) خم $x^۲-y^۲+z^۲=۹$ ، $x^۲-y^۲-z^۲=۱$ در نقطهٔ $(۳ , ۲ , ۲)$

۶) خم $۲x+y+z-۲۴=۰$ ، $x^۲+۴y^۲-۴z^۲=۰$ در نقطهٔ $(۸,۳,۵)$

۷) معادلات خم مارپیچی عبارتند از :

$$x^۲+y^۲=r^۲ \quad , \quad y=x\, tg\,\frac{z}{c}$$

نشان دهید که معادلات خط مماس به مارپیچ مذکور در نقطهٔ $(x_۱ , y_۱ , z_۱)$

$$c(x-x_۱)+y_۱(z-z_۱)=۰$$

$$c(y-y_۱)-x_۱(z-z_۱)=۰$$

و معادلهٔ صفحهٔ قائم به آن در نقطهٔ $(x_۱ , y_۱ , z_۱)$

$$y_۱x-x_۱y-c(z-z_۱)=۰$$

است .

۸) خم فصل مشترک دورویهٔ $x^۲y^۲+۲x+z^۳=۱۶$ و $۳x^۲+y^۲-۲z=۹$ از نقطهٔ $(۲ , ۱ , ۲)$ میگذرد . معادلات صفحات مماس به این دو رویه را در نقطهٔ مذکور پیدا کنید . جواب : $۶x+y-z=۱۱$ و $۳x+۴y+۶z=۲۲$

۹) نشان دهید که بیضوی $x^۲+۳y^۲+۲z^۲=۹$ وکرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲-۸x-۸y-۶z+۲۴=۰$ در نقطهٔ $(۲ , ۱ , ۱)$ بیکدیگر مماسند .

۱۰) نشان دهید که پارابلوئید $۳x^۲+۲y^۲-۲z=۱$ وکرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲-۴y-۲z+۲=۰$ در نقطهٔ $(۱ , ۱ , ۲)$ بیکدیگر عمودند .

۲۴۰- دستور میانه . - اکنون به مطالعهٔ چند مورد استعمال مشتقهای جزئی که نتایجی از دستور میانه برای توابع چند متغیرند میپردازیم . این نتایج برپایهٔ استدلالهای شمارهٔ ۱۱۶ قرار دارند . نخست نشان میدهیم که :

$$(۱)\qquad f(x_\circ+h\,,\,y_\circ+k)=f(x_\circ\,,\,y_\circ)+hf'_x(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)$$
$$+kf'_y(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)\qquad (۰<\theta<۱)$$

بدین منظور مینویسیم :

$$(۲)\qquad F(t)=f(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$

دستور (D)ی شمارهٔ ۱۱۶ را برای تابع $F(t)$ بکار میبندیم و در آن $a=۰$ و $\triangle a=۱$ میگذاریم ، داریم :

$$(۳)\qquad F(۱)=F(۰)+F'(\theta)\qquad (۰<\theta<۱)$$

از دو طرف (۲) نسبت به t مشتق میگیریم . چون $x=x_\circ+ht$ و $y=y_\circ+kt$ است ، بنابر دستور (D) ی شمارهٔ ۲۲۹ داریم :

$$(٤)\qquad F'(t)=hf'_x(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)+kf'_y(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$

از رابطهٔ (۲) داریم :

$$(٥)\qquad F(۱)=f(x_\circ+h\,,\,y_\circ+k)\quad,\quad F(۰)=f(x_\circ\,,\,y_\circ)$$

و از رابطهٔ (٤) داریم :

$$(٦)\qquad F'(\theta)=hf'_x(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)+kf'_y(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)$$

این مقادیر را در (۳) میگذاریم ، دستور (۱) بدست میاید .

اگر بخواهیم دستوری شبیه به دستور (F) شمارهٔ ۱۲٤ داشته باشیم ، باید $F''(t)$ را تشکیل دهیم . دستور (D) ی شمارهٔ ۲۲۹ را مجدداً بکار میبندیم ، داریم :

$$\frac{d}{dt}f'_x(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)=hf''_{xx}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)+kf''_{yx}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$

$$\frac{d}{dt}f'_y(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)=hf''_{xy}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)+kf''_{yy}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$

از دو طرف (٤) نسبت به t مشتق میگیریم :

$$(۷)\qquad F''(t)=h^۲f''_{xx}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)+۲hkf''_{xy}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$
$$+k^۲f''_{yy}(x_\circ+ht\,,\,y_\circ+kt)$$

دستور (F) شمارهٔ ۱۲٤ را برای تابع $F(t)$ بکار میبندیم و در آن $b=۱$ ، $a=۰$ و $x_۲=\theta$ میگذاریم ، داریم :

$$F(۱)=F(۰)+F'(۰)+\frac{۱}{۲!}F''(\theta) \qquad (۸)$$

اکنون با قرار دادن نتایج (٥) و (٤) و (٧) در (٨) تعمیم دستور میانه برای توابع دو متغیر بدست میاید :

$$(۹)\quad f(x_\circ+h\,,\,y_\circ+k)=f(x_\circ\,,\,y_\circ)+hf'_x(x_\circ\,,\,y_\circ)+kf'_y(x_\circ\,,\,y_\circ)$$

$$+\frac{۱}{۲!}[h^۲f''_{xx}(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)+۲hkf''_{xy}(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k)$$

$$+k^۲f''_{yy}(x_\circ+\theta h\,,\,y_\circ+\theta k] \qquad (۰<\theta<۱)$$

به منظور پیدا کردن دستورهایی برای توابع بیش از دو متغیر میتوان ، بدون اشکال ، روشی شبیه به آنچه در پایان شمارهٔ ۱۲٤ ذکر شده است ، بکار برد .

۲٤۱- ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیر . - درشماره‌های ٤٦ و ۱۲٥ شرایط لازم و کافی برای ماکزیمم یا مینیمم بودن تابعی از یک متغیر را بدست آورده‌ایم . اکنون به مطالعهٔ این مطلب در توابع چند متغیر مستقل میپردازیم .

مقدار تابع $f(x,y)$ در $x=a$ ، $y=b$ **ماکزیمم** است اگر $f(a,b)$ بزرگتر از مقدار $f(x,y)$ به ازای تمام مقادیر x و y در نزدیکی a و b باشد . به همین ترتیب ، مقدار تابع $f(x,y)$ در $x=a$ ، $y=b$ **مینیمم** است اگر $f(a,b)$ کوچکتر از مقدار $f(x,y)$ به ازای تمام مقادیر x و y در نزدیکی a و b باشد.

این تعریفها را میتوان به صورت تحلیلی زیر نوشت :

اگر به ازای تمام مقادیر h و k که قدر مطلق آنها از عدد کوچک مثبتی کوچکتر است ،

$$f(a+h\,,\,b+k)-f(a\,,\,b)=\text{عددی منفی} \qquad (۱)$$

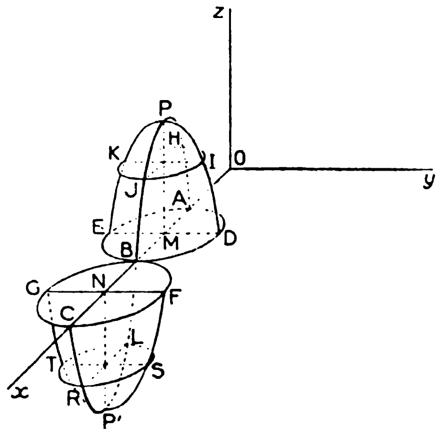
باشد ، $f(a,b)$ **ماکزیمم** تابع $f(x,y)$ است و اگر

$$f(a+h\,,\,b+k)-f(a\,,\,b)=\text{عددی مثبت} \qquad (۲)$$

باشد ، $f(a, b)$ **مینیمم** تابع $f(x, y)$ است .

این مطالب را میتوان از نظر هندسی به طریق زیر تعبیر کرد :

نقطهٔ P ازرویهٔ $z=f(x, y)$ وقتی ماکزیمم است که «بالاتر» ازهرنقطهٔ دیگری از رویه در نزدیکی P باشد . صفحهٔ xOy افقی فرض شده است. به همین ترتیب نقطهٔ P' وقتی مینیمم است که «پایینتر» از هرنقطهٔ دیگری از رویه در نزدیکی P' باشد .



شکل ۷۰ .

پس اگر $z_1=f(a, b)$ ماکزیمم یا مینیمم باشد ، صفحهٔ مماس به رویه درنقطهٔ (a, b, z_1) باید افقی یعنی موازی xOy باشد . اما صفحهٔ مماس (H) شمارهٔ ۲۳۷ وقتی موازی xOy است که ضرایب x و y صفر باشند . پس میتوان گفت که :

شرط لازم برای آنکه $f(a, b)$ ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x, y)$ باشد آن است که مقادیر $x=a$ و $y=b$ در معادلات زیر صدق کنند :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{۲}$$

شرایط (۲) را میتوان بدون استفاده از صفحهٔ مماس بدست آورد ، زیرا وقتی $y=b$ است ، تابع $f(x, b)$ ، درلحظه‌ای که x از a میگذرد ، نه میتواند زیاد شود و نه میتواند کم گردد (شمارهٔ ۵۰ را ببینید) وبدین ترتیب معادلهٔ سمت چپ (۲) بدست میاید.

اگر همین استدلال را برای تابع $f(a, y)$ بکنیم ، معادلهٔ سمت‌راست(۲) حاصل

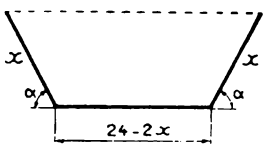
میشود . روش مذکور در بالا را میتوان برای توابع سه متغیر نیز بکار برد و گفت که شرط لازم برای آنکه $f(a, b, c)$ ماکزیمم یا مینیمم باشد آن است که معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۰ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=۰ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=۰ \tag{۴}$$

دارای جواب مشترکی مانند $x=a$ ، $y=b$ ، $z=c$ باشند .

بحث دربارهٔ شرایط لازم و کافی قدری مشکلتر است (پایینتر را ببینید) . اما در بسیاری از مسائل عملی وجود ماکزیمم یا مینیمم از پیش قطعی است و استدلال و اثباتی برای وجود آنها لازم نیست .

مثال ۱- میخواهیم با یک صفحهٔ بزرگ حلبی که عرض آن ۲۴ دسیمتر است یک آبشخوار بسازیم . دو طرف حلبی را ، بدانسان که شکل ۲۰۸ نشان میدهد ، بالا میزنیم . عرض دو طرف و زاویهٔ شیب آنها چه باشد تا حجم آبشخوار ماکزیمم گردد ؟



شکل ۲۰۸

حل - مساحت سطح مقطع آبشخوار که در شکل ۲۰۸ نشان داده شده است باید ماکزیمم باشد . این سطح یک ذوزنقه و طول قاعدهٔ بالا و پایین آن بترتیب $۲۴-۲x+۲x\cos\alpha$ و $۲۴-۲x$ و ارتفاع آن $x\sin\alpha$ و لذا مساحت آن

$$A=۲۴x\sin\alpha-۲x^۲\sin\alpha+x^۲\sin\alpha\cos\alpha \tag{۵}$$

است . از دو طرف این معادله یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به α مشتق میگیریم :

$$\frac{\partial A}{\partial x}=۲۴\sin\alpha-۴x\sin\alpha+۲x\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}=۲۴x\cos\alpha-۲x^۲\cos\alpha+x^۲(\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha).$$

این مشتقهای جزئی را مساوی صفر قرار میدهیم ، معادلات زیر بدست میآیند :

$$۲\sin\alpha(۱۲-۲x+x\cos\alpha)=۰$$

$$x[۲۴\cos\alpha-۲x\cos\alpha+x(\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha)]=۰$$

یکی از جوابهای این دستگاه $\alpha=0$ و $x=0$ است که در این مسئله فاقد معنی است. α و x را مخالف صفر میگیریم ومعادلات را حل میکنیم، جواب $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ و $x=8$ بدست میاید.

بررسی عملی مسئله نشان میدهد که این مساحت یک ماکزیمم دارد. پس این ماکزیمم به ازای $\alpha=60^\circ$ و $x=8\ \mathrm{dm}$ حاصل میشود.

اکنون شرط کافی را بدست میاوریم. فرض میکنیم که معادلات (۳) برقرارند. اگر در دستور (۹) شمارهٔ ۲۴۰، بجای x_0 و y_0 بترتیب a و b بگذاریم و جملهٔ اول طرف راست را به طرف چپ ببریم، داریم:

$$(6)\quad f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{2!}\left[h^2 f''_{xx}(x, y)+2hkf''_{xy}(x, y)+k^2 f''_{yy}(x, y)\right]$$

دراین معادله بجای $a+\theta h$ و $b+\theta k$ بترتیب x و y گذاشته‌ایم. بنابر (۱) و (۲)، $f(a, b)$ ماکزیمم یا مینیمم‌است بسته به آنکه طرف راست به ازای تمام مقادیر h و k که از نظر قدر مطلق به اندازهٔ کافی کوچک ولی مخالف صفرند، منفی یا مثبت باشد. مینویسیم:

$$(7)\qquad A=f''_{xx}(x, y)\ ,\ B=f''_{xy}(x, y)\ ,\ C=f''_{yy}(x, y)$$

اتحاد زیر را درنظر میگیریم:

$$(8)\qquad Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}\left[(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2\right]$$

اگر

$$(9)\qquad AC-B^2>$$

باشد، عبارت داخل کروشه همواره مثبت است، پس طرف چپ اتحاد (۸) همان علامت A (یا C) را دارد [A و C بنابر نامساوی (۹) دارای یک علامتند].

اکنون باید فرض (۹) را در طرف راست (۶)، با توجه به این که $|h|$ و $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچکند، بکار برد. فرض میکنیم که نامساوی (۹) به ازای $x=a$، $y=b$ برقرار است و مشتقهای (۷) نیز پیوسته‌اند. بنابراین نامساوی (۹) به ازای مقادیر نزدیک به a و b نیز برقرار است. پس علامت A (یا C) همان علامت

$f''_{xx}(a, b)$ [یا (a, b) $[f''_{yy}$ است. بدین‌ترتیب **دستورالعملی** برای پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x, y)$ بدست میاید :

عمل اول ـ دستگاه همزمان زیر را حل میکنیم :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۰ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=۰$$

عمل دوم ـ به ازای این مقادیر x و y مقدار Δ را بدست میاوریم :

$$\Delta=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\times\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}-\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial x\,\partial y}\right)^۲$$

عمل سوم ـ تابع دارای ماکزیمم است اگر

$$\Delta>۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\left(\text{یا } \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\right)<۰$$

باشد ، و تابع دارای مینیمم است اگر

$$\Delta>۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\left(\text{یا } \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}\right)>۰$$

باشد . بآسانی میتوان نشان داد که اگر Δ منفی باشد ، $f(x, y)$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم .

یادآور میشویم که لازم نیست دستورالعمل مذکور تمام ماکزیممها یا مینیممها را بدهد . ممکن است مثلاً به‌ازای یکی از مقادیر x و y مانند $(x_۱, y_۱)$ که درعمل اول بدست آمده است ، Δ صفر شود : دراین صورت ممکن است تابع به ازای $(x_۱, y_۱)$ دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد و یا اصلاً اکسترمم نداشته باشد ، شناختن تابع به ازای $(x_۱, y_۱)$ احتیاج به بررسی بیشتری دارد . درهرصورت دستورالعمل مذکور برای حل اغلب مسائل کافی است .

مطالعهٔ ماکزیمم و مینیمم توابع بیش‌از دو متغیر از عهدهٔ این کتاب خارج است و باید آن‌را درکتابهای مفصلتر آنالیز ریاضی مطالعه کرد .

مثال ۲ـ ماکزیمم یا مینیمم تابع $۳axy-x^۳-y^۳$ را پیدا کنید .

حل ـ $f(x, y)=۳axy-x^۳-y^۳$

عمل اول - $\frac{\partial f}{\partial y}=۳ax-۳y^{۲}=۰$, $\frac{\partial f}{\partial x}=۳ay-۳x^{۲}=۰$

این دستگاه همزمان را حل میکنیم ، داریم :

$x=a$, $y=a$ و $x=۰$, $y=۰$

عمل دوم - $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=-۶y$, $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x\,\partial y}=۳a$, $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=-۶x$

$$\Delta=\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}\times\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}-\left(\frac{\partial^{۲} f}{\partial x\,\partial y}\right)^{۲}=۳۶xy-۹a^{۲}$$

عمل سوم - وقتی $x=۰$ و $y=۰$ است ، $\Delta=-۹a^{۲}$ است . مقدار تابع در $(۰ , ۰)$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم .

وقتی $x=a$ و $y=a$ است ، $\Delta=+۲۷a^{۲}$ است . چون $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=-۶a$ است ، تابع در (a , a) دارای ماکزیمم است . برای پیدا کردن مقدار ماکزیمم ، در تابع داده شده بجای x و y ، a میگذاریم ، $a^{۳}$ بدست میاید .

مثال ۳ـ عدد a را طوری به سه‌قسمت تقسیم نمایید که حاصلضرب سه عدد جدید ماکزیمم باشد .

حل - قسمت اول را x و قسمت دوم را y مینامیم ، قسمت سوم برابر

$$a-(x+y)=a-x-y$$

میشود و حاصلضرب سه عدد جدید به صورت زیر در میاید :

$$f(x , y)=xy(a-x-y)$$

عمل اول - $\frac{\partial f}{\partial y}=ax-۲xy-x^{۲}=۰$, $\frac{\partial f}{\partial x}=ay-۲xy-y^{۲}=۰$

این دستگاه را حل میکنیم ، $x=\frac{a}{۳}$ و $y=\frac{a}{۳}$ بدست میایند .

عمل دوم -

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = a-2x-2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

$$\Delta = 4xy-(a-2x-2y)^2$$

عمل سوم - وقتی $x=\frac{a}{3}$ و $y=\frac{a}{3}$ است ، $\Delta=\frac{a^2}{3}$ است و چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2a}{3}$ است ، مقدار تابع به ازای $x=\frac{a}{3}$ و $y=\frac{a}{3}$ ماکزیمم است.

بدین ترتیب قسمت سوم نیز $\frac{a}{3}$ و مقدار ماکزیمم $\frac{a^3}{27}$ است .

تمرین

توابع زیر را از نظر ماکزیمم و مینیمم بررسی کنید :

جواب :

۱) تابع x^2+xy+y^2-6x+2 مینیمم به ازای $x=4$, $y=-2$

۲) تابع $4x+2y-x^2+xy-y^2$

ماکزیمم به ازای $x=\frac{10}{3}$, $y=\frac{8}{3}$

۳) تابع $2x^2-2xy+y^2+5x-3y$

مینیمم به ازای $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$

۴) تابع $x^3-3axy+y^3$ مینیمم به ازای $x=y=a$

۵) تابع $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ ماکزیمم به ازای $x=y=\frac{\pi}{3}$

مینیمم به ازای $x=y=\frac{5\pi}{3}$

۶) تابع $x^2-xy+y^2+ax+by+c$

۷) تابع $xy+\frac{a^۳}{x}+\frac{b^۳}{y}$

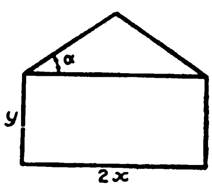
۸) نشان دهید که مقدار ماکزیمم تابع $\frac{(ax+by+c)^۲}{x^۲+y^۲+۱}$ برابر $a^۲+b^۲+c^۲$ است .

۹) مکعب مستطیلی را پیدا کنید که سه وجه آن منطبق برصفحات مختصات و یک رأس آن واقع برصفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ و حجم آن ماکزیمم است .

جواب : $\text{حجم}=\frac{abc}{۲۷}$

۱۰) حجم بزرگترین مکعب مستطیل محاط در بیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ را پیدا کنید . جواب : $\frac{۸abc}{۳\sqrt{۳}}$

۱۱) شکل ۲۰۹ یک پنج‌ضلعی را نشان میدهد که از یک مستطیل و یک مثلث متساوی ـ الساقین تشکیل شده است . طول محیط این پنج ضلعی مقدار ثابت P است. ابعاد آن چقدر باشند تا مساحت آن ماکزیمم باشد .



شکل ۲۰۹

جواب : $\alpha=۳۰^\circ\ ,\ ۲x=\frac{P}{۲+۲\sec\alpha-tg\,\alpha}$

$$y=\frac{P}{۲}-x(۱+\sec\alpha)$$

۱۲) کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط زیر را پیدا کنید :

$$x=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}\quad \text{و}\quad x=y-۳=z$$

۱۳) شیرینی فروشی دونوع آب‌نبات میسازد وبطور متوسط تهیهٔ هرکیلوگرم آب‌نبات از نوع اول ۵۰ ریال و تهیهٔ هرکیلوگرم از نوع دوم ۶۰ ریال برایش تمام میشود. اگر

قیمت فروش هر کیلوگرم از این دو نوع آب‌نبات‌را بترتیب x ریال و y ریال بگیریم ، مقدار فروش این دو نوع آب‌نبات با دستورهای زیر تعیین میشود :

$$N_1 = ۲۵۰(y-x) \quad , \quad N_2 = ۳۲۰۰۰ + ۲۵۰(x-۲y)$$

نشان دهید که سود شیرینی فروش وقتی حداکثر است که هر کیلوگرم آب‌نبات از نوع اول را ۸۹ ریال و هر کیلوگرم از نوع دوم را ۹۴ ریال بفروشد .

۱۴) جسم دواری عبارتست از یک استوانه که بالای آن یک مخروط قرار دارد . اگر شعاع و ارتفاع استوانه را بترتیب r و a و ارتفاع مخروط را h و سطح و حجم جسم مذکور را بترتیب S و V بنامیم ، نشان‌دهید که اگر V مقدار ثابتی باشد ، S به ازای ابعاد زیر مینیمم است :

$$r^3 = \frac{3V}{\pi(3+\sqrt{5})} \; , \; h = \frac{2r}{\sqrt{5}} \; , \; S = \frac{3V}{r}$$

۲۴۲- دستور تیلر برای توابع دو یا بیش از دو متغیر . - بسط تابع $f(x,y)$ را با استفاده از روش و نتایج شماره‌های ۱۹۴ و ۲۴۰ بدست میاوریم . تابع

$$F(t) = f(x+ht, y+kt) \tag{1}$$

را درنظر میگیریم و $F(t)$ را مانند دستور (۵) شمارهٔ ۱۹۴ بسط میدهیم ، داریم :

$$F(t) = F(0) + F'(0)\frac{t}{1!} + F''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots + F^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + R \tag{2}$$

برای بدست‌آوردن مقادیر $F(0)$ ، $F'(0)$ و $F''(0)$ درتساویهای (۲) و (٤) و (۷) شمارهٔ ۲٤۰ بجای t صفر میگذاریم . سپس از دو طرف تساوی (۷) نسبت به t مشتق میگیریم ودر حاصل آن بجای t صفر میگذاریم ، $F'''(0)$ بدست میاید . مشتقهای مراتب بالاتر را نیز به همین ترتیب بدست میاوریم . یادآور میشویم که $F'''(0)$ نسبت به h و k همگن و از درجهٔ سوم است . مشتقهای بعدی نیز نسبت به h و k همگنند .

اگر این مقادیر را در (۲) بگذاریم ، به ازای $t=1$ داریم :

$$(۳)\quad f(x+h\,,\,y+k)=f(x\,,\,y)+hf'_x(x\,,\,y)+kf'_y(x\,,\,y)$$
$$+\frac{۱}{۲!}\left[h^۲f''_{xx}(x\,,\,y)+۲hkf''_{xy}(x\,,\,y)+k^۲f''_{yy}(x\,,\,y)\right]+\cdots+R$$

ترکیب عبارت R کمی پیچیده و مشکل است و به همین سبب از پیدا کردن آن صرف‌نظر میکنیم .

در تساوی (۳) بجای x و y و h و k بترتیب a و b و $(x-a)$ و $(y-b)$ میگذاریم ، **دستور تیلر برای توابع دو متغیر** بدست میاید :

$$(I)\quad f(x\,,\,y)=f(a\,,\,b)+f'_x(a\,,\,b)(x-a)+f'_y(a\,,\,b)(y-b)$$
$$+\frac{۱}{۲!}\left[f''_{xx}(a\,,\,b)(x-a)^۲+۲f''_{xy}(a\,,\,b)(x-a)(y-b)\right.$$
$$\left.+f''_{yy}(a\,,\,b)(y-b)^۲\right]+\cdots$$

سرانجام اگر $a=b=۰$ بگذاریم ، بسطی نظیر سری ماکلرن ، دستور (A) ی شمارهٔ ۱۹٤ ، پیدا میشود :

$$(J)\quad f(x\,,\,y)=f(۰\,,\,۰)+f'_x(۰\,,\,۰)x+f'_y(۰\,,\,۰)y+\frac{۱}{۲!}\left[f''_{xx}(۰\,,\,۰)x^۲\right.$$
$$\left.+۲f''_{xy}(۰\,,\,۰)xy+f''_{yy}(۰\,,\,۰)y^۲\right]+\cdots$$

طرف راست دستور (J) را میتوان به صورت یک سری بینهایت نوشت :

$$(٤)\qquad u_۰+\frac{u_۱}{۱!}+\frac{u_۲}{۲!}+\cdots$$

در سری اخیر

$$u_۰=f(۰\,,\,۰)$$
$$u_۱=f'_x(۰\,,\,۰)x+f'_y(۰\,,\,۰)y$$
$$u_۲=f''_{xx}(۰\,,\,۰)x^۲+۲f''_{xy}(۰\,,\,۰)xy+f''_{yy}(۰\,,\,۰)y^۲$$

. . . .

است. جملات (٤) کثیرالجمله های همگنی از x و y هستند و درجهٔ هرجمله برابر اندیس آن است. بدین ترتیب (J) بسط تابع است به مجموع کثیرالجمله های همگنی از x و y و درجهٔ این کثیرالجمله ها صعودی است . بسط (I) نیز مجموع کثیرالجمله های همگنی از x—a و y—b است .

دستور (I) را **بسط تابع** $f(x, y)$ **درحول نقطهٔ** (a, b) مینامند .

برای مطالعهٔ این مطلب که به‌ازای‌چه مقادیری‌از x و y بسطهای (I) و (J) صحیحند ، باید به کتابهای مفصلتر آنالیز ریاضی مراجعه کرد .

اگر جملات سری (٤) را از جملهٔ معینی ببعد حذف کنیم ، یک دستور تقریبی برای پیدا کردن مقدار تابع $f(x, y)$ در نزدیکی (a, b) یا در نزدیکی $(0, 0)$ بدست میاید (با شمارهٔ ۲۰۰ مقایسه کنید) .

مثال - تابع $xy^2 + \sin xy$ را تاآنجاکه x و y ازدرجهٔ دومند ، در حول نقطهٔ $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ بسط دهید .

حل - دراین مثال $a = 1$ و $b = \frac{\pi}{2}$ و

$$f(x, y) = xy^2 + \sin xy$$

$$f'_x(x, y) = y^2 + y \cos xy$$

$$f'_y(x, y) = 2xy + x \cos xy$$

$$f''_{xx}(x, y) = -y^2 \sin xy$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2y + \cos xy - xy \sin xy$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2x - x^2 \sin xy$$

است . بجای x ، ۱ و بجای y ، $\frac{\pi}{2}$ میگذاریم ، داریم :

$$f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi^2 + 1$$

$$f'_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi^2$$

$$f'_y\left(۱ \ , \ \frac{\pi}{۲}\right)=\pi$$

$$f''_{xx}\left(۱ \ , \ \frac{\pi}{۲}\right)=-\frac{۱}{٤}\pi^{۲}$$

$$f''_{xy}\left(۱ \ , \ \frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

$$f''_{yy}\left(۱ \ , \ \frac{\pi}{۲}\right)=۱$$

این مقادیر را در (I) میگذاریم ، داریم :

جواب :

$$xy^{۲}+\sin xy=۱+\frac{۱}{٤}\pi^{۲}+\frac{۱}{٤}\pi^{۲}(x-۱)+\pi\left(y-\frac{\pi}{۲}\right)$$
$$+\frac{۱}{۲!}\left[-\frac{۱}{٤}\pi^{۲}(x-۱)^{۲}+\pi(x-۱)\left(y-\frac{\pi}{۲}\right)\right.$$
$$\left.+\left(y-\frac{\pi}{۲}\right)^{۲}\right]+\cdots$$

بسط تابع $f(x , y , z)$ را نیز میتوان بآسانی بدست آورد . این کار را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده میگذاریم .

تمرین

۱) با درنظر گرفتن تابع (۱) نشان دهید که :

$$F'''(\cdot)=h^{۳}\left(\frac{\partial^{۳}f}{\partial x^{۳}}\right)_{\cdot}+۳h^{۲}k\left(\frac{\partial^{۳}f}{\partial x^{۲}\partial y}\right)_{\cdot}$$
$$+۳hk^{۲}\left(\frac{\partial^{۳}f}{\partial x\,\partial y^{۲}}\right)_{\cdot}+k^{۳}\left(\frac{\partial^{۳}f}{\partial y^{۳}}\right)$$

۲) درستی بسط زیر را بیازمایید :

$$\cos x \cos y=۱-\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲!}+\frac{x^{٤}+٦x^{۲}y^{۲}+y^{٤}}{٤!}$$
$$-\frac{x^{٦}+۱۵x^{٤}y^{۲}+۱۵x^{۲}y^{٤}+y^{٦}}{٦!}+\cdots$$

۳) تابع $\sin x \sin y$ را به سری تام از x و y بسط دهید .

۴) درستی بسط زیر را بیازمایید :

$$a^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2}(2xy \ln a - y^2 + x^2 y \ln^2 a - xy^2 \ln a) + \frac{1}{3} y^3 + \cdots$$

۵) تابع $x^3 + xy^2$ را در حول نقطهٔ (۲ , ۱) بسط دهید .

۶) درستی بسط زیر را بیازمایید :

$$\sin(x+y) = x + y - \frac{x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \cdots$$

آیا دستورهای تقریبی زیر برای مقادیر کوچک x و y صحیحند ؟

۷) $e^x \sin y = y + xy$

۸) $e^x \ln(1+y) = y + xy$

۹) $\sqrt{\frac{1+x}{1+y}} = 1 + \frac{1}{2}(x-y)$

فصل بیست و پنجم

انتگرالهای چندگانه

۲۴۳- انتگرال‌گیری جزئی ومتوالی . - عمل معکوس نظیر به **مشتق‌گیری جزئی** در حساب دیفرانسیل ، **انتگرال‌گیری جزئی** در حساب انتگرال است . در انتگرال گیری جزئی از دیفرانسیلی که شامل دو یا چند متغیر است ، چنانکه از نام آن برمیاید ، **تنها یکی** از متغیرها را متغیر و بقیه را ثابت فرض میکنیم و انتگرال را پیدا مینماییم . درنتیجهٔ بدست آمده نیز یکی از متغیرها را متغیر و بقیه را ثابت فرض میکنیم و انتگرال را محاسبه مینماییم و به همین ترتیب عمل را ادامه میدهیم . این نوع انتگرال را ، بسته به عدهٔ متغیرها ، دوگانه ، سه گانه ، ... و بطورکلی **چندگانه** مینامیم .

تنها مطلب تازه درحل این مسئله این است که مقدارثابت انتگرال گیری صورت نوی دارد . این موضوع را با ذکر چند مثال روشن میکنیم . فرض میکنیم که تابع u با معادلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=۲x+y+۳$$

داده شده است . از دو طرف این معادله نسبت به x انتگرال میگیریم ، داریم :

$$u=x^۲+xy+۳x+\varphi$$

دراین معادله φ مقدار ثابت انتگرال گیری است . اما چون هنگام این انتگرال گیری y ثابت فرض شده است ، φ میتواند شامل y نیزباشد . برای نشان دادن بستگی φ به y بجای φ ، $\varphi(y)$ میگذاریم . بنابراین صورت کلی u عبارت میشود از

$$u=x^۲+xy+۳x+\varphi(y)$$

$\varphi(y)$ تابع دلخواهی از y است .

به حل مسئلهٔ دیگری میپردازیم :

$$u=\int\int(x^{۲}+y^{۲})dy\,dx$$

معنی این مسئله آن است که میخواهیم تابعی مانند u طوری پیدا کنیم که

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}=x^{۲}+y^{۲}$$

باشد . نخست x را ثابت فرض میکنیم و نسبت به y انتگرال میگیریم ، داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^{۲}y+\frac{y^{۳}}{۳}+\psi(x)$$

$\psi(x)$ تابع دلخواهی از x است .

اکنون y را ثابت فرض میکنیم و نسبت به x انتگرال میگیریم ، داریم :

$$u=\frac{x^{۳}y}{۳}+\frac{xy^{۳}}{۳}+\Psi(x)+\Phi(y)$$

$\Phi(y)$ تابع دلخواهی از y و $\Psi(x)=\int\psi(x)dx$ است .

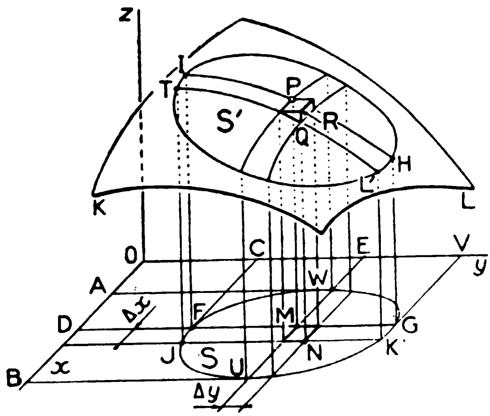
۲۴۴- انتگرال دوگانهٔ معین - تعبیر هندسی . - فرض میکنیم $f(x\,,y)$ تابع پیوسته و یکسانی از x و y است . ازنظر هندسی

$$z=f(x\,,y) \qquad (۱)$$

معادلهٔ رویه‌ای مانند KL است (شکل ۲۱۰) . در صفحهٔ xOy پاره سطح محدودی مانند S درنظر میگیریم و استوانهٔ قائمی بنا میکنیم که قاعدهٔ آن S باشد . مولدهای این استوانه موازی محور z ها هستند و قسمتی از رویهٔ KL ، مانند S′ ، را محدود میسازند . اکنون حجم جسمی را که بین S ، S′ و سطح استوانه‌ای محدود است پیدا میکنیم . به ترتیب زیر عمل مینماییم :

در داخل سطح S خطوطی موازی محور Oy و به فاصله‌هایی برابر Δx و خطوطی موازی محور Ox و به فاصله‌هایی برابر Δy رسم میکنیم و براین خطوط صفحاتی موازی صفحات yOz و xOz میگذرانیم. بدین‌ترتیب در سطح S شبکه‌ای از مستطیلهایی به

مساحت $\Delta x \Delta y$ و بین دو پاره سطح S و 'S شبکه‌ای از خطوط موازی محور Oz تشکیل میشود. این شبکه بندی‌استوانه را به یک عده ستونهای عمودی مانند MNPQ تقسیم میکند که قاعدهٔ بالایی وپایینی آنها قسمتهای نظیر از شبکه های 'S و S هستند. چون قاعدهٔ بالایی این ستونها مسطح نیست ، نمیتوان حجم این ستونها را مستقیماً حساب کرد . برای رفع این اشکال بجای هرستون منشوری درنظر میگیریم که قاعدهٔ بالایی آن



شکل ۲۱۰

صفحه‌ای موازی xOy باشد وازآن‌رأسی بگذرد که x و y آن کمترین مقدار را دارند. بدین ترتیب منشور قائم MNPR جانشین ستون MNPQ میشود . قاعدهٔ بالایی منشور MNPR موازی صفحهٔ xOy است و از نقطهٔ P میگذرد .

اگرمختصات P را (x, y, z) فرض کنیم، $MP=z=f(x, y)$ است داریم :

$$\text{حجم } MNPR=f(x, y)\Delta y \Delta x \qquad (۲)$$

در دستور (۲) بجای x و y مقادیر مربوط به هرمنشور را میگذاریم ، حجمهای حاصل را جمع میکنیم ، 'V ، مقدار تقریبی حجم V بدست میاید :

$$V'=\sum\sum f(x, y)\Delta y \Delta x \qquad (۳)$$

دراین عبارت علامت‌دوگانهٔ مجموع ، $\sum\sum$ ، نشانهٔآن است که درمجموع مورد نظر مقادیر دو متغیر x و y باید درنظرگرفته شود .

اکنون اگر Δx و Δy را بینهایت کوچک کنیم و به این ترتیب عدهٔ تقسیمات شبکهٔ S را بینهایت بزرگ نماییم و برای هرشبکه مجموع دوگانهٔ (۳) را بدست آوریم، بروشنی V' بسمت V میل میکند و نتیجهٔ اساسی زیر حاصل میگردد :

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\Delta y \Delta x \qquad (٤)$$

اکنون نشان میدهیم که میتوان این حد را با انتگرال گیری متوالی بدست آورد :
در شبکه‌بندی مذکور حجم مورد نظر با صفحات موازی yOz به ورقه‌هایی تقسیم شده است . یکی ازآنها ، مثلاً آن راکه بین دو صفحهٔ متوالی FIHG و JTL'K' قرار دارد درنظر میگیریم . ضخامت این ورقه Δx است . مقدار z در امتداد خم HI به این ترتیب بدست میاید که درمعادلهٔ $z=f(x, y)$ بجای x ، OD بگذاریم ، یعنی در امتداد HI

$$z=f(OD, y)$$

است و لذا

$$\text{مساحت } FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y)dy$$

است، حجم ورقهٔ مورد بحث تقریباً برابر حجم منشوری به قاعدهٔ FIHG وارتفاع Δx یعنی برابر

$$\Delta x(\text{مساحت } FIHG) = \Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y)dy$$

است و حجم تمام جسم بروشنی برابر حد مجموع منشورهایی است که وقتی $x(=OD)$ از OA تا OB تغییر میکند ، به همین طریق ساخته میشوند ، پس :

$$V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y)dy \qquad (٥)$$

میتوان به طریق مشابهی نشان داد که :

$$V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y)dx \qquad (٦)$$

انتگرالهای (٥) و (٦) را به صورت مختصرتر زیر مینویسند :

$$\int_{OA}^{OB}\int_{DF}^{DG} f(x,y)dy\,dx \quad \text{و} \quad \int_{OC}^{OV}\int_{EW}^{EU} f(x,y)dx\,dy$$

در انتگرال (۵) دوحد DF و DG توابعی از x هستند زیرا از حل معادلهٔ خم محدود کنندهٔ قاعدهٔ جسم نسبت به y بدست میایند .

به همین ترتیب در انتگرال (۶) دو حد EW و EU توابعی از y میباشند .

مقایسهٔ (۴) و (۵) و (۶) نشان میدهد که

$$\text{(A)} \qquad V=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum\sum f(x,y)\Delta y\Delta x=\int_{a_2}^{a_1}\int_{u_2}^{u_1} f(x,y)dy\,dx$$

$$=\int_{b_2}^{b_1}\int_{v_2}^{v_1} f(x,y)dx\,dy$$

v_1 و v_2 بطورکلی توابعی از y ، و u_1 و u_2 توابعی از x هستند . در هرانتگرال دوگانه دومین علامت انتگرال نظیر به دیفرانسیل اول است .

معادلهٔ (A) تعمیم قضیهٔ اساسی شمارهٔ ۱۵۶ به مجموعهای دوگانه است. این نتیجه را میتوان به صورت زیر بیان کرد :

انتگرال دوگانهٔ معین

$$\int_{a_2}^{a_1}\int_{u_2}^{u_1} f(x,y)dy\,dx$$

را میتوان به منزلهٔ آن قسمت از حجم استوانهٔ قائمی درنظر گرفت که بین صفحهٔ xOy و رویهٔ

$$z=f(x,y)$$

قراردارد و قاعدهٔ آن که برصفحهٔ xOy واقع است ، به خمهای زیرمحدود میباشد :

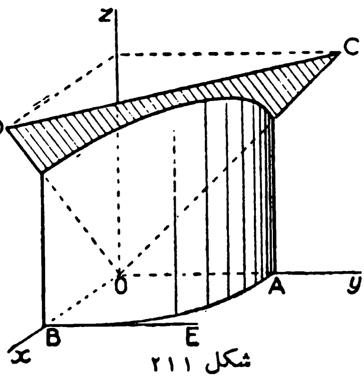
$$y=u_1 \;,\; y=u_2 \;,\; x=a_1 \;,\; x=a_2$$

انتگرال دوم را نیز میتوان به طریق مشابهی بیان کرد .

باتوجه به روش مذکور جالب توجه وآموزنده است که برای پیدا کردن حجم چنین جسمی به ترتیب زیر عمل کنیم :

یک ستون قائم باقاعدهٔ مستطیل به مساحت $dy\,dx$ و ارتفاع z را به عنوان یک جزء حجم درنظر بگیریم . x را مقدار ثابتی مانند OD فرض کنیم و حجم تمام اجزا را از $y=DF$ تا $y=DG$ باهم جمع نماییم وبدین ترتیب حجم یک ورقهٔ نازك راکه یک وجه آن سطح FGHI است بدست آوریم . سپس حجم این ورقه‌ها را از $x=OA$ تا $x=OB$ بیکدیگر بیفزاییم تا حجم تمام جسم نتیجه شود .

درانتگرال گیری متوالی ، وقتی دیفرانسیل شامل دومتغیراست ، حدود دومین علامت انتگرال نظیربه دیفرانسیل اول است . دیفرانسیل متغیرهاوحدود نظیرآنها به ترتیب عکس نوشته میشوند . قبل از بکاربستن مطالب مذکوردرمسائل عملی ، بهتر است خواننده بامقداری تمرین بامحاسبهٔ انتگرالهای چندگانه آشنایی بیشتری پیدا کند .



شکل ۲۱۱

مثال ۱ ـ مقدارانتگرال دوگانهٔ زیر را پیدا کنید :

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)\,dy\,dx$$

حل ـ

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{0}^{a}\left[\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)\,dy\right]dx$$

$$=\int_{0}^{a}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\int_{0}^{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2-x^2}{2}\right)dx$$

جواب : $=\dfrac{2a^3}{3}$

تعبیر هندسی : این جواب حجم جسمی است که بین استوانهٔ قائم OAB وصفحهٔ $z=x+y$ و صفحات مختصات محدود است (شکل ۲۱۱). پایهٔ این جسم بر صفحهٔ xOy قرار دارد و محدود است به

$$\left.\begin{array}{ll} y=0 & (\text{خط } OB) \\ y=\sqrt{a^2-x^2} & (\text{ربع دایرهٔ } AB) \end{array}\right\} \text{دوحد } y$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 & (\text{خط } OA) \\ x=a & (\text{خط } BE) \end{array}\right\} \text{دوحد } x$$

مثال ۲- درستی تساوی زیر را بیازمایید :

$$\int_b^{2b}\int_0^a (a-y)x^2dy\,dx=\frac{7a^2b^3}{6}$$

حل -

$$\int_b^{2b}\int_0^a (a-y)x^2dy\,dx=\int_b^{2b}\left[ay-\frac{y^2}{2}\right]_0^a x^2dx$$

$$=\int_b^{2b}\frac{a^2}{2}x^2dx=\frac{7a^2b^3}{6}$$

مثال ۳- درستی تساوی زیر را بیازمایید :

$$\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx=\frac{2a^3}{3}$$

حل -

$$\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xdy\,dx=\int_0^a\left[xy\right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$

درانتگرال گیری متوالی ازدیفرانسیلی که شامل سه متغیراست ، ترتیب انتگرال گیری همان است که برای دو متغیر ذکر شد ، یعنی ترتیب علامتهای انتگرال (با حدود آنها) که از داخل بسمت چپ خوانده شوند ، نظیر به ترتیب دیفرانسیلهاست بشرط آنکه از داخل بسمت راست خوانده شوند .

مثال ۴- درستی تساوی زیر را بیازمایید :

$$\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\int_{۲}^{۵} xy^{۲}dz\,dy\,dx=\frac{۳۵}{۲}$$

حل -

$$\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\int_{۲}^{۵} xy^{۲}dz\,dy\,dx=\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\left[\int_{۲}^{۵} xy^{۲}dz\right]dy\,dx$$

$$=\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\Big[xy^{۲}z\Big]_{۲}^{۵}dy\,dx$$

$$=۳\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}xy^{۲}dy\,dx=۳\int_{۲}^{۳}\left[\int_{۱}^{۲}xy^{۲}dy\right]dx$$

$$=۳\int_{۲}^{۳}\left[\frac{xy^{۳}}{۳}\right]_{۱}^{۲}dx=۷\int_{۲}^{۳}x\,dx=\frac{۳۵}{۲}$$

تمرین

مقدار هریک از انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید و در تمرینهای ۱ تا ۱۰ جسمی را که حجم آن برابر مقدار انتگرال است مشخص نمایید .

۱) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲}(x+۲)dy\,dx=۵$

۲) $\int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{x}y\,dy\,dx=\frac{۳۲}{۳}$

۳) $\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{x}}dy\,dx=\frac{۲}{۳}a^{\frac{۳}{۲}}$

۴) $\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{\frac{y}{۲}}y\,dx\,dy=\frac{۷}{۶}$

۵) $\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{x^{۲}}y\,dy\,dx=\frac{۱۶}{۵}$

۶) $\int_{۱}^{۲} \int_{y}^{y^{۲}} (x+۲y)\,dx\,dy = \frac{۱۴۳}{۳۰}$

۷) $\int_{۰}^{-۱} \int_{y+۱}^{۲y} xy\,dx\,dy = \frac{۱۱}{۲۴}$

۸) $\int_{-۱}^{۱} \int_{۰}^{x^{۲}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{۱}{۵}$

۹) $\int_{۰}^{۲} \int_{۰}^{x} (x^{۲}+y^{۲})\,dy\,dx = \frac{۱۶}{۳}$

۱۰) $\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x^{۲}} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx = \frac{۱}{۲}$

۱۱) $\int_{b}^{a} \int_{\beta}^{\alpha} \rho^{۲} \sin\theta\,d\theta\,d\rho = \frac{۱}{۳}(a^{۳}-b^{۳})(\cos\beta - \cos\alpha)$

۱۲) $\int_{۰}^{\pi} \int_{۰}^{a\cos\theta} \rho \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{۱}{۳}a^{۲}$

۱۳) $\int_{۰}^{\pi} \int_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} \rho^{۲} \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{۴}{۳}a^{۳}$

۱۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{a\cos\theta}^{a} \rho^{۴}\,d\rho\,d\theta = \left(\pi - \frac{۱۶}{۱۵}\right)\frac{a^{۵}}{۱۰}$

۱۵) $\int_{b}^{a} \int_{۰}^{b} \int_{a}^{۲a} x^{۲}y^{۲}z\,dz\,dy\,dx = \frac{۱}{۶}a^{۲}b^{۲}(a^{۳}-b^{۳})$

۱۶) $\int_{۰}^{a} \int_{۰}^{x} \int_{۰}^{y} x^{۳}y^{۲}z\,dz\,dy\,dx = \frac{۱}{۹۰}a^{۹}$

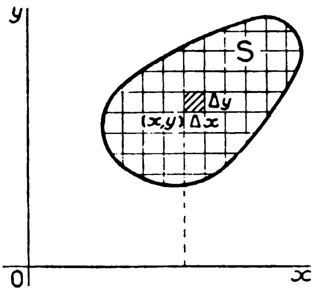
۱۷) $\int_{۰}^{۱} \int_{y^{۲}}^{۱} \int_{۰}^{۱-x} x\,dz\,dx\,dy = \frac{۴}{۳۵}$

۱۸) $\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{۱-x} \int_{۰}^{۱-y^{۲}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{۱۱}{۶۰}$

$$۱۹)\quad \int_{1}^{2}\int_{0}^{z}\int_{0}^{x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy\,dx\,dz=\frac{1}{2}\pi$$

$$۲۰)\quad \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx=\frac{1}{8}e^4-\frac{3}{4}e^2+e-\frac{3}{8}$$

۲۴۵- مقدار انتگرال دوگانهٔ معین در داخل میدان S . - در شمارهٔ قبل انتگرال دوگانهٔ معین را به منزلهٔ یک حجم تعبیر کردیم. اما این بدان معنی نیست که مقدار هر انتگرال دوگانهٔ معین یک حجم است زیرا تعبیر فیزیکی هر انتگرال معین به طبیعت مقادیری که با x و y و z نشان داده شده‌اند بستگی دارد . وقتی x و y و z مختصات یک نقطه از فضاست ، نتیجهٔ محاسبه براستی یک حجم است. به منظور آن که برای انتگرال دوگانهٔ معین تعبیری جز تصور



شکل ۲۱۲

هندسی حجم پیدا کنیم متذکر میشویم که در تابع زیر علامت انتگرال متغیر z دیده نمیشود و بنابراین میتوانیم خود را در صفحهٔ xOy محدود کنیم . به‌این ترتیب تابع دادهٔ شدهٔ f(x , y) و یک میدان S از صفحهٔ xOy را درنظر میگیریم . در داخل این میدان شبکه‌ای از خطوط موازی ، مانند شمارهٔ ۲۴۴ ، رسم میکنیم . **درداخل یا روی محیط مستطیل** (جزء سطح) $\Delta x\Delta y$ نقطهٔ (x , y) را در نظر میگیریم ، حاصل‌ضرب $f(x , y)\Delta x\Delta y$ را حساب میکنیم ، نظیر این حاصل‌ضرب را برای تمام مستطیلهای جزء سطح تشکیل میدهیم و آنها را بیکدیگر میفزاییم ، داریم :

$$\sum\sum f(x , y)\Delta x\Delta y$$

سرانجام Δx و Δy را بسمت صفر میل میدهیم و نتیجه را به صورت زیر مینویسیم :

$$(۱)\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum f(x , y)\Delta x\Delta y=\iint_S f(x , y)dx\,dy$$

این انتگرال را **انتگرال دوگانهٔ تابع** $f(x, y)$ **درمیدان** S مینامیم .

وقتی $f(x, y)$ به ازای هیچیک از نقاط میدان S منفی نیست ، دستور (A) با انتگرال گیری متوالی مقدار طرف چپ (۱) را بدست میدهد. استدلال شمارهٔ ۲۴۴ هنگامی نیزکه S' ، قسمت مورد نظراز رویهٔ $z=f(x, y)$ ، زیر صفحهٔ xOy باشد ، صحیح است وحد مجموع دوگانه حجم جسم را با یک علامت منفی میدهد . انتگرال (A) نیز همان عدد منفی را میدهد. سرانجام اگر $f(x, y)$ به ازای نقاط مختلف S گاهی مثبت وگاهی منفی باشد ، S را به میدانهای کوچکتری طوری تقسیم میکنیم که در هریک از میدانهای جدید $f(x, y)$ همواره مثبت یا همواره منفی باشد . استدلال مذکور برای هریک از این میدانها صحیح و بنابراین برای مجموع آنها یعنی برای میدان S نیز صحیح است و میتوان گفت که : **انتگرال دوگانهٔ (۱) را میتوان درتمام حالات باانتگرال گیری متوالی محاسبه کرد .**

آنچه مانده است روش تعیین **حدود** انتگرال گیری است و ما اکنون به ذکر آن میپردازیم .

۲۴۶- محاسبهٔ مساحت بوسیلهٔ انتگرال دوگانه دردستگاه مختصات قائم . - مسئلهٔ محاسبهٔ مساحت بوسیلهٔ انتگرال ساده در شمارهٔ ۱۴۵ حل شده است. محاسبهٔ مساحت بوسیلهٔ انتگرال دوگانه بخصوص بدان سبب مفید است که راه تعیین حدود مسئلهٔ کلی شمارهٔ ۲۴۵ را روشن میسازد. برای محاسبهٔ انتگرال دوگانهٔ مورد نظر به طریق زیر عمل میکنیم.

شبکهٔ مستطیلها را مانند قبل بنا میکنیم (شکل ۲۱۲) ، داریم :

$$\text{جزء مساحت} = \Delta x \Delta y \qquad (۱)$$

اگر مساحت میدان S را A بنامیم ، بنابر تساوی (۱) شمارهٔ ۲۴۵ بروشنی داریم :

$$A = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \Delta x \Delta y = \iint_S dx\, dy \qquad (B)$$

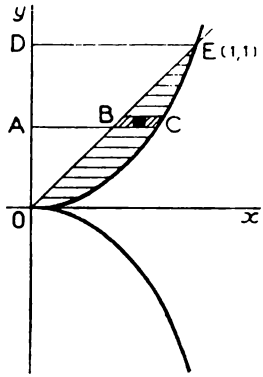
و با توجه به نتیجهٔ مذکور در شمارهٔ ۲۴۵ میتوانیم بگوییم که :

مساحت هرمیدان برابر مقدار انتگرال دوگانهٔ تابع $f(x, y)=1$ **در آن میدان است .**

یا بنابر شمارهٔ ۲۴۴ : **مقدار عددی مساحت S برابر مقدار عددی حجم استوانه است که قاعدهٔ آن S و ارتفاع آن ۱ است .**

مثالهای زیر راه تعیین حدود انتگرال گیری را نشان میدهند .

مثال ۱ - مساحت محدود بین سهمی سمی کوبیک $y^{2}=x^{3}$ و خط $y=x$ را حساب کنید (شکل ۲۱۳) .



شکل ۲۱۳

حل - ترتیب انتگرال گیری درشکل تعیین شده است. نخست نسبت به x انتگرال میگیریم ، یعنی مجموع اجزای dx dy را در یک نوار افقی بدست میاوریم ، داریم :

$$\int_{AB}^{AC} dx\, dy = dy\int_{AB}^{AC} dx = (\text{مساحت یک نوارافقی به‌ارتفاع } dy)$$

سپس ازحاصل انتگرال گیری اخیر نسبت به y انتگرال میگیریم ، یعنی مجموع تمام نوارهای افقی را پیدا میکنیم ، داریم :

$$A=\int_{\cdot}^{OD}\int_{AB}^{AC} dx\, dy$$

دوحد AB و AC با حل معادلات دو خم مورد نظر نسبت به x بدست میایند. درخط مستقیم $x=AB=y$ و درسهمی مذکور $x=AC=y^{\frac{2}{3}}$ است . برای تعیین OD این دو معادله را **همزمان** میگیریم تا نقطهٔ تقاطع E پیدا شود . مختصات آن (۱ , ۱) و لذا $OD=1$ است .

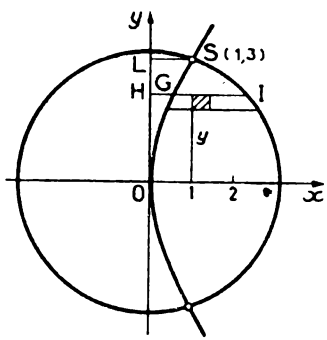
بنابراین

$$A=\int_{\cdot}^{1}\int_{y}^{y^{\frac{2}{3}}} dx\, dy=\int_{\cdot}^{1}(y^{\frac{2}{3}}-y)dy=\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}y^{2}\right]_{\cdot}^{1}$$

$$\text{جواب : } = \frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

میتوان اجزای $dx\,dy$ را نخست دریک نوار قائم جمع کرد و سپس نوارهای قائم را بیکدیگر افزود ، دراین صورت داریم :

$$A=\int_{0}^{1}\int_{x^{\frac{3}{2}}}^{x} dy\,dx=\int_{0}^{1}\left(x-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$



شکل ۲۱٤

در این مثال هردو ترتیب انتگرال گیری نتیجه میدهد. اما، چنانکه مثال زیرنشان میدهد، همیشه این طور نیست .

مثال ۲- آن قسمت از مساحت محدود بین محور x ها و دو خم

$$x^2+y^2=10 \quad \text{و} \quad y^2=9x$$

را که در ربع اول واقع است ، حساب کنید .

حل - در این مثال نخست نسبت به x انتگرال میگیریم ، یعنی یک نوار افقی محدود بین سهمی و دایره را درنظر میگیریم (شکل ۲۱٤) . بنابراین داریم :

$$A=\int_{0}^{3}\int_{HG}^{HI} dx\,dy$$

زیرا مختصات نقطهٔ تقاطع (۳ , ۱) S است. برای پیدا کردن HG ، مقدار x را از معادلهٔ $y^2=9x$ بدست میاوریم :

$$x=HG=\frac{1}{9}y^2$$

و برای پیدا کردن HI ، مقدار x را از معادلهٔ $x^2+y^2=10$ بدست میاوریم :

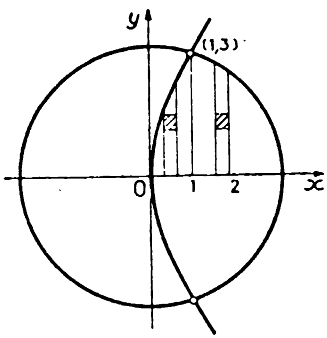
$$x=HI=+\sqrt{10-y^2}$$

بنابراین

$$A=\int_{0}^{3}\int_{\frac{1}{9}y^{2}}^{\sqrt{10-y^{2}}} dx\,dy=\left[\frac{y}{2}\sqrt{10-y^{2}}+5\arcsin\frac{y}{\sqrt{10}}-\frac{1}{27}y^{3}\right]_{0}^{3}=6{,}75$$

اگر نخست نسبت به y انتگرال بگیریم ، یعنی از نوارهای قائم استفاده کنیم (شکل ۲۱۵) ، مجبور به محاسبهٔ دو انتگرال میشویم ، یعنی

$$A=\int_{0}^{1}\int_{0}^{3\sqrt{x}} dy\,dx+\int_{1}^{\sqrt{10}}\int_{0}^{\sqrt{10-x^{2}}} dy\,dx=6{,}75$$



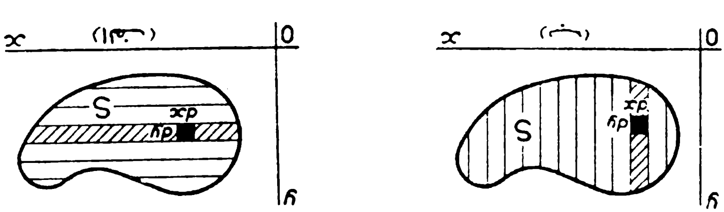
شکل ۲۱۵

درصورت امکان باید ترتیب انتگرال گیری را طوری انتخاب کرد که مقدار مساحت بامحاسبهٔ یک انتگرال بدست آید .

مثالهای بالا نشان میدهند که بسته به نوع خمهای محدود کنندهٔ سطح باید یکی ازدو دستور

$$A=\iint dy\,dx \quad \text{یا} \quad A=\iint dx\,dy$$

را انتخاب کرد . شکلهای ۲۱۶ ، بطوری کلی ، اختلاف نحوهٔ جمع کردن در دو انتگرال اخیر را نشان میدهند .



شکل ۲۱۶

تمرین

۱) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت محدود بین دو سهمی $۳y^۲=۲۵x$ و $۵x^۲=۹y$ را پیدا کنید . (a) نخست نسبت به y انتگرال بگیرید . (b) نخست نسبت به x انتگرال بگیرید .

جواب :

$$(a)\ \int_{۰}^{۳}\int_{\frac{۵x^۲}{۹}}^{\sqrt{\frac{۲۵x}{۳}}} dy\,dx=۵ \quad , \quad (b)\ \int_{۰}^{۵}\int_{\frac{۳y^۲}{۲۵}}^{\sqrt{\frac{۹y}{۵}}} dx\,dy=۵$$

با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت محدود به هرزوج خم زیر را حساب کنید :

۲) خم $y=۴x-x^۲$ و خط $y=x$ جواب : $۴\frac{۱}{۲}$

۳) خم $y^۲=۴x$ و خط $۲x-y=۴$ — ۹

۴) خم $y=x^۲$ و خط $۲x-y+۳=۰$ — $\frac{۳۲}{۳}$

۵) خمهای $y^۲=۲x$ و $x^۲=۶y$ — ۴

۶) خمهای $y^۲=۴x$ و $x=۱۲+۲y-y^۲$ — $\frac{۴۰۹۶}{۷۵}$

۷) خمهای $y^۲=۲x$ و $x^۲+y^۲=۴x$ — $\pi-\frac{۸}{۳}$

۸) خمهای $y^۲=۹+x$ و $y^۲=۹-۳x$ — ۴۸

۹) خم $(x^۲+۴a^۲)y=۸a^۳$ و خطوط $۲y=x$ و $x=۰$ — $a^۲(\pi-۱)$

۱۰) خم $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{۱}{۲}}$ و خط $x+y=a$ — $\frac{۱}{۳}a^۲$

جواب

۱۱) خم $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ و خط $x+y=a$ — $\frac{1}{32}(16-3\pi)a^2$

۱۲) خمهای $y=x^3-2x$ و $y=6x-x^2$ — ۱۶

۱۳) خم $x=6y-y^2$ و خط $y=x$

۱۴) خم $4y^2=x^3$ و خط $y=x$

۱۵) خمهای $y^2=x+4$ و $y^2=4-2x$

۱۶) خمهای $x^2+y^2=25$ و $27y^2=16x^3$

۱۷) خمهای $(2a-x)y^2=x^3$ و $y^2=ax$

۱۸) خمهای $x^2-y^2=14$ و $x^2+y^2=36$

۲۴۷- حجم زیر یک رویه . - در شمارهٔ ۲۴۴ دربارهٔ حجم جسمی که بین رویهٔ

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

و صفحهٔ xOy و یک استوانه محدود است ، بحث کردیم . پایهٔ این استوانه میدانی از صفحهٔ xOy مانند S و مولدهای آن موازی Oz هستند. چنانکه دیدیم حجم این جسم بنابر دستور (A) برابر

$$V=\iint_S z\,dx\,dy=\iint_S f(x,y)dx\,dy \tag{2}$$

است. ترتیب انتگرال گیری و حدود آن همان ترتیب و حدودی است که برای پیدا کردن مساحت ناحیهٔ S ذکر نمودیم . حجم چنین جسمی را «حجم زیر رویهٔ (۱)» مینامیم . درفصل چهاردهم نیز دربارهٔ «سطح زیر خم» که مشابه مسئلهٔ اخیراست ، بحث کرده‌ایم .

گاهی ممکن است حجم مورد نظر تنها بین یک رویه و صفحهٔ xOy محدود باشد .

یادآور میشویم که در(۲) جزء حجم منشورقائمی به پایهٔ $dx\,dy$ وارتفاع z است.

مثال ۱ - حجم محدود بین پارابلوئیدالیپتیک

$$4z=16-4x^2-y^2 \tag{3}$$

و صفحهٔ xOy را پیدا کنید .

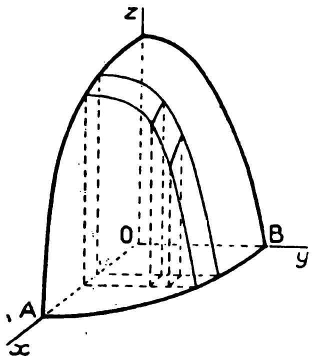
حل - مقدار z را از معادلهٔ (۳) بدست میاوریم :

$$z = ٤ - x^۲ - \frac{۱}{٤} y^۲ \qquad (٤)$$

بجای z صفر میگذاریم :

$$٤x^۲ + y^۲ = ۱٦ \qquad (٥)$$

تساوی (٥) معادلهٔ محیط قاعدهٔ جسم در صفحهٔ xOy است . اگر در دستور (۲) بجای z مقدار آن را از معادلهٔ (٤) قرار دهیم ، داریم :



شکل ۲۱۷

جواب : $$V = ٤ \int_{۰}^{۲} \int_{۰}^{۲\sqrt{٤-x^۲}} (٤ - x^۲ - \frac{۱}{٤} y^۲) dy\, dx = ۱٦\pi \qquad (٦)$$

حدود انتگرالها از روی معادلهٔ (٥) برای ربع بیضی OAB تعیین شده‌اند .

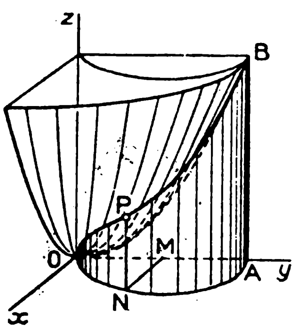
مثال ۲- حجم محدود بین پارابلوئیددوار

$$x^۲ + y^۲ = az \qquad (۷)$$

و صفحهٔ xOy و استوانهٔ

$$x^۲ + y^۲ = ۲ay \qquad (۸)$$

را پیدا کنید (شکل ۲۱۸) .



شکل ۲۱۸

حل - مقدار z را از معادلهٔ (۷) بدست میاوریم و حدود انتگرالها را از روی معادلهٔ (۸) که محیط قاعدهٔ استوانه درصفحهٔ xOy است ، تعیین میکنیم و در دستور (۲) میگذاریم ، داریم :

جواب : $$V = ۲ \int_{۰}^{۲a} \int_{۰}^{\sqrt{۲ay - y^۲}} \frac{x^۲ + y^۲}{a} dx\, dy = \frac{۳}{۲} \pi a^۳$$

حدود مذکور از سطح ONA (شکل ۲۱۸) بدست آمده‌اند و عبارتند از :

$MN = \sqrt{۲ay - y^۲}$ [مقدار x که از (۸) بدست آمده است] و $OA = ۲a$

تمرین

۱) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به $z = ٤ - x^۲$ و از پایین به صفحهٔ $z = ۰$ و از اطراف به $y^۲ = ٤x$ محدود است.

جواب : $V = ۲\int_۰^۲ \int_۰^{۲\sqrt{x}} (٤ - x^۲)dy\,dx = ۱۷{,}۲٤$

۲) حجم جسمی‌را پیدا کنید که ازبالا به‌صفحهٔ $x + z = ۲$ و از پایین به صفحهٔ $z = ۰$ و از اطراف به استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ٤$ محدود است.

جواب : $V = ۲\int_{-۲}^۲ \int_۰^{\sqrt{٤-x^۲}} (۲ - x)dy\,dx = ۸\pi$

۳) حجم جسمی را پیدا کنید که بین صفحهٔ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = ۱$ وصفحات مختصات محدود است.

جواب : $\frac{abc}{٦}$

٤) حجم‌جسمی‌را پیدا کنید که از بالا به صفحهٔ $x + z = ٤$ واز پایین به صفحهٔ $z = ۰$ و ازاطراف به سطح استوانه‌ای $y^۲ = ٤x$ محدود است.

جواب : $\frac{۵۱۲}{۱۵}$

۵) حجم جسمی‌را پیدا کنید که از بالا به سطح استوانه‌ای $y^۲ = a^۲ - az$ واز پایین به صفحهٔ $z = ۰$ و از اطراف به استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ محدود است.

جواب : $\frac{۳}{٤}\pi a^۳$

٦) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به پارابلوئیدالیپتیک $z = ۱ - \frac{۱}{٤}x^۲ - \frac{۱}{۹}y^۲$ و از پایین به صفحهٔ $z = ۰$ محدود است.

جواب : ۳π

۷) حجم جسمی را پیدا کنید که ازبالا به صفحهٔ $x+y+z=8$ ، از پایین به صفحهٔ $z=0$ و ازاطراف به صفحات $x+2y=8$ و $x-2y=8$ و $x=0$ محدود است . جواب : $170\frac{2}{3}$

۸) حجم جسمی را پیدا کنید که بین سطح استوانه‌ای $x^2+az=a^2$ وصفحات $x+y=a$ و $y=0$ و $z=0$ محدود است . جواب : $\frac{4}{3}a^3$

۹) حجم‌جسمی‌را پیدا کنید که به سطوح $y^2+z^2=4ax$ و $x=3a$ محدود است و در داخل $y^2=ax$ قرار دارد . جواب : $(6\pi+9\sqrt{3})a^3$

۱۰) حجم جسمی‌را پیدا کنید که از بالا به سطح استوانه‌ای $y^2=a^2-az$ واز پایین به صفحهٔ $z=0$ محدود است ودر داخل سطح استوانه‌ای $x^2+y^2=ax$ قرار دارد . جواب : $\frac{15}{64}\pi a^3$

۱۱) حجم جسمی را پیدا کنید که در داخل استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ قرار دارد و از بالا به صفحهٔ $z=2x+a$ و از پایین به صفحهٔ $z=0$ محدود است . جواب : $3\pi a^3$

۱۲) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به رویهٔ $y^2+z=4$ و ازپایین به صفحهٔ $z=0$ محدود است ودر داخل‌سطوح استوانه‌ای $y^2-2x=0$ و $y^2=8-2x$ قرار دارد . جواب : $\frac{512}{15}$

۱۳) حجم جسمی‌راپیدا کنید که بین پاراbلوئید $x^2+y^2=az$ وسطح استوانه‌ای $y^2=a^2-ax$ وصفحات $x=0$ و $z=0$ محدود است . جواب : $\frac{4}{7}a^3$

۱۴) حجم جسمی را پیدا کنید که زیر سطح $4z=16-4x^2-y^2$ و بالای صفحهٔ $z=0$ و داخل استوانهٔ $x^2+y^2=2x$ قرار دارد . جواب : $\frac{43}{16}\pi$

۱۵) محورهای دواستوانهٔ دوارکه شعاع هردوی‌آنها r است ، یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع میکنند . حجم مشترك بین این دو استوانه را پیدا کنید . جواب : $\frac{16}{3}r^3$

۱۶) حجم داخل سطح بستهٔ $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}+z^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ را پیدا کنید . (فصل مشترك این رویه با هریک از صفحات مختصات یک آستروئید است . فصل بیست‌وششم را ببینید .) جواب : $\frac{۴}{۳۵}\pi a^۳$

۱۷) حجم مشترك بین دو رویهٔ $y^۲+z^۲=۴ax$ و $x^۲+y^۲=۲ax$ را حساب کنید . جواب : $\left(۲\pi+\frac{۱۶}{۳}\right)a^۳$

۲۴۸- طرز تشکیل انتگرال دوگانه . - اکنون به بیان طرز تشکیل انتگرال دوگانه‌ای میپردازیم که اندازهٔ کمیت خواسته شده‌ای را بدست میدهد. موارد استعمال آن در شمارهٔ بعد گفته خواهد شد. در شمارهٔ ۱۵۶ نیزدستورالعملی برای تشکیل انتگرال ساده داده شده است .

عمل اول - خمهایی‌را که میدان‌یاسطح مورد نظررا محدود میسازند ، رسم میکنیم .

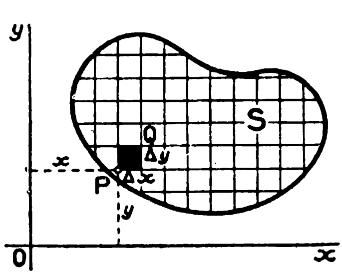
عمل دوم - در یک نقطهٔ دلخواه از میدان مذکور مانند $P(x , y)$ مستطیل جزء سطح یعنی $\Delta x\Delta y$ را بنا میکنیم .

عمل سوم - تابع $f(x , y)$ را ، که پس‌ازضرب کردن در $\Delta x\Delta y$ کمیت مطلوب را میدهد ، تشکیل میدهیم .

عمل چهارم - انتگرال خواسته شده به صورت

$$\iint f(x , y)dx\,dy$$

است و باید آن را در میدان یا سطح داده شده حساب کرد . ترتیب انتگرال گیری و حدود آن همان ترتیب وحدودی است که برای پیدا کردن مساحت میدان مذکور تعیین میشود .



شکل ۲۱۹

۲۴۹- گشتاور یك رویهٔ مسطح و مرکز ثقل هندسی آن . - این مسئله را در شمارهٔ ۱۷۷ بااستفاده ازانتگرال‌ساده حل کرده‌ایم . اما برای حل این مسئله اغلب بهتر است از انتگرال دوگانه استفاده کنیم .

دستورالعمل شمارهٔ قبل را بکار میبندیم. گشتاور مستطیلهای جزء سطح بترتیب برابر

گشتاور نسبت به محور Oy : $x\Delta x\Delta y$

گشتاور نسبت به محور Ox : $y\Delta x\Delta y$

است، پس گشتاورهای تمام سطح، با توجه به نامگذاری شمارهٔ ۱۷۷، برابر

$$M_x=\iint y\,dx\,dy \quad , \quad M_y=\iint x\,dx\,dy \tag{C}$$

میشوند و مختصات مرکز ثقل هندسی رویهٔ سطح با دستورهای زیر تعیین میگردند:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{\text{مساحت}} \quad , \quad \bar{y}=\frac{M_x}{\text{مساحت}} \tag{D}$$

دستورهای (C) مقادیر انتگرالهای دوگانهٔ توابع

$$f(x\,,y)=y \quad \text{و} \quad f(x\,,y)=x$$

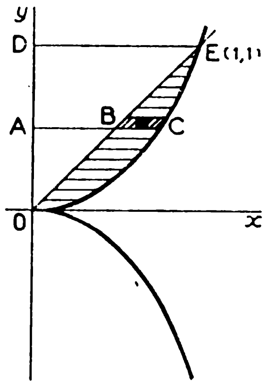
را در درون سطح مورد نظر بدست میدهند (شمارهٔ ۲٤٥).

برای سطحی که بین یک خم و محور x ها و دو خط موازی محور y ها محدود است («سطح زیر خم»)، دستورهای (C) به صورت زیر درمیآیند:

$$M_x=\int_a^b\int_0^y y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx \tag{1}$$

$$M_y=\int_a^b\int_0^y x\,dy\,dx=\int_a^b xy\,dx$$

اینها همان دستورهای (۲) ی شمارهٔ ۱۷۷ هستند. یادآور میشویم که در دستورهای (۱)، y عرض یک نقطه از خم است و مقدار آن را باید از معادلهٔ خم بدست آورد و قبل از انتگرالگیری در تابع زیر علامت انتگرال بجای y گذاشت.



شکل ۲۲۰

مثال - مرکز ثقل هندسی سطح واقع در ربع اول و محدود بین سهمی سمی کوبیک $y^۲ = x^۳$ وخط $y=x$ را پیدا کنید.

حل - ترتیب و حدود انتگرال گیری را در مثال ۱ شمارهٔ ۲۴۶ پیدا کرده‌ایم، پس بنابر دستورهای (C) :

$$M_x = \int_۰^۱ \int_y^{y^{\frac{۲}{۳}}} y\,dx\,dy = \int_۰^۱ (y^{\frac{۵}{۳}} - y^۲)dy = \frac{۱}{۲۴}$$

$$M_y = \int_۰^۱ \int_y^{y^{\frac{۲}{۳}}} x\,dx\,dy = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ (y^{\frac{۴}{۳}} - y^۲)dy = \frac{۱}{۲۱}$$

چون $\frac{۱}{۱۰}$= مساحت $=A$ است، بنابر دستورهای (D) :

جواب : $\bar{x} = \frac{۱۰}{۲۱} = ۰٫۴۸$, $\bar{y} = \frac{۵}{۱۲} = ۰٫۴۲$

۲۵۰- قضیهٔ پاپوس * . - رابطهٔ قابل استفاده و مفیدی بین مرکز ثقل هندسی یک سطح و حجم جسم دواری که براثر دوران آن تولید میشود برقرار است که میتوان آن‌را به صورت زیر بیان کرد :

* این قضیه درکتابهای اروپایی به Guldin (۱۵۷۷-۱۶۴۳) منسوب‌است‌زیرا این مطلب در جلد دوم کتاب گولدن به نام Centrobaryca که به سال ۱۶۴۰ منتشر شده است، درج است. آنچه درقدیمیترین نسخهٔ خطی آثار Pappus of Alexandria که از قرن دوازدهم بجا مانده است دیده میشود، مشکوک است و معلوم نیست که از خود پاپوس است و یا بعداً به توسط یک حاشیه نویس به آن افزوده شده است. مترجم

اگر میدان محدودی از یك صفحه را در حول خطی از این صفحه که میدان مذکور را قطع نمیکند دوران دهیم ، حجم جسم حاصل از دوران برابر است با حاصل‌ضرب مساحت میدان در طول محیط دایره‌ای که مرکز ثقل میدان میپیماید .

اثبات ـ فرض میکنیم که میدان مورد نظر سطح داده شده درشکل ۲۱۹ است . این سطح را در حول محور x ها دوران میدهیم . مستطیل جزء سطح میدان S در نقطهٔ P یک تاج استوانه تولید میکند که حجم آن (ΔV) برابر است با

$$\Delta V=\pi(y+\Delta y)^{2}\Delta x-\pi y^{2}\Delta x$$

یا پس از اختصار

$$\Delta V=2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\Delta y$$

در رابطهٔ (۱) شمارهٔ ۲۴۵ ، در $f(x,y)$ ، (x,y) نقطه‌ای «در مستطیل PQ یا روی محیط آن» است . دراینجا $\left(x,y+\frac{\Delta y}{2}\right)$ نقطه‌ای روی محیط PQ است . بنابراین $f(x,y)=2\pi y$ میگذاریم . ΔV به صورت $f(x,y)\Delta x\Delta y$ درمیاید و بنابر رابطهٔ (۱) شمارهٔ ۲۴۵ و روابط (C) داریم :

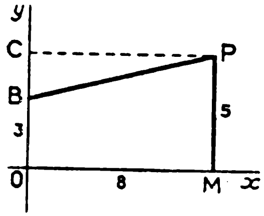
$$V_x=2\pi\iint_S y\,dx\,dy=2\pi M_x \qquad (1)$$

سرانجام با استفاده از روابط (D) داریم :

$$V_x=2\pi\bar{y}\times A \qquad (2)$$

A مساحت میدان S است. مشاهده میشود که طرف راست (۲) حاصل‌ضرب مساحت میدان مذکور در طول محیط دایره‌ای است که مرکز ثقل آن میپیماید. پس قضیه ثابت شده‌است. نتیجه را میتوان به صورت

$$V=2\pi\bar{y}\times A \qquad (3)$$



شکل ۲۲۱

نوشت . اگر دومقدار ازسه مقدار V و $\bar{y}$ و A معلوم باشند ، میتوان با استفاده از رابطهٔ (۳) مقدارسوم را بدست آورد .

مثال- مرکزثقل ذوزنقهٔ OMPB (شکل ۲۲۱) را با استفاده از قضیهٔ پاپوس پیدا کنید .

حل - $$\text{OMPB مساحت}=\frac{۱}{۲}(۳+۵)۸=۳۲$$

ذوزنقه را درحول محور Ox دوران میدهیم ، جسم حاصل یک مخروط ناقص دوار است. برای محاسبهٔ حجم آن در دستور (۱۲) ی شمارهٔ ۱ ، $a=۸$ ، $R=۵$ و $r=۳$ میگذاریم :

$$V_x=\frac{۸\pi}{۳}(۲۵+۹+۱۵)=\frac{۳۹۲}{۳}\pi$$

پس بنابر دستور (۳) $$\bar{y}=\frac{V_x}{۲\pi A}=\frac{۳۹۲}{۱۹۲}=۲٫۰٤$$

اکنون ذوزنقه را درحول محور Oy دوران میدهیم ، حجم جسم حاصل برابر تفاضل حجم استوانهٔ حاصل از دوران OCPM و حجم مخروط حاصل از دوران مثلث BCP است ، پس :

$$V_y=۳۲۰\pi-\frac{۱۲۸\pi}{۳}=\frac{۸۳۲}{۳}\pi$$

و بنابر قضیهٔ مذکور: $$\bar{x}=\frac{V_y}{۲\pi A}=\frac{۸۳۲}{۱۹۲}=٤\frac{۱}{۳}$$

مختصات مرکزثقل عبارتند از $(٤\frac{۱}{۳}\ ,\ ۲٫۰٤)$

تمرین

در هریک از مسائل ۱ تا ۲۵ مرکز ثقل سطح محدود بین خمهای مذکور را پیدا کنید :

۱) $y=x^{3}$ و $y=4x$ (سطح واقع در ربع اول) جواب : $\left(\frac{16}{15}\ ,\ \frac{64}{21}\right)$

۲) $y=6x-x^{2}$ و $y=x$ $\left(\frac{5}{2}\ ,\ 5\right)$

۳) $y=4x-x^{2}$ و $y=2x-3$ $\left(1\ ,\ \frac{3}{5}\right)$

٤) $x^{2}=4y$ و $x-2y+4=0$ $\left(1\ ,\ \frac{8}{5}\right)$

۵) $y=x^{2}$ و $2x-y+3=0$ $\left(1\ ,\ \frac{17}{5}\right)$

٦) $y=x^{2}-2x-3$ و $y=2x-3$ $\left(2\ ,\ -\frac{3}{5}\right)$

۷) $y^{2}=x$ و $x+y=2$ و $y=0$ (ربع اول) $\left(\frac{32}{35}\ ,\ \frac{5}{14}\right)$

۸) $y^{2}=x$ و $x+y=2$ و $x=0$ $\left(\frac{8}{25}\ ,\ \frac{11}{10}\right)$

۹) $y^{3}=x^{2}$ و $2y=x$ $\left(\frac{10}{3}\ ,\ \frac{40}{21}\right)$

۱۰) $4y=3x^{2}$ و $2y^{2}=9x$ $\left(\frac{9}{10}\ ,\ \frac{27}{20}\right)$

۱۱) $y^{2}=2x$ و $y=x-x^{2}$ $\left(\frac{14}{15}\ ,\ -\frac{11}{15}\right)$

۱۲) $y^{۲}=۸x$ و $x+y=۶$ جواب : $\left(\frac{۳۴}{۵} , -۴\right)$

۱۳) $y^{۲}=۴x$ و $y^{۲}=۵-x$ $\left(\frac{۱۱}{۵} , ۰\right)$

۱۴) $y=۶x-x^{۲}$ و $x+y=۶$ $\left(\frac{۷}{۲} , ۵\right)$

۱۵) $x=۴y-y^{۲}$ و $y=x$ $\left(\frac{۱۲}{۵} , \frac{۳}{۲}\right)$

۱۶) $y=۴x-x^{۲}$ و $y=۵-۲x$ $\left(۳ , \frac{۳}{۵}\right)$

۱۷) $y^{۲}=۴x$ و $۲x-y=۴$ $\left(\frac{۸}{۵} , ۱\right)$

۱۸) $y=x^{۲}-۲x-۳$ و $y=۶x-x^{۲}-۳$ $(۲ , ۱)$

۱۹) $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $x+y=۱$ $(۰٫۵۸۵ , ۰٫۵۸۵)$

۲۰) $x^{۲}+y^{۲}=۳۲$ و $y^{۲}=۴x$

۲۱) $y^{۲}=۴x$ و $۲x+y=۴$

۲۲) $x^{۲}+y^{۲}-۱۰x=۰$ و $x^{۲}=y$

۲۳) $x^{۲}=y$ و $۲y=۶x-x^{۲}$

۲۴) $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ (سطح واقع در ربع اول) $\left(\frac{۲۵۶a}{۳۱۵\pi} , \frac{۲۵۶a}{۳۱۵\pi}\right)$

۲۵) $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{۱}{۲}}$ و $x=۰$ و $y=۰$ $\left(\frac{a}{۵} , \frac{a}{۵}\right)$

۲۶) مرکز ثقل سطح زیر یک طاق‌نمای سیکلوئید $x=a(\theta-\sin\theta)$ ، $y=a(۱-\cos\theta)$ را پیدا کنید . جواب : $\left(\pi a , \frac{۵a}{۶}\right)$

۲۷) باستفاده از قضیهٔ پاپوس مرکز ثقل نیمدایره را پیدا کنید .

جواب : فاصله از قطر$=\frac{۴r}{۳\pi}$

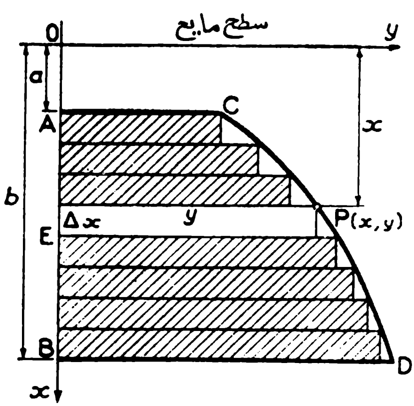
۲۸) با استفاده از قضیهٔ پاپوس مرکز ثقل آن قسمت از بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ را که در ربع اول قرار دارد ، پیدا کنید . جواب : $\left(\frac{۴a}{۳\pi}, \frac{۴b}{۳\pi}\right)$

۲۹) دایرهٔ $(x-b)^۲+y^۲=a^۲$ را در حول محور y هادوران دهید وبا استفاده از قضیهٔ پاپوس حجم چنبرهٔ حاصل را پیدا کنید ($b > a$ است) . جواب : $۲\pi^۲a^۲b$

۳۰) مستطیل ABCD را در حول امتداد Ax که در صفحهٔ مستطیل قرار دارد و بر AC عمود است دوران دهید و حجم جسم حاصل را حساب کنید .

۲۵۱- مرکز فشار مایع . ـ طرز محاسبهٔ فشار مایع به جدار قائم ظرف درشمارهٔ ۱۷۹ بیان شده است .

فشارهای وارد برمستطیلهای جزئی مرسوم درشکل ۲۲۲ یک دستگاه از نیروهای



شکل ۲۲۲

موازی (چون همه برصفحهٔ xOy عمودند) تشکیل میدهند . برآیند این دستگاه نیرو همان فشارکلی مایع است که بنابر دستور (D) ی شمارهٔ ۱۷۹ برابر

$$P=\overline{W}\int_a^b yx\,dx \qquad (1)$$

است. نقطهٔ اثر P را **مرکز فشار مایع** مینامند. ما اکنون عمق ($x_\circ$) این نقطه را پیدا میکنیم و بدین منظور از **اصل گشتاورهای نیرو** استفاده مینماییم :

مجموع گشتاورهای یک دستگاه نیروهای موازی نسبت به یک محور برابر است با گشتاور برآیند آنها نسبت به آن محور .

dP ، فشار وارد بر مستطیل جزئی EP بنابر شمارهٔ ۱۷۹ برابر است با

$$dP=\overline{W}xy\triangle x \qquad (2)$$

گشتاور این نیرو نسبت به محور Oy برابر حاصلضرب dP در بازوی اهرم آن OE($=x$) است ، پس با استفاده از (۲) :

$$(\text{گشتاور } dP)=x\,dP=\overline{W}x^2y\triangle x \qquad (3)$$

بنابراین گشتاور فشار وارد بر تمام سطح عبارتست از

$$\text{گشتاور کلی}=\int_a^b \overline{W}x^2y\,dx \qquad (4)$$

اما گشتاور برآیند فشار مایع برابر $x_\circ P$ است ، پس :

$$x_\circ P=\overline{W}\int_a^b x^2y\,dx \qquad (5)$$

بجای P مقدارآن را ازرابطهٔ (۱) میگذاریم و $x_\circ$ را پیدا میکنیم ، دستور **عمق مرکز فشار** بدست میاید :

$$x_\circ=\frac{\int_a^b x^2dA}{\int_a^b x\,dA} \qquad (6)$$

dA جزء مساحت یعنی $y\,dx$ است .

مخرج (۶) گشتاور سطح ABDC نسبت به Oy است (شمارهٔ ۱۷۷ را ببینید) .

انتگرال صورت(٦) را ، که تا کنون به آن برنخورده‌ایم ، **گشتاور ماند سطح** ABDC **نسبت به** Oy مینامند .

معمولاً گشتاور ماند نسبت به‌یک محور را با حرف I نشان میدهند ومحور را با یک اندیس مشخص میکنند . به این ترتیب دستور (٦) به صورت زیر در میاید :

$$x_c = \frac{I_y}{M_y} \qquad (۷)$$

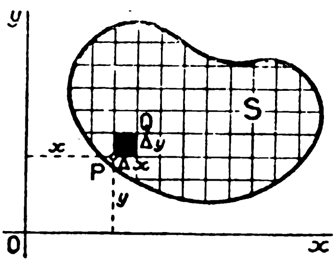
صورت معمولی گشتاور ماند نسبت به محور l عبارتست از

$$I_l = \int r^2 dA \qquad (۸)$$

$$r = \text{فاصلهٔ جزء } dA \text{ از محور } l \qquad (۹)$$

مسئلهٔ مذکور دراین شماره یکی از مسائل متعددی است که حل آن به گشتاور ماند منجر میشود . درشمارهٔ بعد طرز محاسبهٔ گشتاور ماند بوسیلهٔ انتگرال ساده یا دوگانه را بیان میکنیم و چند مثال میاوریم .

۲۵۲- گشتاور ماند یك سطح . - درمکانیک مطالعه و محاسبهٔ گشتاور ماند یک سطح نسبت به یک محور موضوعی اساسی است.



شکل ۲۲۳

اکنون به محاسبه گشتاور ماند میپردازیم و بدین منظور دستور مذکور در شمارهٔ ۲٤۸ را دنبال میکنیم .

گشتاور ماند مستطیل جزئی PQ در نقطهٔ P(x , y) نسبت به محور Ox بنابر تعریف برابر

$$y^2 \Delta x \Delta y \qquad (۱)$$

و نسبت به محور Oy برابر

$$x^2 \Delta x \Delta y \qquad (۲)$$

است. اگر گشتاورهای ماندتمام سطح را نسبت‌به محورها I_x و I_y بنامیم ، [بادستور(۸) شمارهٔ ۲۵۱ مقایسه کنید] داریم :

$$(E)\qquad I_x=\iint y^۲dx\,dy \quad , \quad I_y=\iint x^۲dx\,dy$$

شعاعهای ژیراسیون r_x و r_y نیز با دستورهای

$$(F)\qquad r_x{}^۲=\frac{I_x}{\text{مساحت}} \quad , \quad r_y{}^۲=\frac{I_y}{\text{مساحت}}$$

تعیین میشوند. در دستورهای (E) توابعی که باید انتگرال آنها در داخل سطح موردنظر حساب شود ، عبارتند از $f(x\,,y)=y^۲$ و $f(x\,,y)=x^۲$

دستورهای (E) برای سطح «زیر یک خم» ، یعنی برای سطحی که بین یک خم و محور x ها و دو خط موازی محور y ها محدود است ، به صورت سادهتری درمیایند :

$$I_x=\int_a^b\int_۰^y y^۲dy\,dx=\frac{۱}{۳}\int_a^b y^۳dx$$
$$(۲)$$
$$I_y=\int_a^b\int_۰^y x^۲dy\,dx=\int_a^b x^۲y\,dx$$

دراین معادلات y عرض یک نقطه از خم است و باید مقدار آن را از معادلهٔ خم برحسب x پیدا کرد و در توابع زیر علامت انتگرال گذاشت .

دستورهای گشتاور ماند را بطورکلی به صورت زیر مینویسند :

$$(G)\qquad I=Ar^۲$$

در این دستور A مساحت و r شعاع ژیراسیون است . این معادله از حل معادلات (F) نسبت به I_x و I_y بدست میاید .

اگر واحد طول یک سانتیمتر باشد ، گشتاور ماند از قوهٔ چهارم طول یعنی ضریبی از $cm^٤$ است . بنابر معادلات (F) ، r_x و r_y طولهایی برحسب سانتیمترند .

مثال ۱ - برای سطح مذکور در مثال ۱ شمارهٔ ۲٤٦ ، I_x و I_y و شعاعهای ژیراسیون را پیدا کنید (شکل ۲۱۳) .

حل - انتگرالهای (E) را با همان ترتیب و حدود انتگرال گیری مثال ۱ صفحهٔ ۸۲۸ حساب میکنیم ، داریم :

$$I_x=\int_{\cdot}^{1}\int_{y}^{y^{\frac{2}{3}}} y^2dx\,dy=\int_{\cdot}^{1}(y^{\frac{8}{3}}-y^3)dy=\frac{1}{44}$$

$$I_y=\int_{\cdot}^{1}\int_{y}^{y^{\frac{2}{3}}} x^2dx\,dy=\frac{1}{3}\int_{\cdot}^{1}(y^2-y^3)dy=\frac{1}{36}$$

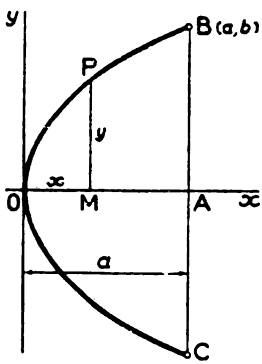
چون مساحت $A=\frac{1}{10}$ است ، بنابر (F) داریم :

جواب : $r_x=0{,}48$, $r_y=0{,}53$

مثال ۲ - I_x و I_y را برای سطح BOC که قطعه‌ای از سهمی

$$y^2=2px \tag{٤}$$

است ، پیدا کنید (شکل ۲۲٤) .



شکل ۲۲٤

حل - اگر مختصات نقطهٔ B را $(a\,,\,b)$ فرض کنیم ، $x=a$ ، $y=b$ و بنابر (٤) ، $b^2=2pa$ است . از معادلهٔ اخیر p را پیدا میکنیم و در (٤) میگذاریم ، داریم :

$$y^2=\frac{b^2x}{a} \implies y=\frac{bx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \tag{٥}$$

گشتاور ماند سطح زیر سهمی OPB در ربع اول نصف گشتاور خواسته شده است. پس بنابر دستورهای (۳) ، با درنظرگرفتن معادلات (٥) ، داریم :

$$\frac{1}{2}I_x=\frac{1}{3}\int_{\cdot}^{a}\frac{b^3}{a^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{15}ab^3 \implies I_x=\frac{4}{15}ab^3$$

$$\frac{۱}{۲} I_y = \int_۰^a x^۲ \frac{b}{a^{\frac{۱}{۲}}} x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{۲}{۷} a^۳ b \longrightarrow I_y = \frac{۴}{۷} a^۳ b$$

مساحت قطعه سهمی برابر است با

$$\frac{۱}{۲} A = \int_۰^a y\, dx = \int_۰^a \frac{b}{a^{\frac{۱}{۲}}} x^{\frac{۱}{۲}} dx = \frac{۲}{۳} ab \longrightarrow A = \frac{۴}{۳} ab$$

پس بنابر دستورهای (F) $\quad I_x = \frac{۱}{۵} Ab^۲ \quad$ و $\quad r_x^۲ = \frac{I_x}{A} = \frac{۱}{۵} b^۲$

$$I_y = \frac{۳}{۷} Aa^۲ \quad \text{و} \quad r_y^۲ = \frac{I_y}{A} = \frac{۳}{۷} a^۲$$

این نتایج به صورت (G) است .

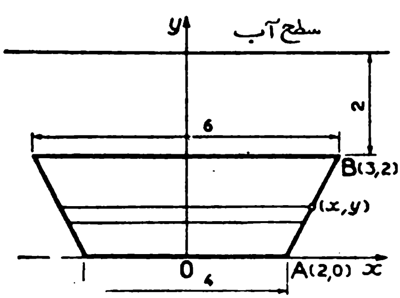
درشکل ۲۲۲ محور Oy برسطح مایع است. اگراین محور را در شکلهای مختلف بطورکلی s بنامیم ، عمق مرکز فشار بنابر دستور (۷) شمارهٔ ۲۵۱ برابر است با

$$x_۰ = \frac{I_s}{M_s} = \frac{r_s^۲}{h_s} \qquad (۶)$$

دراین دستور $\quad r_s =$ شعاع ژیراسیون در حول محورs

و $\quad h_s =$ عمق مرکز ثقل در زیر محورs

مثال ۳- عمق مرکز فشار وارد بریک دریچهٔ سد به مشخصات شکل ۲۲۵ را پیدا کنید . این مثال را با مثال ۲ ی شمارهٔ ۱۷۹ مقایسه نمایید.



شکل ۲۲۵

حل - محورهای Ox و Oy را همان طورکه درشکل رسم شده‌اند درنظر میگیریم وفاصلهٔ یک نوارجزئی افقی‌را از محور s که واقع برسطح آب است ، r فرض میکنیم . به این ترتیب :

$$r=\text{٤}-y \quad , \quad dA=\text{۲}x\,dy$$

بنابر دستور (۸) شمارهٔ ۲۵۱ و تعریف گشتاور سطح (شمارهٔ ۱۷۷) داریم :

$$I_s=\int r^{\text{۲}}dA=\int(\text{٤}-y)^{\text{۲}}\text{۲}x\,dy \tag{۷}$$

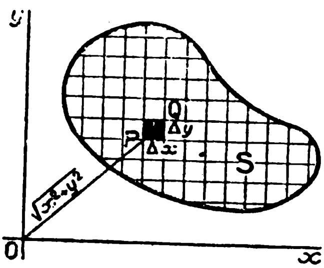
$$M_s=\int r\,dA=\int(\text{٤}-y)\text{۲}x\,dy \tag{۸}$$

معادلهٔ خط AB ، $y=\text{۲}x-\text{٤}$ است . مقدار x را از این معادله بدست میاوریم ، در تساویهای (۷)و(۸) میگذاریم و بین حدود $y=\text{۰}$ و $y=\text{۲}$ انتگرال میگیریم ، داریم :

$$I_s=\int_{\text{۰}}^{\text{۲}}(\text{٤}-y)^{\text{۲}}(\text{٤}+y)dy=\text{۸۹}\,\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$

$$M_s=\int_{\text{۰}}^{\text{۲}}(\text{۱٦}-y^{\text{۲}})dy=\text{۲۹}\,\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$

پس بنابر دستور(۷)شمارهٔ ۲۵۱ ، $x_o=\text{۳٫۰٤۵}$ است .



شکل ۲۲٦

۲۵۳ - گشتاور ماند قطبی- گشتاور ماند مستطیل جزئی PQ نسبت به مبدأ O برابر حاصل‌ضرب مساحت آن در $\overline{OP}^{\text{۲}}$ ، یعنی مساوی

$$(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}})\Delta x\Delta y \tag{۱}$$

است . پس بنابر شمارهٔ ۲٤۸ گشتاور ماند تمام سطح برابر

$$I_o=\iint(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}})dx\,dy \tag{۲}$$

است . طرف راست این تساوی را میتوان به صورت مجموع دو انتگرال نوشت :

$$I_o=\iint x^{\text{۲}}dx\,dy+\iint y^{\text{۲}}dx\,dy=I_x+I_y \tag{۳}$$

پس میتوان گفت که :

قضیه ـ گشتاور ماند یک سطح نسبت به مبدأ مختصات برابر مجموع گشتاورهای ماند آن سطح نسبت به محورهای Ox و Oy است .

تمرین

I_x و I_y و I_0 را برای سطوحی که در هریک از مسائل ۱ تا ۱۱ مشخص شده‌اند ، پیدا کنید .

۱) نیمدایره‌ای که در سمت راست محور y ها قرار دارد و معادلهٔ آن $x^2+y^2=r^2$ است . جواب : $I_x=I_y=\frac{Ar^2}{4}$

۲) مثلث متساوی‌الساقینی که ارتفاع آن h ، قاعدهٔ آن a و مختصات رئوس آن $(0,0)$ ، $(h, \frac{a}{2})$ و $(h, -\frac{a}{2})$ است .

جواب : $I_y=\frac{Ah^2}{2}$, $I_x=\frac{Aa^2}{24}$

۳) مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مختصات رئوس آن $(0, 0)$ ، (b, a) و $(b, 0)$ است . جواب : $I_y=\frac{Ab^2}{2}$, $I_x=\frac{Aa^2}{6}$

۴) بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ جواب : $I_y=\frac{Aa^2}{4}$, $I_x=\frac{Ab^2}{4}$

۵) سطح واقع در ربع اول و محدود بین $y^2=4x$ ، $x=4$ و $y=0$

جواب : $I_y=\frac{48A}{7}$, $I_x=\frac{16A}{5}$

۶) سطح بین بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ و دایرهٔ $x^2+y^2=2y$

جواب : $I_y=\frac{53A}{20}$, $I_x=\frac{19A}{20}$

۷) سطح بین بیضی‌های $\frac{x^{۲}}{۱۶}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$ و $x^{۲}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱$

جواب : $I_y=\frac{۱۹A}{۴}$, $I_x=\frac{۵A}{۲}$

۸) سطح بین دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ و $x^{۲}+(y+۲)^{۲}=۱$

جواب : $I_y=\frac{۱۷A}{۴}$, $I_x=\frac{۲۳۹A}{۶۰}$

۹) سطح بین دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}=۳۶$ و $x^{۲}+(y+۳)^{۲}=۴$

جواب : $I_x=\frac{۷۱A}{۸}$, $I_y=۱۰A$

۱۰) سطح بین دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۴$ و بیضی $\frac{x^{۲}}{۳۶}+\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$

جواب : $I_y=\frac{۵۳A}{۵}$, $I_x=\frac{۲۳A}{۵}$

۱۱) تمام سطح درون $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ جواب : $I_x=I_y=\frac{۷Aa^{۲}}{۶۴}$

۱۲) عمق مرکز فشار آب وارد بر دریچه‌ای را پیدا کنید که به شکل مثلث است و قاعدهٔ آن برسطح آب و رأس آن زیر قاعدهٔ آن قرار دارد .

۱۳) عمق مرکز فشار آب وارد بر دریچه‌ای را پیدا کنید که عبارتست از مستطیلی به پهنای ۸ دسیمتر و عمق ۴ دسیمتر . سطح آب ۵ دسیمتر بالای سر آن قرار دارد .

جواب : ۷٫۱۹ دسیمتر زیر سطح آب

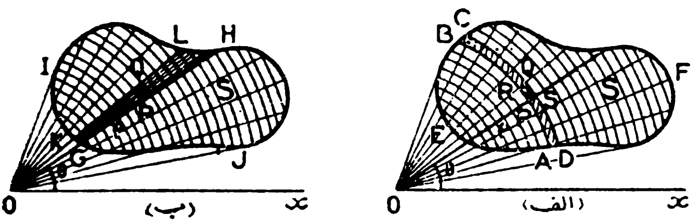
۱۴) مخزن نفتی به شکل استوانه و به قطر ۵ دسیمتر است . این مخزن افقی قرار دارد . عمق مرکز فشار وارد برانتهای آن را (الف) وقتی عمق نفت ۲٫۵ دسیمتر و (ب) وقتی عمق نفت ۴ دسیمتر است ، پیدا کنید .

جواب : (الف) دسیمتر $۱٫۴۷=\frac{۱۵\pi}{۳۲}$ ، (ب) تقریباً ۲٫۴ دسیمتر

۲۵۴- محاسبهٔ مساحت دردستگاه مختصات قطبی . ـ وقتی معادلهٔ خمهایی

که سطح مورد نظررا محدود میکنند ، به صورت قطبی داده شده باشند ، طرزمحاسبهٔ مساحت و دستور آن کمی تغییر میکنند . دراین حالت سطح را به ترتیب زیر به قسمتهای جزئی تقسیم میکنیم :

دایره‌های متحدالمرکزی به مرکز O رسم میکنیم. اختلاف شعاع دو دایرهٔ متوالی را $\Delta\rho$ میگیریم . بنابراین درشکل ۲۲۷ الف ، $OP=\rho$ و $OS=\rho+\Delta\rho$ است.



شکل ۲۲۷

سپس از نقطهٔ O شعاعهایی طوری رسم میکنیم که زاویهٔ بین هردوشعاع متوالی برابر $\Delta\theta$ باشد. پس درشکل الف ، $\widehat{POR}=\Delta\theta$ است . بدین ترتیب سطح مورد نظر به عده‌ای مستطیل منحنی‌الخط مانند PSQR تقسیم میشود .

ΔA ، مساحت مستطیل منحنی‌الخط PSQR ، برابرتفاضل مساحت‌قطاع POR و مساحت قطاع SOQ است ، پس :

$$\Delta A=\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta=\rho\Delta\rho\Delta\theta+\frac{1}{2}\Delta\rho^2\Delta\theta \qquad (1)$$

دراینجا تابع $f(x,y)$ شمارهٔ ۲۴۵ به صورت قطبی $F(\rho,\theta)$ است . اکنون مانند شمارهٔ ۲۴۵ عمل میکنیم . نقطه‌ای از سطح ΔA را انتخاب میتماییم و مختصات آن را (ρ,θ) مینامیم . سپس حاصل‌ضرب

$$F(\rho,\theta)\Delta A$$

را برای هریک از ΔA های میدان S تشکیل میدهیم ، این حاصل‌ضرب‌ها را باهم جمع میکنیم و سرانجام $\Delta\rho$ و $\Delta\theta$ را بسمت صفر میل میدهیم . درشمارهٔ ۲۵۸ نشان داده

شده است که حد این مجموع دوگانه را میتوان با انتگرال گیری متوالی پیدا کرد . پس مینویسیم [با تساوی (۱) شمارهٔ ۲۴۰ مقایسه کنید] :

$$\lim_{\substack{\Delta\rho \to 0 \\ \Delta\theta \to 0}} \sum\sum F(\rho, \theta)\Delta A = \iint_S F(\rho, \theta)\rho \, d\rho \, d\theta \qquad (۲)$$

و آن را **انتگرال دوگانهٔ تابع** $F(\rho, \theta)$ **در میدان** S مینامیم .

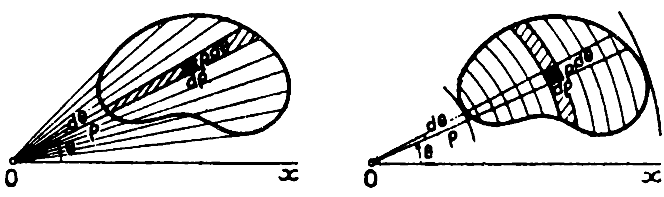
یادآور میشویم که در (۲) بجای ΔA مقدار آن را از تساوی (۱) یعنی $\rho \, d\rho \, d\theta$ گذاشته‌ایم .

ساده‌ترین حالت (۲) وقتی است که بخواهیم مساحت میدان S را پیدا کنیم. دراین صورت داریم :

$$A = \iint \rho \, d\rho \, d\theta = \iint \rho \, d\theta \, d\rho \qquad (H)$$

این دستور را میتوان بآسانی بدین ترتیب بخاطر سپرد که طول و عرض مستطیلهای جزء سطح $\rho \, d\theta$ و $d\rho$ و لذا مساحت هریک از آنها $\rho \, d\theta \, d\rho$ است .

شکلهای ۲۲۸ اختلاف روشهای محاسبهٔ دوانتگرال (H) را بطور کلی نشان میدهند.



شکل ۲۲۸

در انتگرال سمت چپ ، نخست θ را ثابت فرض میکنیم و نسبت به ρ انتگرال میگیریم ، زیرا $d\rho$ قبل از $d\theta$ است. بدین منظور نوار شعاعی شکل ۲۲۷ ب را درنظر میگیریم حدود ρ برابر OG و OH است . این مقادیر ρ از حل معادلهٔ خمی (یا معادلات خمهایی) که میدان S را محدود میکند ، برحسب θ بدست میایند . پس از محاسبهٔ این انتگرال ، نسبت به θ انتگرال میگیریم . حدود θ برابر $\theta = \widehat{JOx}$ و $\theta = \widehat{IOx}$ است .

درانتگرال سمت راست (H) ، نخست ρ را ثابت فرض میکنیم و نسبت به θ انتگرال میگیریم. بدین منظور نوار مستدیر ABCD شکل ۲۲۷ الف راکه بین دو دایرهٔ متوالی قرار دارد درنظر میگیریم. پس‌از محاسبهٔ این انتگرال ، ρ را متغیر فرض میکنیم و انتگرال میگیریم .

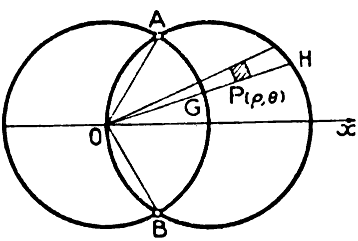
وقتی‌سطح مورد نظر بین یک خم ودو شعاع حامل قرار دارد (یعنی میدان باحرکت یک شعاع حامل جاروب میشود) ، بنابر دستور (H) داریم :

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\rho}\rho\, d\rho\, d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}d\theta$$

این دستور همان دستور (D) ی شمارهٔ ۱۵۹ است .

پس در دستگاه مختصات قطبی انتگرال دوگانه به یکی از دو صورت زیر است :

$$\iint F(\rho,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \quad \text{یا} \quad \iint F(\rho,\theta)\rho\, d\theta\, d\rho \qquad (۳)$$



شکل ۲۲۹

مثال ۱- حدود انتگرال دوگانه‌ای را پیدا کنید که مساحت میدان واقع در درون دایرهٔ $\rho=2r\cos\theta$ و بیرون‌دایرهٔ $\rho=r$ را میدهد.

حل - مختصات نقاط تقاطع این دو دایره $A(r,\frac{\pi}{3})$ و $B(r,-\frac{\pi}{3})$ است. انتگرال سمت چپ (۳) را بکار میبریم. حدود ρ

$$\rho=OG=r \quad , \quad \rho=OH=2r\cos\theta$$

و حدود θ ، $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ است .

مثال ۲- مساحت میدان واقع در درون دایرهٔ $\rho=2r\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=r$ را پیدا کنید .

حل - با بکار بردن حدودی که در مثال ۱ بدست آورده‌ایم ، داریم :

$$A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r}^{2r\cos\theta}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(4r^2\cos^2\theta-r^2)d\theta$$

جواب : $$=r^2\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=1{,}91r^2$$

۲۵۵- گشتاور سطح و گشتاور ماند در دستگاه مختصات قطبی . - باسانی میتوان دستورهای زیر را بدست آورد :

$$M_x=\iint\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta \tag{1}$$

$$M_y=\iint\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta \tag{2}$$

$$I_x=\iint\rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta \tag{3}$$

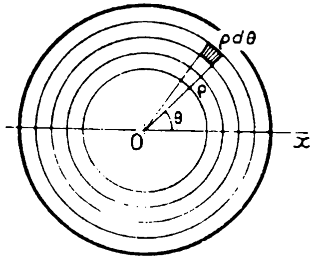
$$I_y=\iint\rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta \tag{4}$$

$$I_0=\iint\rho^3d\rho\,d\theta \tag{5}$$

اگر بخواهیم نخست نسبت به θ انتگرال بگیریم ، تنها کافی است جای دیفرانسیلها را عوض کنیم .

مثال ۱- به مناسبت اهمیت موارد استعمال این دستورها اکنون به محاسبهٔ گشتاورهای ماند یک دایره میپردازیم .

شعاع دایره را a فرض میکنیم . بنابر دستور (۵) ، گشتاور ماند قطبی دایره نسبت به مرکز آن برابر



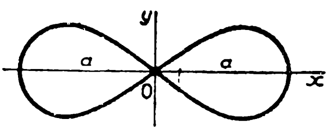
شکل ۲۳۰

$$I_0=\int_0^a\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\rho^3 d\rho=\frac{\pi a^4}{2}=\frac{A}{2}a^2 \qquad (6)$$

است (دراین دستور : مساحت دایره$=\pi a^2$ ($A=\pi a^2$) .
چون دایره نسبت به مبدأ و محورهای مختصات قرینه است ، $I_x=I_y$ است و بنابر معادلهٔ (۳) ی شمارهٔ ۲۵۳ داریم :

$$I_x=\frac{1}{2}I_0=\frac{A}{4}a^2 \qquad (7)$$

به عبارت دیگر : **گشتاور ماند قطبی یك دایره نسبت به مرکز آن برابر حاصل‌ضرب نصف مساحت در مجذور شعاع ، وگشتاور ماند قطبی نسبت به هرقطر برابر حاصل‌ضرب ربع مساحت در مجذور شعاع است .**



شکل ۲۳۱

مثال ۲- مرکزثقل یک حلقه‌ازلمنیسکات

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta$$

را پیدا کنید .

حل - چون Ox محور تقارن است ، $\bar{y}=0$ است .

$$\frac{1}{2}A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta=\frac{a^2}{4}$$

$$\frac{1}{2}M_y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\theta$$

$$=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\, d\theta$$

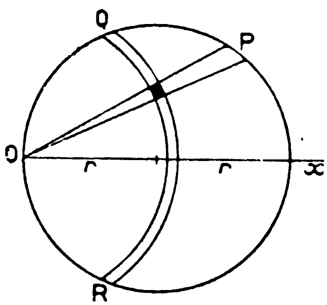
$$=\frac{۱}{۳}a^{۳}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}}(۱-۲sin^{۲}\theta)^{\frac{۳}{۲}}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{٦}a^{۳}\int_{\cdot}^{۱}(۱-z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}dz\left(\text{اگر } \sin\theta=\frac{۱}{۲}z\sqrt{۲}\right)=\frac{\pi}{۳۲}a^{۳}\sqrt{۲}$$

بنابراین $\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\pi}{۸}a\sqrt{۲}=۰٫۵۵\,a$: جواب

مثال ۳- I_o را برای میدان درون دایرهٔ $\rho=۲r\cos\theta$ پیدا کنید.

حل - نخست اجزای داخل نوار مثلثی شکل OP را باهم جمع میکنیم، حدود ρ صفر و $۲r\cos\theta$ است (مقدار اخیر از معادلهٔ دایره گرفته شده است). سپس این نوارها را باهم جمع میکنیم، حدود θ، $-\frac{\pi}{۲}$ و $+\frac{\pi}{۲}$ است. پس بنابر دستور (٥) :



شکل ۲۳۲

$$I_o=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\cdot}^{۲r\cos\theta}\rho^{۳}d\rho\, d\theta=\frac{۳\pi r^{٤}}{۲}$$: جواب

اگرنخست اجزای داخل یک نوار مستدیر (مانند QR) را باهم جمع کنیم، داریم:

$$I_o=\int_{\cdot}^{۲r}\int_{-\arccos\frac{\rho}{۲r}}^{\arccos\frac{\rho}{۲r}}\rho^{۳}d\theta\, d\rho=\frac{۳\pi r^{٤}}{۲}$$: جواب

تمرین

۱) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=\frac{۳}{۲}$ و طرف‌راست خط $۴\rho\cos\theta=۳$ قرار دارد، حساب کنید. جواب: $\frac{۳}{۱۶}(۴\pi-۳\sqrt{۳})$

۲) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=۳\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=\frac{۳}{۲}$ است، پیدا کنید. جواب: $\frac{۳}{۸}(۲\pi+۳\sqrt{۳})$

۳) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=۳\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=\cos\theta$ است، پیدا کنید. جواب: ۲π

۴) مساحت سطحی را که درون کاردیوئید $\rho=۱+\cos\theta$ و طرف راست خط $۴\rho\cos\theta=۳$ است، پیدا کنید. جواب: $\frac{\pi}{۲}+\frac{۹\sqrt{۳}}{۱۶}$

۵) مساحت‌سطحی‌را که درون کاردیوئید $\rho=۱+\cos\theta$ وبیرون دایرهٔ $\rho=۱$ است، پیدا کنید. جواب: $\frac{\pi}{۴}+۲$

۶) مساحت‌سطحی‌را که درون دایرهٔ $\rho=۱$ و بیرون کاردیوئید $\rho=۱+\cos\theta$ است، پیدا کنید. جواب: $۲-\frac{\pi}{۴}$

۷) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=۳\cos\theta$ و بیرون کاردیوئید $\rho=۱+\cos\theta$ است، پیدا کنید. جواب: π

۸) مساحت‌سطحی را که درون‌دایرهٔ $\rho=۱$ وبیرون سهمی $\rho(۱+\cos\theta)=۱$ است، پیدا کنید. جواب: $\frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{۳}$

۹) مساحت سطحی را که درون کاردیوئید $\rho=۱+cos\,\theta$ و بیرون سهمی $\rho(۱+cos\,\theta)=۱$ است ، پیدا کنید . جواب : $\frac{۴}{۳}+\frac{۳\pi}{۴}$

۱۰) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=cos\,\theta+sin\,\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=۱$ است ، پیدا کنید . جواب : $\frac{۱}{۲}$

۱۱) مساحت سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=sin\,\theta$ و بیرون کاردیوئید $\rho=۱-cos\,\theta$ است ، پیدا کنید . جواب : $۱-\frac{\pi}{۴}$

۱۲) مساحت سطحی را که درون لمنیسکات $\rho^۲=۲a^۲cos\,۲\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=a$ است ، پیدا کنید . $۰٫۶۸۴a^۲$

۱۳) مساحت سطحی را که درون کاردیوئید $\rho=۴(۱+cos\,\theta)$ و بیرون سهمی $\rho(۱-cos\,\theta)=۳$ است ، پیدا کنید . جواب : $۵٫۵۰۴$

۱۴) سطحی را که درون دایرهٔ $\rho=۲a\,cos\,\theta$ و بیرون دایرهٔ $\rho=a$ است ، درنظر بگیرید ، مساحت ، مرکز ثقل ، I_x و I_y آن را پیدا کنید .

جواب : $\bar{x}=\frac{(۸\pi+۳\sqrt{۳})a}{۲(۲\pi+۳\sqrt{۳})}$, $A=\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)a^۲$

$$I_x=\left(\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۶}\right)a^۴ \quad , \quad I_y=\left(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۱۶}\right)a^۴$$

۱۵) مرکز ثقل سطح محدود بین کاردیوئید $\rho=a(۱+cos\,\theta)$ را پیدا کنید .

جواب : $\bar{x}=\frac{۵a}{۶}$

۱۶) مرکز ثقل سطح محدود بین یک حلقه از خم $\rho=a\,cos\,۲\theta$ را پیدا کنید .

جواب : $\bar{x}=\frac{۱۲۸\sqrt{۲}\,a}{۱۰۵\pi}$

۱۷) مرکز ثقل سطح محدود بین یک حلقه ازخم $\rho = a \cos ۳\theta$ را پیدا کنید.

جواب : $\bar{x} = \frac{۸۱\sqrt{۳}\,a}{۸۰\pi}$

۱۸) I_y لمنیسکات $\rho^۲ = a^۲ \cos ۲\theta$ را حساب کنید.

جواب : $\frac{A}{۴۸}(۳\pi + ۸)a^۲$

۱۹) I_x کاردیوئید $\rho = a(۱ + \cos \theta)$ را حساب کنید.

۲۰) I_x و I_y یک حلقه از خم $\rho = a \cos ۲\theta$ را حساب کنید.

۲۱) با استفاده از معادلهٔ (۱) شمارهٔ ۲۵۴ نشان دهید که

$$\lim_{\substack{\Delta\rho \to ۰ \\ \Delta\theta \to ۰}} \frac{\Delta A}{\rho \Delta\rho \Delta\theta} = ۱$$

است . بنابراین « تفاضل ΔA و $\rho \Delta\rho \Delta\theta$ بینهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است » (شمارهٔ ۹۹) ودرطرف چپ تساوی (۲) ی شمارهٔ ۲۵۴ میتوان بجای ΔA ، $\rho \Delta\rho \Delta\theta$ گذاشت .

۲۵۶ - روش کلی محاسبهٔ مساحت رویه‌های غیرمسطح . - روش مذکوردرشمارهٔ ۱۶۴ تنها مساحت یک رویهٔ دوار را بدست میدهد. اکنون به‌ذکرروش کلی‌تری میپردازیم. فرض میکنیم

$$z = f(x, y) \qquad (۱)$$

معادلهٔ رویهٔ KL شکل ۲۲۳ است و میخواهیم مساحت میدان S' را که روی این رویه است ، حساب کنیم .

تصویر قائم میدان S' را ، روی صفحهٔ xOy ، S مینامیم . اکنون صفحات متساوی‌الفاصله‌ای موازی دو صفحهٔ yOz و xOz میگذرانیم و فواصل آنها را بترتیب Δx و Δy مینامیم . چنانکه درشمارهٔ ۲۴۴ ذکر شده است ، این صفحات منشورهایی (مانند PB) تشکیل میدهند که ازبالا به‌قسمتی از رویهٔ داده شده (مانند PQ) محدودند. تصویراین قسمتها بر صفحهٔ xOy مستطیلهایی(مانند MN)به مساحت $\Delta x \Delta y$ است.

این مستطیلها قاعده‌های تحتانی منشورها را تشکیل میدهند. مختصات P را (x, y, z) مینامیم.

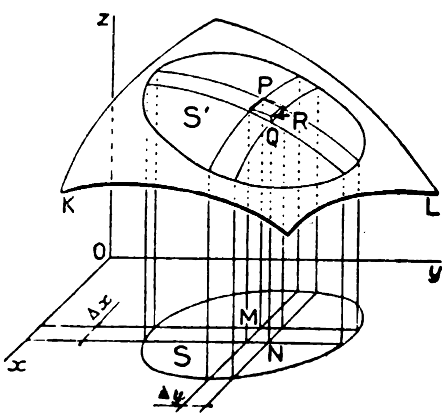
اکنون صفحهٔ مماس به رویهٔ KL در نقطهٔ P را درنظر میگیریم. روشن است که تصویر آن قسمتی از صفحهٔ مماس که درون منشور قرار دارد (PR)، برصفحهٔ xOy، همان مستطیل MN است. زاویهٔ بین صفحهٔ مماس و صفحهٔ xOy را γ مینامیم، دراین صورت:

$$(\text{مساحت } MN) = (\text{مساحت } PR) \cdot \cos\gamma$$

یا

$$\Delta y \Delta x = (\text{مساحت } PR) \cdot \cos\gamma$$

زیرا مساحت تصویر قسمتی از یک صفحه برصفحهٔ دیگر برابر حاصل‌ضرب مساحت قسمت تصویر شده درکسینوس زاویهٔ بین دو صفحه است.



شکل ۲۲۳

اما γ برابرزاویهٔ بین محور Oz وخطی است که از O برصفحهٔ مماس عمود شود. بنابراین با توجه به دستور (H) شمارهٔ ۲۳۷ و مطالب مذکور در (۲) و (۳) ی شمارهٔ ٤ داریم:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

پس $\quad \left[۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲} \right]^{\frac{۱}{۲}} \Delta y \Delta x$ = (مساحت PR)

این مقدار را جزء مساحت میدان S' فرض مینماییم و لذا مساحت میدان S' را با مجموع زیر تعریف میکنیم :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to ۰ \\ \Delta y \to ۰}} \sum\sum \left[۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲} \right]^{\frac{۱}{۲}} \Delta y \Delta x$$

حدود آن به همان ترتیب که درشمارهٔ ٥٤٠ بیان شده است ، از روی میدان S تعیین میشوند . اگر مساحت میدان S' را A بنامیم ، داریم :

$$A=\iint_S \left[۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲} \right]^{\frac{۱}{۲}} dy\, dx \qquad \text{(I)}$$

برای تعیین حدود انتگرال گیری باید میدانی را که مساحت آن مطلوب ماست، برصفحهٔ xOy تصویر نماییم . بدین ترتیب برای (I) حدود خم یا خمهایی را میگیریم که میدان S را در صفحهٔ xOy محدود میکنند ، یعنی درست همان کاری را میکنیم که درشمارههای اخیر کردهایم .

قبل از انتگرال گیری باید کاری کنیم که عبارت

$$۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}$$

تابعی تنها از x و y باشد . برای این کار از معادلهٔ رویهای استفاده میکنیم که شامل میدان مورد نظر است .

اگر تصویرکردن میدان مورد نظر برصفحهٔ xOz مناسبتر باشد ، دستور

$$A=\iint_S \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\,dx \qquad (J)$$

را بکار میبندیم . دراین دستور ، حدود انتگرال گیری از روی خم محدودکنندهٔ میدان S ، که اکنون تصویر میدان مورد نظر برصفحهٔ xOz است ، تعیین میشوند .

به همین ترتیب اگر دستور

$$A=\iint_S \left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\,dy \qquad (K)$$

رابکاربریم ، حدود انتگرالهااز رویتصویر میدان مورد نظربرصفحهٔ yOz تعیین میگردند.

دربعضی از مسائل مساحت قسمتی از یک رویه که با رویهٔ دومی قطع شده است ، خواسته میشود. دراین حالات باید مشتقات جزئی معادلهٔ رویه‌ای را در دستورقرار داد که مساحت قسمتی‌از آن خواسته شده است ، وچون حدود انتگرال گیری با تصویر کردن میدان مورد نظر بریکی از صفحات مختصات تعیین میشوند ، باید بخاطر داشت که

برای پیداکردن تصویر میدان مورد نظر برصفحهٔ xOy باید z را بین معادلات رویه‌هایی که فصل مشترکشان خم محدودکنندهٔ میدان است ، حذف کرد .

به همین ترتیب برای‌پیداکردن تصویر برصفحهٔ xOz باید y را حذف کرد وبرای پیداکردن تصویر برصفحهٔ yOz باید x را حذف نمود .

مطالب مذکوردربارهٔ مساحت یک‌رویهٔ غیرمسطح توصیف‌دیگری برای**انتگرال گیری یك تابع در داخل یك میدان** بدست میدهد زیرا در (I) انتگرال تابع

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

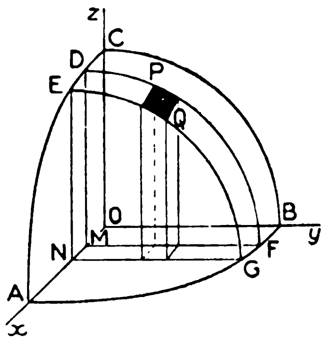
درداخل تصویر پاره رویهٔ غیر مسطحی برصفحهٔ xOy حساب میشود .

چنانکه در بالا گفته شد ، انتگرالهای (J) و (K) را باید با استفاده از معادلهٔ سطحی که پاره رویهٔ غیر مسطح برآن قرار دارد ، به صورتهای زیر درآورد :

$$\iint f(x, z)dz\,dx$$

و

$$\iint f(y, z)dy\,dz$$



شکل ۲۳٤

مثال ۱ - مساحت کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$ را بوسیلهٔ انتگرال دوگانه حساب کنید .

حل - در شکل ۲۳٤ سطح ABC یک هشتم سطح کره است و نیز داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

$$۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲=۱+\frac{x^۲}{z^۲}+\frac{y^۲}{z^۲}$$

$$=\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{z^۲}=\frac{r^۲}{r^۲-x^۲-y^۲}$$

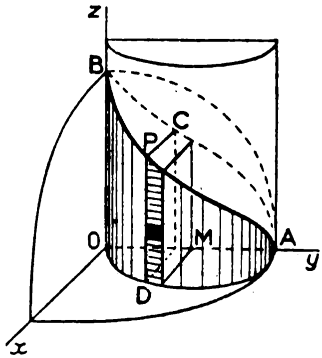
تصویر میدان مورد نظر برصفحهٔ xOy ربع دایرهٔ AOB است که بین $x=۰$ (یعنی OB) و $y=۰$ (یعنی OA) و $x^۲+y^۲=r^۲$ (یعنی BA) محدود است .

نخست نسبت به y انتگرال میگیریم ، یعنی تمام اجزای یک نوار مانند DEGF را که تصویر آن برصفحهٔ xOy نواری مانند MNGF است ، باهم جمع میکنیم . بدین ترتیب حدود y صفر و MF (یعنی $\sqrt{r^۲-x^۲}$) است . سپس نسبت به x انتگرال میگیریم یعنی تمام نوارهایی راکه سطح ABC را تشکیل میدهند باهم جمع میکنیم،لذا حدود x صفر و OA (یعنی r) است. این مقادیر را در (I) میگذاریم،داریم:

$$\frac{A}{۸}=\int_۰^r\int_۰^{\sqrt{r^۲-x^۲}}\frac{r\,dy\,dx}{\sqrt{r^۲-x^۲-y^۲}}=\frac{\pi r^۲}{۲}$$

پس مساحت کره برابر است با $A=٤\pi r^۲$

مثال ۲- مرکز کره‌ای به‌شعاع r برسطح استوانهٔ‌دواری به‌شعاع قاعدهٔ $\frac{r}{۲}$ قرار دارد . مساحت آن قسمتی‌ازسطح استوانه راکه درون کره واقع است ، حساب کنید .



شکل ۲۳۵

حل - مرکزکره را مبدأ مختصات، یال‌مار برمرکزکره را محورz هاوقطرآن مقطع‌قائم‌استوانه راکه از مرکزکره میگذرد محور y ها میگیریم . دراین صورت معادلهٔ کره $x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$ ومعادلهٔ‌استوانه $x^۲+y^۲=ry$ میشود . بروشنی ODAPB یک‌چهارم‌پاره سطح مورد نظراست . چون تصویر این سطح برصفحهٔ xOy نیمدایرهٔ ODA است ، درصفحهٔ xOy میدانی بدست نمیاید تا بتوان از روی آن حدود انتگرال را تعیین کرد . بنابراین پاره سطحمان را برصفحهٔ yOz تصویر میکنیم ، میدان S یعنی OACB بدست میاید . این میدان‌که باید انتگرال‌را درون‌آن‌حساب‌کنیم ، بین خطوط $z=۰$ (یعنی OA) و $y=۰$ (یعنی‌OB) و $z^۲+ry=r^۲$ (یعنی خم ACB) محدود است . معادلهٔ اخیر از حذف x بین معادلات دو رویه بدست آمده است . نخست نسبت به z انتگرال میگیریم ، یعنی تمام اجزای یک نوارقائم مانند PD را بایکدیگر جمع میکنیم . بدین ترتیب حدود z صفر و $\sqrt{r^۲-ry}$ است . سپس نسبت به y انتگرال میگیریم ، یعنی تمام نوارهای مانند PD را بیکدیگر میفزاییم ، لذا حدود y صفر و r است .

چون پاره سطح مورد نظر براستوانه واقع است ، مشتقهای جزئی لازم برای دستور (J) را باید از معادلهٔ استوانه بگیریم . پس

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{r-۲y}{۲x} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial z}=۰$$

این مقادیر را در (J) میگذاریم ، داریم :

$$\frac{A}{\text{٤}}=\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\sqrt{r^{2}-ry}}\left[1+\left(\frac{r-2y}{2x}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}dz\,dy$$

مقدار x را از معادلهٔ استوانه برحسب y پیدا میکنیم و در انتگرال اخیر میگذاریم :

$$A=2r\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\sqrt{r^{2}-ry}}\frac{dz\,dy}{\sqrt{ry-y^{2}}}=2r\int_{\circ}^{r}\frac{\sqrt{r^{2}-ry}}{\sqrt{ry-y^{2}}}dy$$

$$=2r\int_{\circ}^{r}\sqrt{\frac{r}{y}}\,dy=4r^{2}$$

تمرین

۱) در مثال اخیر مساحت آن قسمت از سطح کره را که درون استوانه قرار دارد ، حساب کنید . جواب : $4r\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\sqrt{ry-y^{2}}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{r^{2}-y^{2}-x^{2}}}=2(\pi-2)r^{2}$

۲) محورهای دو استوانهٔ دوار که شعاع قاعدهٔ آنها r است ، بیکدیگر عمودند . مساحت‌آن قست از سطح یکی‌ازاستوانه‌ها را که درون دیگری قرار دارد ، حساب کنید.

راهنمایی : محورهای مختصات را طوری اختیارکنید که معادلات استوانه‌ها $x^{2}+z^{2}=r^{2}$ و $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ شود .

جواب : $8r\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\sqrt{r^{2}-x^{2}}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{r^{2}-x^{2}}}=8r^{2}$

۳) مساحت آن قسمت از سطح کرهٔ $x^{2}+y^{2}+z^{2}=2ay$ را که درون یکی‌از دامنهای مخروط $x^{2}+z^{2}=y^{2}$ قرار دارد ، حساب‌کنید . جواب : $2\pi a^{2}$

٤) مساحت آن قسمت از سطح استوانهٔ $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ را که بین صفحات $z=mx$ و xOy واقع است ، حساب‌کنید . جواب : $4mr^{2}$

۵) مساحت آن قسمت از صفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ را که بین صفحات مختصات قرار دارد، حساب کنید. جواب : $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

٦) مساحت آن قسمت از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2ay$ را که درون پارابلوئید $by=x^2+z^2$ واقع است، حساب کنید. جواب : $2\pi ab$

۷) در تمرین قبل مساحت آن قسمت از پارابلوئید را که درون کره قرار دارد، حساب کنید.

۸) مساحت آن قسمت ازپارابلوئید $y^2+z^2=4ax$ را که بین استوانهٔ $y^2=ax$ و صفحهٔ $x=3a$ واقع است، حساب کنید. جواب : $\frac{56}{9}\pi a^2$

۹) در تمرین قبل مساحت آن قسمت از استوانه را که بین پارابلوئید و صفحهٔ مذکور قرار دارد، حساب کنید. جواب : $(13\sqrt{13}-1)\frac{a^2}{\sqrt{3}}$

۱۰) مساحت آن قسمت از استوانهٔ $z^2+(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=r^2$ را که در قسمت مثبت محورهای مختصات قرار دارد، حساب کنید.

راهنمایی : استوانهٔ مذکور دوار، معادلات محور آن $z=0$ و $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$ و شعاع قاعدهٔ آن r است. جواب : $\frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$

۱۱) مساحت آن قسمت ازسطح استوانهٔ $y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را که تصویر قائم خم محدود کنندهٔ آن برصفحهٔ xOy، $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ است، پیدا کنید.

جواب : $\frac{12}{5}a^2$

۱۲) مساحت‌آن قسمت از سطح کرهٔ $x^2+y^2+z^2=100$ را که بین دو صفحهٔ موازی $x=-8$ و $x=6$ قرار دارد، بوسیلهٔ انتگرال دوگانه حساب کنید.

۲۵۷- محاسبهٔ حجم بوسیلهٔ انتگرال سه‌گانه . - در بسیاری از حالات میتوان حجم جسمی‌را که بین چند رویهٔ معین محدود است، بوسیلهٔ سه انتگرال گیری متوالی حساب

کرد . روش محاسبه تعمیم همان روشهایی است که در شماره‌های پیشین ذکر شده‌اند (شمارهٔ ۲٤۷ را نیز ببینید) .

فرض میکنیم که جسم مورد نظر (میدان R) با صفحات موازی صفحات مختصات به مکعب مستطیل هایی به‌ابعاد Δx ، Δy ، Δz تقسیم‌شده است. حجم هریک ازاین مکعب مستطیل ها

$$\Delta z \cdot \Delta y \cdot \Delta x$$

است . ما آن را به عنوان جزء حجم اختیار میکنیم .

اکنون‌تمام‌اجزای میدان R را با هم جمع میکنیم. بدین منظور نخست اجزای‌داخل یک ستون را که موازی یکی از محورهای مختصات است بیکدیگر میفزاییم ، سپس تمام ستونهایی را که در یک ورقهٔ موازی یکی از صفحات مختصات قرار دارند باهم جمع میکنیم وسرانجام تمام ورقه های درون میدان مورد نظر را بیکدیگر میفزاییم. به این ترتیب V ، حجم جسم ، برابر حد مجموع سه گانهٔ مذکور به ازای $\Delta x \to 0$ ، $\Delta y \to 0$ ، $\Delta z \to 0$ است ، یعنی :

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum\sum_{R} \Delta z \Delta y \Delta x \qquad (۱)$$

این مجموع راکه باید شامل تمام اجزای میدان R باشد ، به صورت

$$V = \iiint_R dz\, dy\, dx \qquad (L)$$

مینویسیم. به عنوان‌تعمیم اصل مذکور درشمارهٔ ۲٤٥ میگوییم(L) **انتگرال سه‌گانهٔ تابع** $f(x, y, z) = 1$ **درمیدان R است.** دربسیاری ازمسائل تابع $f(x, y, z)$ مقدارثابتی نیست بلکه به دنبال x و y و z تغییر میکند . دراین صورت انتگرال سه گانهٔ

$$\iiint_R f(x, y, z)dz\, dy\, dx \qquad (۲)$$

حد یک مجموع سه گانه نظیر مجموع دوگانه‌ای است که قبلاً مطالعه کرده‌ایم . درآنالیز ریاضی نشان میدهند که میتوان انتگرال سه گانهٔ (۲) را با انتگرال گیری متوالی محاسبه کرد . حدود انتگرالها همان است که برای (L) بیان شد .

به عنوان مثالهای ساده‌ای از (۲) میتوان دستورهای مختصات مرکز ثقل یک جسم همگن را ذکر کرد ، یعنی

$$V\bar{x}=\iiint x\,dx\,dy\,dz\ ,\quad V\bar{y}=\iiint y\,dx\,dy\,dz\ , \qquad (۲')$$

$$V\bar{z}=\iiint z\,dx\,dy\,dz$$

این دستورها با استدلالی شبیه به استدلال شمارهٔ ۲۴۹ و با استفاده ازگشتاور حجم بدست میایند. در توابع زیر علامت انتگرال ، (x , y , z) مختصات یک نقطه از میدان R است. یادآور میشویم که اگر جسم همگنی دارای یک صفحهٔ تقارن باشد ، مرکز ثقل جسم برآن صفحه قرار دارد .

مثال ۱- حجم آن قسمت از بیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ راکه در «هشت یک» اول قرار دارد ، حساب کنید (شکل ۲۳۶) .

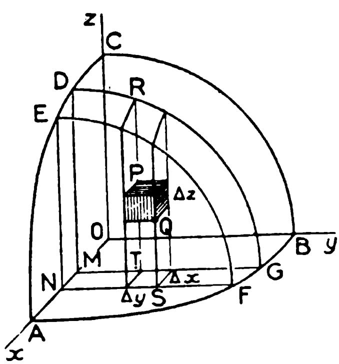
حل - معادلات سطوح محدودکنندهٔ حجم مورد نظر (یعنی O-ABC) عبارتنداز :

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱\,(=ABC) \qquad (۳)$$

$$z=\cdot\,(=OAB) \qquad (٤)$$

$$y=\cdot\,(=OAC) \qquad (٥)$$

$$x=\cdot\,(=OBC) \qquad (٦)$$



شکل ۲۳۶

این حجم را با صفحات موازی صفحات مختصات به مکعب مستطیل هایی به ابعاد Δz ، Δy ، Δx تقسیم میکنیم و یکی از آنها ، مثلاً PQ ، را درنظر میگیریم .
نخست نسبت به z انتگرال میگیریم ، یعنی مکعب مستطیل های درون یک ستون

(مانند RS) را باهم جمع میکنیم . بدین ترتیب حدود z صفر و

$TR=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ است . مقدار اخیر از حل معادلهٔ (۳) نسبت به z

بدست آمده است .

سپس نسبت به y انتگرال میگیریم ، یعنی ستونهای درون یک ورقه (مانند DEMNGF) را بیکدیگر میفزاییم . بدین ترتیب حدود y صفر و

$MG=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ است . صفر از معادلهٔ (٥) و مقدار MG از حل معادلهٔ خم AGB ، یعنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، نسبت به y بدست آمده است .

سرانجام نسبت به x انتگرال میگیریم ، یعنی تمام ورقه های درون میدان O-ABC را باهم جمع میکنیم. بدین ترتیب حدود x صفر [از معادلهٔ (٦)] و OA=a است .

پس

$$V=\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\,dy\,dx$$

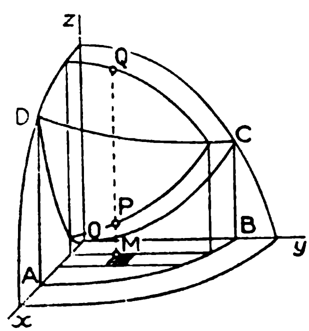
$$=\frac{\pi cb}{4a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi abc}{6}$$

بنابراین حجم یک «بیضوی کامل به نیم قطرهای a ، b ، c» برابر $\frac{4}{3}\pi abc$ است.

مثال ۲- حجم محدود به رویه های زیررا پیدا کنید :

$$z=4-x^2-\frac{1}{4}y^2 \qquad (۷)$$

$$z=3x^2+\frac{1}{4}y^2 \qquad (۸)$$



شکل ۲۳۷

حل - هریک از دو رویهٔ (۷) و (۸) یک پارابلوئید الیپتیک است (شکل ۲۳۷).

z را بین معادلات (۷) و (۸) حذف میکنیم ، معادلهٔ

$$4x^2 + \frac{1}{2} y^2 = 4 \qquad (۹)$$

بدست میاید . این معادله معادلهٔ استوانه‌ای است که خم هادی آن خم فصل مشترک رویه‌های (۷) و (۸) و امتداد یالهای آن موازی محور Oz است . پس داریم :

$$V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} \int_{3x^2+\frac{1}{4}y^2}^{4-x^2-\frac{1}{4}y^2} dz\, dy\, dx \qquad (۱۰)$$

حدود انتگرالها را به ترتیب زیر تعیین کرده‌ایم :

نخست نسبت‌به z انتگرال گرفته‌ایم،یعنی جزء حجم‌های dz dy dx درون ستونی را که قاعدهٔ آن dy dx و ارتفاع آن فاصلهٔ از رویهٔ (۸) تا رویهٔ (۷) (در شکل از MP تا MQ) است ، باهم جمع کرده‌ایم . پس حدود z همان مقادیر طرف راست معادلات (۸) و (۷) و نتیجهٔ محاسبه

$$V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} (4 - 4x^2 - \frac{1}{2} y^2) dy\, dx \qquad (۱۱)$$

است . حدود این انتگرال دوگانه همان حدود میدان OAB یعنی آن قسمت از سطح قاعدهٔ استوانهٔ (۹) است که در ربع اول قرار دارد . انتگرال (۱۱) را حساب میکنیم ، $V = 4\pi\sqrt{2} =$ (واحد حجم ۱۷٫۷۷) بدست میاید .

ممکن است دربعضی از مسائل مناسبتر و یا لازم باشد که نخست نسبت به x یا y انتگرال بگیریم و نه ، مانند بالا ، نسبت به z . دراین صورت باید حدود انتگرالها را با توجه به مطالب مذکور تعیین کنیم .

۲۵۸- محاسبهٔ حجم در دستگاه مختصات استوانه‌ای .- در بسیاری از حالات ممکن است بکار بردن مختصات استوانه‌ای (ρ , θ , z) حل مسئله را آسانتر سازد . مختصات استوانه‌ای و رابطهٔ آن با مختصات قائم دربند (۷) صفحهٔ ۱۰ ذکر شده است . معادلات استوانه‌ای سطوح محدود کنندهٔ حجم را نیز دربسیاری از موارد میتوان با استفاده

از تعریف آنها مستقیماً نوشت . ولی بطورکلی میتوان با قرار دادن

$$x=\rho \cos \theta \quad , \quad y=\rho \sin \theta \qquad (1)$$

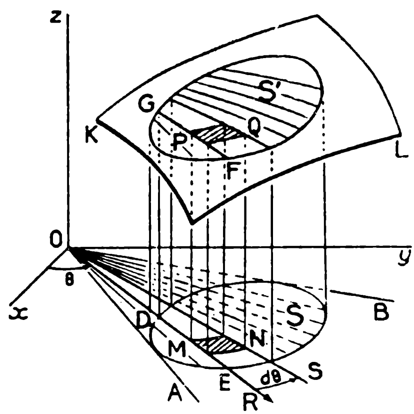
معادلات قائم را به معادلات استوانه‌ای تبدیل کرد .

بکار بردن مختصات استوانه‌ای بخصوص وقتی مناسب است که سطح محدود کننده یک سطح دوار باشد . دراین صورت اگر محور دوران را محور Oz بگیریم ، معادلهٔ سطح به صورت $z=f(\rho)$ درمیاید ، یعنی معادلهٔ سطح فاقد متغیر θ میشود .

حجم زیریك رویه . ـ معادلهٔ استوانه‌ای سطحی مانند KL (شکل۲۳۸) را

$$z=F(\rho , \theta) \qquad (2)$$

فرض میکنیم و به محاسبهٔ حجمی میپردازیم که زیر رویهٔ (۲) و بالای صفحهٔ xOy قرار



شکل ۲۳۸

دارد و ازاطراف به استوانه‌ای محدود است که مقطع قائم آن درصفحهٔ xOy خم محدود کنندهٔ میدان S است. قسمتی از رویهٔ (۲) راکه درون استوانهٔ مذکور واقع است ، میدان S' مینامیم .

این جسم را به ترتیب‌زیر به اجزای حجم‌تقسیم میکنیم : میدان S را با رسم خطوط شعاعی ماربر O و قوسهای دوایری به مرکز O (مانند شمارهٔ ۲۰٤) به اجزای سطح ، ΔA ، تقسیم مینماییم . سپس برخطوط شعاعی مذکور و محور Oz صفحاتی میگذرانیم و

سرانجام استوانه‌های دواری برقوسهای مستدیر درون S مرور میدهیم . بدین ترتیب جسم مورد نظر به ستونهایی مانند MNPQ که قاعدهٔ آن $MN=\triangle A$ و ارتفاع آن $MP=z$ است ، تقسیم میشود. بنابراین جزء حجم منشور قائمی به قاعدهٔ $\triangle A$ و ارتفاع z است و داریم :

$$\triangle V = z\,\triangle A \qquad (۳)$$

برای پیدا کردن V ، حجم جسم ، باید تمام منشورهای نظیر (۳) راکه قاعدهٔ آنها درون S قرار دارد باهم‌جمع کنیم وحد آن‌را ، وقتی $\triangle\theta$ و $\triangle\rho$ باز یاد شدن تعداد خطوط شعاعی و تعداد قوسهای مستدیر بسمت صفر میل میکنند ، حساب کنیم . بدین ترتیب

$$V = \lim_{\substack{\triangle\rho \to ۰ \\ \triangle\theta \to ۰}} \sum\sum z\,\triangle A \qquad (٤)$$

اکنون نشان میدهیم که حد مجموع دوگانهٔ (٤) را میتوان با انتگرال گیری متوالی پیدا کرد (با شمارهٔ ۲٤٤ مقایسه کنید) . بدین منظور مقدار تقریبی یک قاچ از جسم راکه بین‌دوصفحهٔ شعاعی مانند ROz و SOz قرار دارد ، بدست میاوریم‌و سپس حد مجموع این قاچها را حساب میکنیم .

مقطع جسم باصفحهٔ ROz ، DEFG است و مقدار z درهرنقطه از خم GPF از روی معادلهٔ (۲) که در آن بجای θ مقدار ثابت $\widehat{xOR}$ میگذاریم ، بدست میاید . در صفحهٔ ROz ، OR و Oz را محورهای یک دستگاه قائم فرض میکنیم . دراین صورت مختصات هرنقطه (ρ , z) است . اگر مختصات مرکز ثقل سطح DEFG را $(\bar{\rho} , \bar{z})$ بنامیم ، بنابر دستورهای (۲) و (۳) ی شمارهٔ ۱۷۷ داریم :

$$\bar{\rho} \cdot (\text{مساحت DEFG}) = \int_{OD}^{OE} \rho z\, d\rho = \int_{OD}^{OE} \rho F(\rho , \theta)\, d\rho$$

حاصل این انتگرال تابعی از θ است .

اکنون‌سطح DEFG را در حول محور Oz دوران میدهیم. بنابر مطالب مذکور در شمارهٔ ۲۵۰ حجم جسم دوار حاصل برابر $2\pi\bar{\rho} \cdot$ (مساحت DEFG) است. صفحات

ROz و SOz از این جسم دوار یک قاچ میبرند که حجم آن برابر (مساحت DEFG) $\cdot \rho\, \Delta\theta$ است . $\Delta\theta$ برحسب رادیان و مساوی $\widehat{ROS}$ میباشد .
بنابراین حجم قاچ محدود بین صفحات ROz و SOz بطور تقریب برابر

$$\Delta\theta \int_{OD}^{OE} \rho F(\rho\,,\,\theta)d\rho \tag{۵}$$

و مقدار دقیق حجم جسم مورد نظر برابر حد مجموع قاچهای نظیر (۵) به ازای $\Delta\theta \to 0$ است . پس

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho\,,\,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \tag{۶}$$

در این انتگرال $\alpha = \widehat{xOA}$ ، $\beta = \widehat{xOB}$ ، $\rho_1 = OD = f_1(\theta)$ و $\rho_2 = OE = f_2(\theta)$ است . دو مقدار اخیر از روی معادلات قطبی خمهای محدودکنندهٔ میدان S تعیین میشوند .

درانتگرال(۶)جزء انتگرال حجم منشورقائمی به ارتفاع z و سطح قاعدهٔ $\rho\, d\rho\, d\theta$ است :

$$F(\rho\,,\,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = z\rho\, d\rho\, d\theta$$

پس در (۳) ، مانند شمارهٔ ۲۰٤ ، $\rho\Delta\rho\Delta\theta$ جانشین ΔA شده است .

بدین ترتیب برای حجم زیر رویهٔ (۲) دستور*

$$V = \iint_S z\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_S F(\rho\,,\,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \tag{M}$$

بدست میاید . حدود این انتگرال همان است که در شمارهٔ ۲۰٤ برای مساحت میدان S تعیین گردید .

از روابط (M) و (٤) میتوان دستور (۲) ی شمارهٔ ۲۰٤ را نتیجه گرفت .

مثال ۱ - نخست نشان دهید که حجم محدود بین

* ترتیب انتگرال‌گیری هرچه باشد فرقی نمیکند . از اثبات این مطلب صرف‌نظر میکنیم .

بیضوی دوار $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2b^2$

و استوانهٔ $x^2+y^2-ay=0$

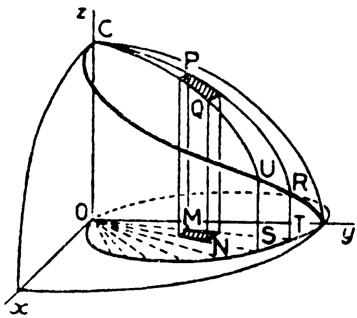
باانتگرال

$$V=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sin\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta \qquad (7)$$

تعیین میشود . سپس این انتگرال را حساب کنید .

حل - بنابر روابط (۱) ، معادلهٔ استوانه‌ای این بیضوی به صورت $b^2\rho^2+a^2z^2=a^2b^2$ است ، پس

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2} \qquad (8)$$



شکل ۲۳۹

معادلهٔ قطبی دایرهٔ $x^2+y^2-ay=0$ که در صفحهٔ xOy میدان S را محدود میکند ، بنابر روابط (۱)

$$\rho=a\sin\theta \qquad (9)$$

است . برای نیمدایره ، حدود θ صفر و $\frac{\pi}{2}$ ، و وقتی θ را ثابت فرض کنیم ، حدود ρ صفر و $a\sin\theta$ است . اگر در دستور (M) بجای z مقدار آن را از (۸) بگذاریم و به انتگرال حاصل حدود اخیر را نسبت‌دهیم ، دستور (۷) بدست میاید . مقدار آن عبارتست‌از :

$$V=\frac{2}{9}a^2b(3\pi-4)=1{,}206\,a^2b$$

محاسبهٔ حجم بوسیلهٔ انتگرال سه‌گانه . - جسم مورد نظر را با صفحاتی که از Oz میگذرند و استوانه‌های دواری که محور آنها Oz است و صفحات متحدالفاصله‌ای که موازی صفحهٔ xOy میباشند ، به حجمهای جزئی تقسیم میکنیم . فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی متوالی را Δz مینامیم . در این صورت ΔV ، جزء حجم ، جزئی از منشور قائم (۲) ، یعنی منشور قائمی به قاعدهٔ ΔA و ارتفاع Δz است و داریم :

$$\Delta V = \Delta z \, \Delta A \tag{۱۰}$$

اگر این منشورها را باهم جمع کنیم و بجای ΔA ، $\rho \, \Delta\rho \, \Delta\theta$ بگذاریم وحداین مجموع را به ازای $\Delta z \to 0$ ، $\Delta\rho \to 0$ ، $\Delta\theta \to 0$ درنظر بگیریم ، داریم :

$$V = \iiint \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \tag{N}$$

دستورهای ('۲) شمارهٔ ۲۰۷ که مختصات مرکز ثقل را میدهند ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر درمیایند :

$$V\bar{x} = \iiint \rho^2 \cos\theta \, dz \, d\rho \, d\theta \quad , \quad V\bar{y} = \iiint \rho^2 \sin\theta \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$V\bar{z} = \iiint \rho z \, dz \, d\rho \, d\theta$$

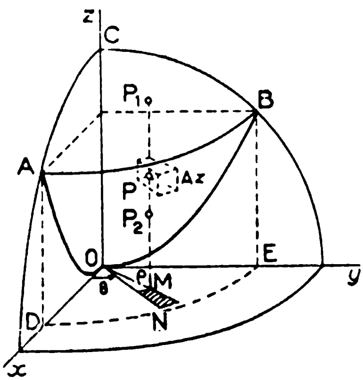
مثال ۲ - حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به کرهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 \tag{۱۱}$$

و از پایین به پارابلوئید دوار

$$x^2 + y^2 = 2z \tag{۱۲}$$

محدود است .



شکل ۲۴۰

حل - شکل ۲۴۰ آن قسمت از سطح کره و پارابلوئید را نشان میدهد که در هشت یک اول قرار دارد . خم فصل مشترک AB درصفحهٔ $z = 2$ واقع است و تصویر آن برصفحهٔ xOy دایرهٔ

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{۱۳}$$

است . بنابر روابط (۱) :

معادلهٔ استوانه‌ای کرهٔ (۱۱)

$$\rho^2 + z^2 = 8 \tag{۱۴}$$

معادلهٔ استوانه‌ای پارابلوئید (۱۲) $\rho^{۲}=۲z$ (۱۵)

معادلهٔ دایرهٔ (۱۳) $\rho=۲$ (۱۶)

در شکل ۲٤۰ : در نقطهٔ $M(\rho, \theta)$ ، ΔA ، جزء سطح دایرهٔ (۱٦) و در نقطهٔ $P(\rho, \theta, z)$ ، ΔV ، جزء حجم جسم نشان داده شده است .

بنابر دستور (N)

$$V=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۲}\int_{\frac{۱}{۲}\rho^{۲}}^{\sqrt{۸-\rho^{۲}}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \qquad (۱۷)$$

حدود اخیر بدین ترتیب بدست میایند : نخست ρ و θ را ثابت فرض میکنیم و نسبت به z انتگرال میگیریم ، یعنی آن جزء حجمهایی را بیکدیگر میفزاییم که درون ستونی عمودی [بین رویهٔ (۱۵) و رویهٔ (۱٤)] واقعند (در شکل ۲٤۰ از $MP_{۲}$ تا $MP_{۱}$). بنابراین حدود z بنابر (۱۵) ، $z=MP_{۲}=\frac{۱}{۲}\rho^{۲}$ وبنابر (۱٤) ، $z=MP_{۱}=\sqrt{۸-\rho^{۲}}$ میباشند . حدود ρ و θ همان حدود میدان محدود به دایرهٔ (۱٦) هستند . نسبت به ρ انتگرال میگیریم ، یعنی تمام ستونهای درون قاچ واقع بین صفحهٔ ماربر Oz و OM و صفحهٔ ماربر Oz و ON را بیکدیگر میفزاییم . سرانجام تمام قاچها را باهم جمع میکنیم .

مقدار انتگرال (۱۷) عبارتست از :

جواب : $V=\frac{٤}{۳}\pi(۸\sqrt{۲}-۷)=۱۸{,}۱$

درتمرینهای زیرهنگامی ازدستورهای (M) و (N) استفاده کنید که معادلات سطوح محدود کنندهٔ جسم در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده باشند (یعنی معادلات به صورت استوانه‌ای باشند) . اگر برای رسم شکل به معادلات قائم احتیاج باشد ، تبدیلات زیر را بکار ببندید :

$$\rho^{۲}=x^{۲}+y^{۲} \quad , \quad \theta=arc\ tg\ \frac{y}{x} \qquad (۱۸)$$

به دستورهای اخیر میتوان دو دستور زیر را افزود :

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} \qquad (19)$$

تمرین

۱) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به استوانهٔ $x^{2}+z=4$ و از پایین به صفحهٔ $x+z=2$ محدود است و بین صفحات $y=0$ و $y=3$ قرار دارد .

جواب : $V=\int_{0}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{2-x}^{4-x^{2}} dz\,dx\,dy = 13{,}5$

۲) با استفاده از مختصات استوانه‌ای مثال ۲ ی شمارهٔ ۲۴۷ را حل کنید .

جواب : $V=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2a\sin\theta}\frac{\rho^{3}}{a}\,d\rho\,d\theta=\frac{3}{2}\pi a^{3}$

۳) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به استوانهٔ $z=4-x^{2}$ و از پایین به پارابلوئید الیپتیک $z=3x^{2}+y^{2}$ محدود است .

جواب : $V=4\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^{2}}}\int_{3x^{2}+y^{2}}^{4-x^{2}} dz\,dy\,dx=4\pi$

۴) کرهٔ S به شعاع a مفروض است . دو صفحهٔ P و P' از مرکز کرهٔ S میگذرند وزاویهٔ بین‌آنها α رادیان است. حجم **قاچ کروی** بین P و P' را پیدا کنید. از مختصات استوانه‌ای استفاده نمایید.

جواب : $\frac{2}{3}\alpha a^{3}$

۵) حجم جسمی راپیدا کنید که از بالا به صفحهٔ $z=x$ واز پایین به پارابلوئید الیپتیک $z=x^{2}+y^{2}$ محدود است .

جواب : $\frac{\pi}{32}$

۶) تمرین ۵ را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حساب کنید .

جواب : $V=\text{۲}\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\int_{\text{۰}}^{\cos\theta}\int_{\rho^{\text{۲}}}^{\rho\cos\theta}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{\text{۳۲}}$

۷) حجم جسمی را پیدا کنید که به کرهٔ $\rho^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}$ محدود است و درون استوانهٔ $\rho=a\cos\theta$ قرار دارد . جواب : $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}a^{\text{۳}}(\pi-\frac{\text{٤}}{\text{۳}})$

۸) حجم جسمی را پیدا کنید که بالای صفحهٔ $z=\text{۰}$ ، زیر مخروط $z^{\text{۲}}=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}$ و درون استوانهٔ $x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=\text{۲}ax$ واقع است . از مختصات استوانه‌ای استفاده نمایید .

جواب : $\frac{\text{۳۲}}{\text{۹}}a^{\text{۳}}$

۹) حجم جسمی را پیدا کنید که به $z=x+\text{۱}$ و $\text{۲}z=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}$ محدود است.

جواب : $\frac{\text{۹}}{\text{٤}}\pi$

۱۰) نشان دهید که اگر در تمرین ۳ نسبت به z انتگرال بگیریم (بدون انتگرال گیری دیگری) ، تساوی $V=\text{٤}A-\text{٤}I_y-I_x$ بدست میاید . A مساحت بیضی $\text{٤}x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}=\text{٤}$ و I_x و I_y گشتاورهای ماند بیضی اخیرند که با دستورهای (E) ی شمارهٔ ۲۰۲ تعیین میشوند .

۱۱) حجم جسمی را پیدا کنید که زیر صفحهٔ $\text{۲}z=\text{٤}+\rho\cos\theta$ ، بالای صفحهٔ $z=\text{۰}$ ودرون استوانهٔ $\rho=\text{۲}\cos\theta$ قرار دارد. جواب : $\frac{\text{۵}}{\text{۲}}\pi$

۱۲) مختصات مرکز ثقل جسمی را پیدا کنید که به پارابلوئید دوار $az=\rho^{\text{۲}}$ و صفحهٔ $z=c$ محدود است . جواب : $(\text{۰}\,,\,\text{۰}\,,\,\frac{\text{۲}c}{\text{۳}})$

۱۳) حجم جسمی را پیدا کنید که به هیپربلوئید $z^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}+\rho^{\text{۲}}$ و دامن بالایی مخروط $z^{\text{۲}}=\text{۲}\rho^{\text{۲}}$ محدود است. جواب : $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\pi a^{\text{۳}}(\sqrt{\text{۲}}-\text{۱})$

۱۴) مختصات مرکز ثقل جسم مذکور در تمرین ۱۳ را پیدا کنید .

جواب : $\left(۰\ ,\ ۰\ ,\ \frac{۳}{۸}\,a(\sqrt{۲}+۱)\right)$

۱۵) مختصات مرکز ثقل جسم مذکور در تمرین ۱ را پیدا کنید .

جواب : $\left(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ \frac{۱۲}{۵}\right)$

۱۶) مختصات مرکز ثقل جسم مذکور در تمرین ۲ را پیدا کنید .

جواب : $\left(۰\ ,\ \frac{۴}{۳}\,a\ ,\ \frac{۱۰}{۹}\,a\right)$

۱۷) مختصات مرکز ثقل جسم مذکور در تمرین ۸ را پیدا کنید .

۱۸) حجم جسمی را پیدا کنید که از پایین به $z=۰$ ، از بالا به مخروط $z=a-\rho$ و از اطراف به $\rho=a\cos\theta$ محدود است .

جواب : $\frac{۱}{۳۶}\,a^{۳}(۹\pi-۱۶)$

۱۹) مختصات مرکز ثقل جسم مذکور در تمرین قبل را پیدا کنید .

۲۰) حجم جسمی را پیدا کنید که زیر سطح کروی $\rho^{۲}+z^{۲}=۲۵$ و بالای دامن بالایی سطح مخروطی $z=\rho+۱$ قرار دارد .

۲۱) نشان دهید که مختصات مرکز ثقل چهار وجهی همگنی که به‌صفحات مختصات و صفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ محدود است ، $\left(\frac{a}{۴}\ ,\ \frac{b}{۴}\ ,\ \frac{c}{۴}\right)$ است .

۲۲) فرض میکنیم که چگالی چهار وجهی مذکور در تمرین ۲۱ با $D=kx$ داده شده است . نشان دهید که (الف) $M=\frac{۱}{۲۴}\,ka^{۲}bc$ و (ب) $\bar{x}=\frac{۲a}{۵}$ است . M جرم چهار وجهی است .

۲۳) دریک نیمکره به شعاع a چگالی هرنقطه به نسبت فاصلهٔ آن نقطه از مرکز تغییر میکند : $D=kr$. نشان دهید که (الف) $M=\frac{۱}{۲}\,\pi ka^{۴}$ و (ب) فاصلهٔ مرکز ثقل نیمکره از پایهٔ آن $\frac{۲a}{۵}$ است .

۲۴) مخروط دواری که رأس آن O ، محور دوران آن Oz و زاویهٔ رأس آن ۶۰° است ، کره‌ای به شعاع a را قطع میکند . نیز میدانیم که نقطهٔ O واقع برسطح کره و Oz یکی از اقطار کره است . (الف) نشان دهید که حجم آن قسمت از کره که درون مخروط قرار دارد ، $\frac{۷}{۱۲}\pi a^۳$ است . (ب) نشان دهید که فاصلهٔ مرکز ثقل از رأس مخروط $\frac{۳۷}{۲۸}a$ است .

۲۵) مثال ۳ ی شمارهٔ ۱۶۵ را با مثال ۱ شمارهٔ ۲۵۷ مقایسه کنید واز آنجا دستور (N) شمارهٔ ۱۶۵ را از دستور (L) شمارهٔ ۲۵۷ نتیجه بگیرید .

۲۶) دستور (۲) ی شمارهٔ ۱۷۸ را از دستور اول ('۲) شمارهٔ ۲۵۷ نتیجه بگیرید.

تمرین اضافی

۱) حجم جسمی را پیدا کنید که از بالا به کرهٔ $\rho^۲+z^۲=r^۲$ و از پایین به مخروط $z=\rho\, cotg\, \varphi$ محدود است وبین دو صفحهٔ $\theta=\beta$ و $\theta=\beta+\Delta\beta$ قرار دارد. (جسم مذکور قسمتی از یک قاچ کروی مانند O-SQN در شکل ۱۸۹ است . درشکل باید شعاع OQ رسم شود .) جواب : $\frac{۱}{۳} r^۳\Delta\beta(۱-cos\,\varphi)$

۲) با استفاده ازجواب تمرین قبل و بدون انتگرال گیری حجم جسمی را پیدا کنید که به کرهٔ $\rho^۲+z^۲=r^۲$ ، مخروطهای $z=\rho\, cotg\, \varphi$ و $z=\rho\, cotg\,(\varphi+\Delta\varphi)$ و صفحات $\theta=\beta$ و $\theta=\beta+\Delta\beta$ محدود است . (جسم مذکور مانند $O\text{-}P_1RQS$ در شکل ۱۸۹ است . در شکل باید شعاعهای OR و OQ رسم شوند .)

جواب : $\frac{۲}{۳} r^۳\Delta\beta\, sin\,(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{۲})\, sin\,\frac{\Delta\varphi}{۲}$

۳) بااستفاده از جواب تمرین ۲ و بدون انتگرال گیری حجم جسمی را پیدا کنید که به $z=\rho\, cotg\, \varphi$ ، $z=\rho\, cotg\,(\varphi+\Delta\varphi)$ ، $\theta=\beta$ و $\theta=\beta+\Delta\beta$ محدود است و بین دو کرهٔ $\rho^۲+z^۲=r^۲$ و $\rho^۲+z^۲=(r+\Delta r)^۲$ قرار دارد .

جواب : $۲\Delta\beta\,\Delta r\, sin\,(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{۲})\, sin\,\frac{\Delta\varphi}{۲}\,(r^۲+r\,\Delta r+\frac{۱}{۳}\Delta r^۲)$

(جسم مذکور بدین ترتیب بدست میاید که در شکل ۱۸۹ کره‌ای به مرکز O و به شعاع $r+\triangle r$ درنظر بگیریم ، شعاعهای OP_1 ، OR ، OQ و OS را امتداد دهیم تا کرهٔ اخیررا در نقاط P_1' ، R' ، Q' و S' قطع کنند . فصل مشترك این کره با مخروطهای مذکور قوسهای مستدیر $P_1'R'$ و Q'S' و با صفحات مذکور قوسهای $P_1'S'$ و R'Q' [از دوایر عظیمه] میباشند . رئوس جسم مورد نظر عبارتند از ($P_1RQS-P_1'R'Q'S'$

٤) اگر مختصات کروی (۸) صفحهٔ ۱۱ را درنظر بگیریم و در جواب تمرین قبل بجای θ ، β بگذاریم ، جسم مذکور در تمرین ۳ جزء حجم است ($\triangle V$) . مختصات یکی از رئوس $\triangle V$ نیز $P(r, \varphi, \theta)$ است . با استفاده از تمرین ۳ نشان دهید که :

$$\lim_{\substack{\triangle r \to 0 \\ \triangle\theta \to 0 \\ \triangle\varphi \to 0}} \frac{\triangle V}{r^2 \sin\varphi \, \triangle r \, \triangle\varphi \, \triangle\theta} = 1$$

بنابراین اختلاف $\triangle V$ و $r^2 \sin\varphi \, \triangle r \, \triangle\varphi \, \triangle\theta$ بینهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است (شمارهٔ ۹۹) .

٥) در جسم مذکور در تمرین قبل نشان دهید که یالهای ماربر هررأس بیکدیگر عمودند و طول آنهایی که از نقطهٔ (r, φ, θ) میگذرند بترتیب $\triangle r$ ، $r\triangle\varphi$ ، $r \sin\varphi \, \triangle\theta$ است .

٦) دستگاه مختصات کروی و سه دسته رویه‌هایی (کرات ، مخروطها ، صفحات) را که برای تقسیم جسم R به اجزای حجم $\triangle V$ لازمند ، شرح دهید (تمرین ٤) . (r, φ, θ) مختصات یك نقطهٔ دلخواه از $\triangle V$ است . مینویسیم :

$$\lim_{\substack{\triangle r \to 0 \\ \triangle\theta \to 0 \\ \triangle\varphi \to 0}} \sum\sum\sum F(r, \varphi, \theta) \triangle V = \iiint_R F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

در طرف چپ میتوان بجای $\triangle V$ ، $r^2 \sin\varphi \, \triangle r \, \triangle\varphi \, \triangle\theta$ گذاشت (تمرین ٤ را ببینید) ، یعنی میتوان بجای $\triangle V$ حاصلضرب سه یال مذکور در تمرین ٥ را قرار داد . طرف راست با انتگرال گیری متوالی حساب میگردد (از اثبات صرف‌نظر میشود) .

۷) انتگرال تمرین قبل را وقتی $F(r, \varphi, \theta) = r$ و R کرهٔ $r = 2a \cos \varphi$ یعنی $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ است ، حساب کنید .

جواب : $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{8}{5} \pi a^4$

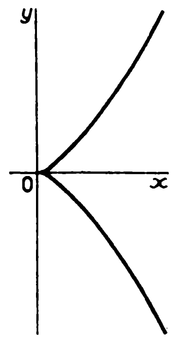
۸) انتگرال تمرین ۶ را وقتی $F(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \varphi$ و R میدان $r = 2a \cos \varphi$ است ، حساب کنید . جواب : $\frac{64}{35} \pi a^5$

فصل بیست و ششم

خمهایی که برای مقایسه بکار میروند

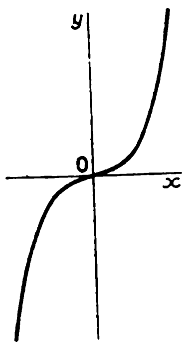
دراین فصل عده‌ای از خمهایی که برای مقایسه بکار میروند و در متن کتاب مورد استفاده قرارگرفته‌اند ، گرد آورده شده‌اند .

سهمی سمی کوبیک
Semicubical Parabola



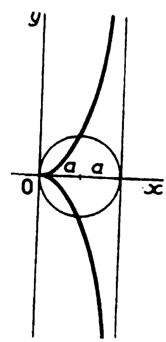
$y^2 = ax^3.$

سهمی کوبیک (درجهٔ سوم)
Cubical Parabola



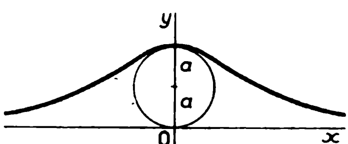
$y = ax^3.$

سیسوئید دیوکلس
The Cissoid of Diocles



$y^2(2a - x) = x^3.$

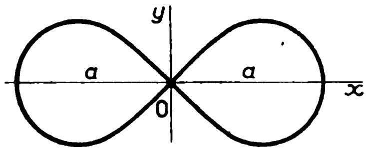
خم آگنزی
The Witch of Agnesi



$x^2y = 4a^2(2a - y).$*

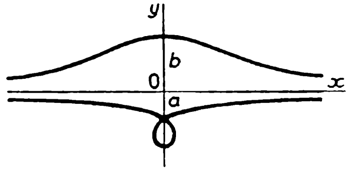
* این معادله درحالت $a=\frac{1}{2}$ به صورت سادهٔ $y=\frac{1}{1+x^2}$ در میاید . مترجم

لمنیسکات برنولی
The Lemniscate of Bernoulli



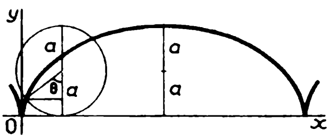
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$
$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta.$$

کنکوئید نیکمد
The Conchoid of Nicomedes



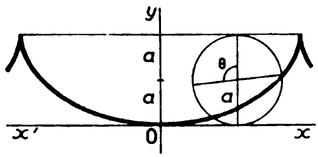
$$x^2y^2 = (y+a)^2(b^2-y^2).$$
(در این شکل $b > a$.)

سیکلوئید
Cycloid



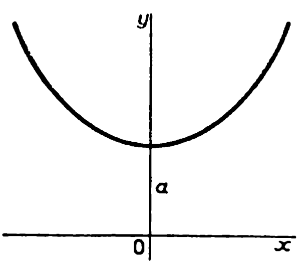
$$x = a \text{ arc verse } \frac{y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

سیکلوئید
Cycloid



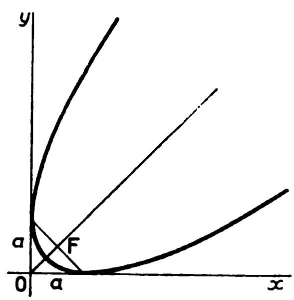
$$x = a \text{ arc verse } \frac{y}{a} + \sqrt{2ay-y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

منحنی زنجیر
Catenary



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

سهمی
Parabola



$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \;*$$

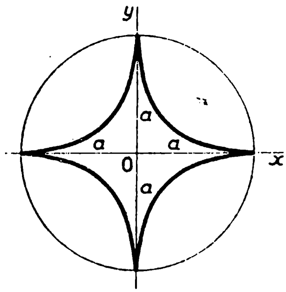
---

* این معادله تنها پاره قوس محدود به دو نقطهٔ تماس را نشان میدهد . معادلهٔ کامل سهمی فوق عبارتست از : $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})=0$

مترجم

هیپوسیکلوئید (آستروئید)

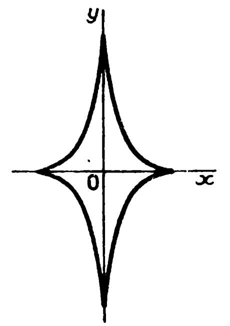
Hypocycloid of Four Cusps (Astroid)



$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta. \end{cases}$

گستردهٔ بیضی

Evolute of Ellipse



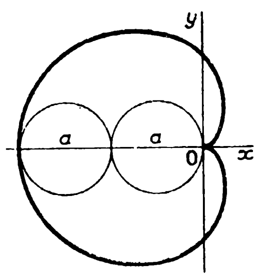
$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

$x = \mathrm{A} \cos^3 \theta,$ با $\mathrm{A}a = a^2 - b^2,$

$y = \mathrm{B} \sin^3 \theta,$ $\mathrm{B}b = b^2 - a^2.$

کاردیوئید

Cardioid

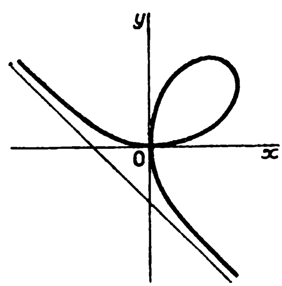


$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$.

$\rho = a(1 - \cos \theta)$.

فلیوم دکارت

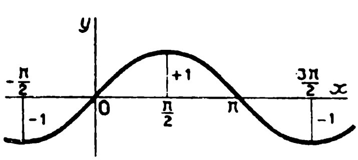
Folium of Descartes



$x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

خم سینوس

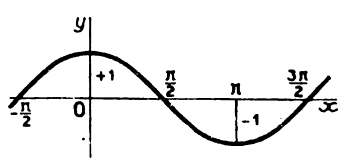
Sine Curve



$y = \sin x$.

خم کسینوس

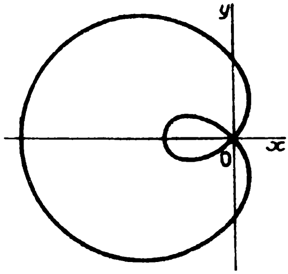
Cosine Curve



$y = \cos x$.

لیماسن

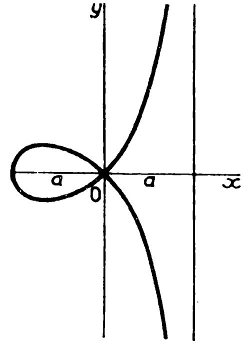
Limaçon



$$\rho = b - a\cos\theta.$$
$$b < a$$

استرفوئید

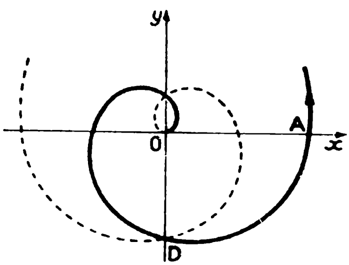
Strophoid



$$y^2 = x^2\,\frac{a+x}{a-x}$$

مارپیچ ارشمیدس

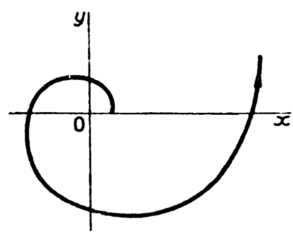
Spiral of Archimedes



$$\rho = a\theta.$$

مارپیچ لگاریتمی

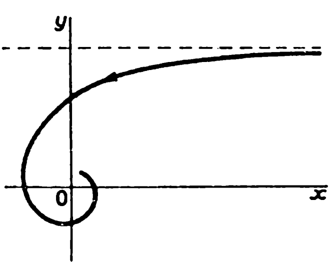
Logarithmic or Equiangular Spiral



$$\rho = ae^{a\theta},$$
$$\log\rho = a\theta.$$

مارپیچ هیپربلیک

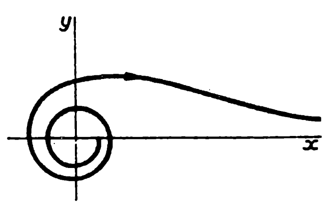
Hyperbolic or Reciprocal Spiral



$$\rho\theta = a.$$

لیتوئوس

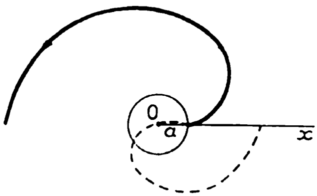
Lituus



$$\rho^2\theta = a^2.$$

مارپیچ پارابلیک

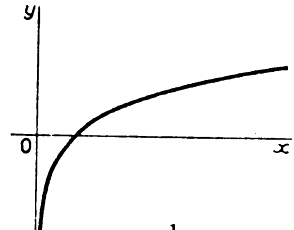
Parabolic Spiral



$(\rho - a)^2 = 4ac\theta.$

خم تابع لگاریتمی

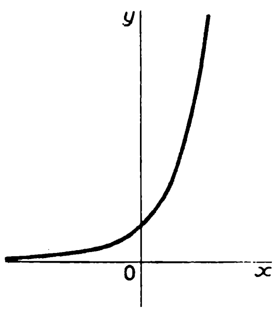
Logarithmic Curve



$y = \ln x$.

خم تابع نمایی

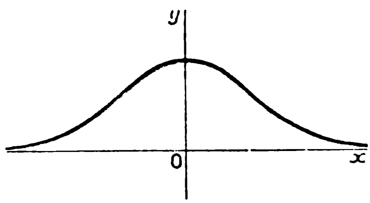
Exponential Curve



$y = e^x.$

منحنی احتمال

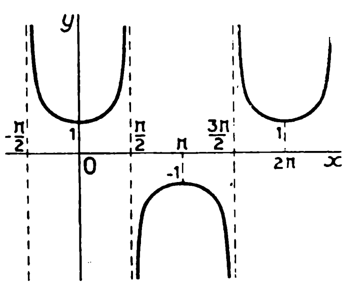
Probability Curve



$y = e^{-x^2}$

خم سکانت

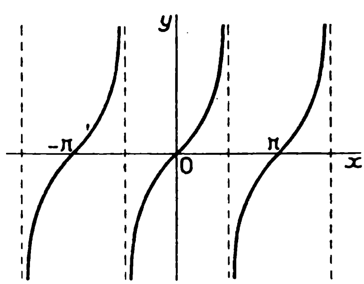
Secant Curve



$y = \sec x.$

خم تانژانت

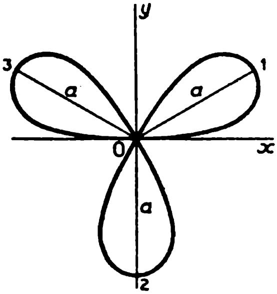
Tangent Curve



$y = \operatorname{tg} x.$

گل سه پر

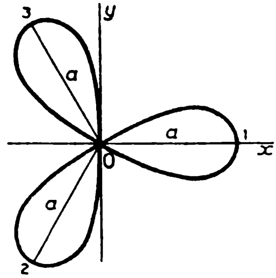
Three - Leaved Rose



$\rho = a \sin 3\theta.$

گل سه پر

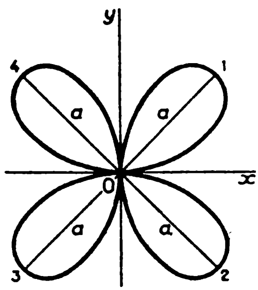
Three - Leaved Rose



$\rho = a \cos 3\theta.$

گل چهار پر

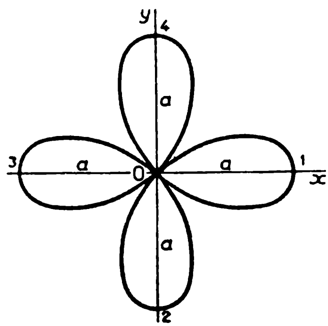
Four - Leaved Rose



$\rho = a \sin 2\theta.$

گل چهار پر

Four - Leaved Rose

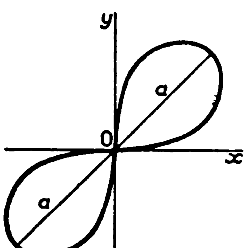


$\rho = a \cos 2\theta.$

گل دو پر لمنیسکات

Two - Leaved Rose

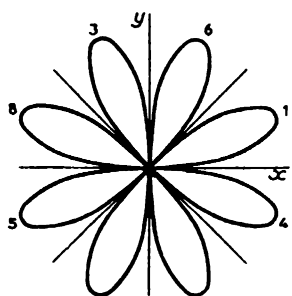
Lemniscate



$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta.$

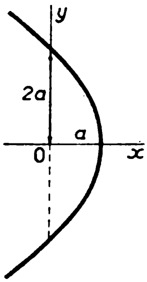
گل هشت پر

Eight - Leaved Rose



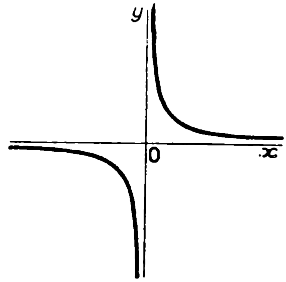
$\rho = a \sin 4\theta$

سهمی
Parabola



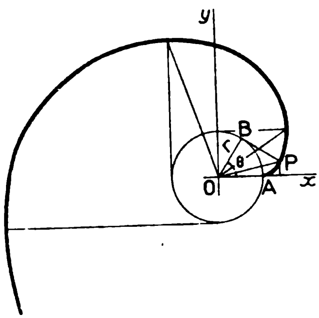
$$\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

هذلولی متساوی‌الساقین
Equilateral Hyperbola



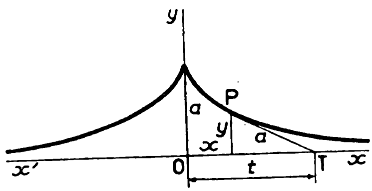
$$xy = a.$$

گسترندهٔ دایره
Involute of a Circle



$$x = r\cos\theta + r\theta\sin\theta,$$
$$y = r\sin\theta - r\theta\cos\theta.$$

تراکتریس
Tractrix



$$x = a \operatorname{arg\,sech} \frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

$$\begin{cases} x = t - a \operatorname{th} \dfrac{t}{a}, \\ y = a \operatorname{sech} \dfrac{t}{a}. \end{cases}$$

فصل بیست و هفتم
جدول انتگرال

چند انتگرال مقدماتی

1. $\int df(x) = \int f'(x)\, dx = f(x) + C.$

2. $\int a\, du = a \int du.$

3. $\int (du \pm dv \pm dw \pm \dots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \dots$

4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C. \qquad (n \neq -1).$

5. $\int \dfrac{du}{u} = Lu + C.$

انتگرالهای منطق شامل $a + bu$

دستورهای کاهش دوجمله‌ای مندرج درشماره‌های ۹۶ تا ۱۰۴ را نیز ببینید.

6. $\int (a+bu)^n\, du = \dfrac{(a+bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C. \qquad (n \neq -1)$

7. $\int \dfrac{du}{a+bu} = \dfrac{1}{b} L(a+bu) + C.$

8. $\int \dfrac{u\, du}{a+bu} = \dfrac{1}{b^2} [a + bu - a\, L(a+bu)] + C.$

9. $\int \dfrac{u^2\, du}{a+bu} = \dfrac{1}{b^3} \left[\dfrac{1}{2} (a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2 L(a+bu) \right] + C.$

10. $\int \dfrac{u\, du}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^2} \left[\dfrac{a}{a+bu} + L(a+bu) \right] + C.$

11. $\int \dfrac{u^2\, du}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^3} \left[a + bu - \dfrac{a^2}{a+bu}\ 2a\, L(a+bu) \right] + C.$

12. $\int \dfrac{u\, du}{(a+bu)^3} = \dfrac{1}{b^2} \left[-\dfrac{1}{a+bu} + \dfrac{a}{2(a+bu)^2} \right] + C.$

$$13.\quad \int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{L}\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$$

$$14.\quad \int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\,\mathrm{L}\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$$

$$15.\quad \int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\,\mathrm{L}\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$$

انتگرالهای منطق شامل $a^2 \pm b^2u^2$

$$16.\quad \int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{bu}{a} + C.$$

$$17.\quad \int \frac{du}{a^2-b^2u^2} = \frac{1}{2ab}\,\mathrm{L}\left(\frac{a+bu}{a-bu}\right) + C. \qquad (a^2 > b^2u^2).$$

$$\int \frac{du}{b^2u^2-a^2} = \frac{1}{2ab}\,\mathrm{L}\left(\frac{bu-a}{bu+a}\right) + C. \qquad (a^2 < b^2u^2).$$

$$18.\quad \int u(a^2 \pm b^2u^2)^n\,du = \frac{(a^2 \pm b^2u^2)^{n+1}}{\pm 2b^2(n+1)} + C. \qquad (n \neq -1).$$

$$19.\quad \int \frac{u\,du}{a^2 \pm b^2u^2} = \frac{1}{\pm 2b^2}\,\mathrm{L}(a^2 \pm b^2u^2) + C.$$

$$20.\quad \int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m-1}}{\pm b^2(m-2p+1)\,(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}} - \frac{a^2(m-1)}{\pm b^2(m-2p+1)} \int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p}.$$

$$21.\quad \int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m+1}}{2a^2(p-1)(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}} - \frac{m-2p+3}{2a^2(p-1)} \int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}.$$

$$22.\quad \int \frac{du}{u(a^2 \pm b^2u^2)} = \frac{1}{2a^2}\,\mathrm{L}\left(\frac{u^2}{a^2 \pm b^2u^2}\right) + C.$$

$$23.\quad \int \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2u^2)^p} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}} - \frac{\pm b^2(m+2p-3)}{a^2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(a^2 \pm b^2u^2)^p}.$$

$$24.\quad \int \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{1}{2a^2(p-1)\,u^{m-1}(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}} + \frac{m+2p-3}{2a^2(p-1)} \int \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}.$$

انتگرالهای شامل $\sqrt{a+bu}$

نخست باید با تغییر متغیر $a + bu = v^2$ تابع زیر علامت انتگرال را منطق کرد. دستورهای کاهش دو جمله‌ای مندرج درشماره‌های ۹۶ تا ۱۰۴ را نیز ببینید.

$$25.\quad \int u\sqrt{a+bu}\,du = -\frac{2(2a-3bu)\,(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + C.$$

26. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{105\,b^3} + C.$

27. $\int u^m\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2u^m(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{b(2m+3)} - \dfrac{2am}{b(2m+3)}\int u^{m-1}\sqrt{a+bu}\,du.$

28. $\int \dfrac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = -\dfrac{2(2a-bu)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C.$

29. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \dfrac{2(8a^2-4abu+3b^2u^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C.$

30. $\int \dfrac{u^m\,du}{\sqrt{a+bu}} = \dfrac{2u^m\sqrt{a+bu}}{b(2m+1)} - \dfrac{2am}{b(2m+1)}\int \dfrac{u^{m-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}.$

31. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\left(\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right) + C,$ برای $a > 0.$

32. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}} + C,$ برای $a < 0.$

33. $\int \dfrac{du}{u^m\sqrt{a+bu}} = -\dfrac{\sqrt{a+bu}}{a(m-1)u^{m-1}} - \dfrac{b(2m-3)}{2a(m-1)}\int \dfrac{du}{u^{m-1}\sqrt{a+bu}}.$

34. $\int \dfrac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \dfrac{du}{u\sqrt{a+bu}}.$

35. $\int \dfrac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^m} = -\dfrac{(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{a(m-1)u^{m-1}} - \dfrac{b(2m-5)}{2a(m-1)}\int \dfrac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{m-1}}.$

انتگرالهای شامل $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

دراین گروه از انتگرالها به‌ترتیب زیر تغییر متغیر می‌دهیم :

به جای $\mathrm{L}(u+\sqrt{u^2+a^2})$ $\quad \mathrm{arg\,sh}\,\dfrac{u}{a},$ می‌گذاریم،

به جای $\mathrm{L}(u+\sqrt{u^2-a^2})$ $\quad \mathrm{arg\,ch}\,\dfrac{u}{a},$ می‌گذاریم،

به جای $\mathrm{L}\dfrac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}$ $\quad \mathrm{arg\,sh}\,\dfrac{a}{u}.$ می‌گذاریم،

36. $\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\mathrm{L}(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$

37. $\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \dfrac{u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} \pm \dfrac{na^2}{n+1}\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du.$ $(n \neq -1).$

38. $\int u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \dfrac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C.$ $\qquad (n \neq -2).$

$$39.\quad \int u^m(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{u^{m-1}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} - \frac{\pm a^2(m-1)}{n+m+1}\int u^{m-2}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du.$$

$$40.\quad \int \frac{du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{L}(u+\sqrt{u^2\pm a^2}) + \mathrm{C}.$$

$$41.\quad \int \frac{du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2\pm a^2}} + \mathrm{C}.$$

$$42.\quad \int \frac{u\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(u^2\pm a^2)^{1-\frac{n}{2}}}{2-n} + \mathrm{C}.$$

$$43.\quad \int \frac{u^2\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2\pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2}\mathrm{L}(u+\sqrt{u^2\pm a^2}) + \mathrm{C}.$$

$$44.\quad \int \frac{u^2\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} + \mathrm{L}(u+\sqrt{u^2\pm a^2}) + \mathrm{C}.$$

$$45.\quad \int \frac{u^m\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m-1}}{(m-n+1)(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\pm a^2(m-1)}{m-n+1}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

$$46.\quad \int \frac{u^m\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{\pm a^2(n-2)(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{\pm a^2(n-2)}\int \frac{u^m\,du}{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

$$47.\quad \int \frac{du}{u(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a}\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + \mathrm{C}.$$

$$48.\quad \int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + \mathrm{C}.$$

$$49.\quad \int \frac{du}{u^2(u^2\pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{\pm a^2 u} + \mathrm{C}.$$

$$50.\quad \int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + \mathrm{C}.$$

$$51.\quad \int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + \mathrm{C}.$$

$$52.\quad \int \frac{du}{u^m(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{\pm a^2(m-1)u^{m-1}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m+n-3}{\pm a^2(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-2}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

53. $$\int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\pm a^2(n-2)u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{\pm a^2(n-2)} \int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

54. $$\int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \,\mathrm{L}\, \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \mathrm{C}.$$

55. $$\int \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + \mathrm{C}.$$

56. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \mathrm{L}\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + \mathrm{C}.$$

57. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = -\frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{\pm a^2(m-1)u^{m-1}} - \frac{m-n-3}{\pm a^2(m-1)} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^{m-2}}.$$

58. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)u^{m-1}} + \frac{\pm a^2 n}{n-m+1} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1} du}{u^m}.$$

انتگرالهای شامل $\sqrt{a^2 - u^2}$

59. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + \mathrm{C}.$$

60. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{u(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{a^2 n}{n+1} \int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1} du. \quad (n \neq -1).$$

61. $$\int u(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = -\frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + \mathrm{C}. \qquad (n \neq -2).$$

62. $$\int u^m(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = -\frac{u^{m-1}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} + \frac{a^2(m-1)}{n+m+1} \int u^{m-2}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du.$$

63. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \arcsin \frac{u}{a} + \mathrm{C}.$$

64. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + \mathrm{C}.$$

65. $$\int \frac{u\, du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(a^2 - u^2)^{1-\frac{n}{2}}}{n-2} + \mathrm{C}.$$

66. $$\int \frac{u^2\, du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + \mathrm{C}$$

67. $$\int \frac{u^2\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - \arcsin\frac{u}{a} + C.$$

68. $$\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{u^{m-1}}{(m-n+1)(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{a^2(m-1)}{m-n+1}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

69. $$\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{a^2(n-2)(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{a^2(n-2)}\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

70. $$\int \frac{du}{u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{L}\,\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} + C = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arg\,ch}\,\frac{a}{u} + C.$$

71. $$\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

72. $$\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2a^2u^2} - \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{L}\,\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} + C.$$
$$= -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2a^2u^2} - \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arg\,ch}\,\frac{a}{u} + C.$$

73. $$\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-2}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}$$

74. $$\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{a^2(n-2)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(n-2)}\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

75. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\mathrm{L}\,\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} + C.$$
$$= \sqrt{a^2-u^2} - a\,\mathrm{arg\,ch}\,\frac{a}{u} + C.$$

76. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \arcsin\frac{u}{a} + C.$$

77. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = -\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}} + \frac{m-n-3}{a^2(m-1)}\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^{m-2}}$$

78. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)u^{m-1}} + \frac{a^2n}{(n-m+1)}\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du}{u^m}$$

انتگرالهای شامل $\sqrt{2au \pm u^2}$

دراین‌گروه ازانتگرالها می‌توان از دستورهای‌کاهش دوجمله‌ای استفاده‌کرد، بدین منظور می‌نویسیم:

$$\sqrt{2au \pm u^2} = u^{\frac{1}{2}}(2a \pm u)^{\frac{1}{2}}.$$

79. $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

80. $\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = -\frac{3a^2 + au - 2u^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

81. $\int u^m \sqrt{2au - u^2}\, du = -\frac{u^{m-1}(2au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2} + \frac{a(2m+1)}{m+2}\int u^{m-1}\sqrt{2au - u^2}\, du.$

82. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\, du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a\arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

83. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\, du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

84. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\, du}{u^3} = -\frac{(2au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{3au^3} + C.$

85. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\, du}{u^m} = -\frac{(2au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{a(2m-3)u^m} + \frac{m-3}{a(2m-3)}\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\, du}{u^{m-1}}.$

86. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

87. $\int \frac{du}{\sqrt{2au + u^2}} = L(u + a + \sqrt{2au + u^2}) + C.$

88. $\int F(u, \sqrt{2au + u^2})\, du = \int F(z - a, \sqrt{z^2 - a^2})\, dz,$ که در آن $z = u + a.$

89. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

90. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)\sqrt{2au - u^2}}{2} + \frac{3a^2}{2}\arccos\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$

91. $\int \frac{u^m\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{u^{m-1}\sqrt{2au - u^2}}{m} + \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{u^{m-1}\, du}{\sqrt{2au - u^2}}.$

92. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C.$

93. $\int \frac{du}{u^m\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(2m-1)u^m} + \frac{m-1}{a(2m-1)}\int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{2au - u^2}}.$

94. $\displaystyle\int \frac{du}{(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}} + C.$

95. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}} + C.$

دستورهای کاهش دوجمله‌ای

96. $$\int u^m(a+bu^q)^p\,du = \frac{u^{m-q+1}(a+bu^q)^{p+1}}{b(pq+m+1)} - \frac{a(m-q+1)}{b(pq+m+1)}\int u^{m-q}(a+bu^q)^p\,du.$$

97. $$\int u^m(a+bu^q)^p\,du = \frac{u^{m+1}(a+bu^q)^p}{pq+m+1} + \frac{apq}{pq+m+1}\int u^m(a+bu^q)^{p-1}\,du.$$

98. $$\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^p} = -\frac{1}{a(m-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}} - \frac{b(m-q+pq-1)}{a(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-q}(a+bu^q)^p}.$$

99. $$\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^p} = \frac{1}{aq(p-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}} + \frac{m-q+pq-1}{aq(p-1)}\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^{p-1}}.$$

100. $$\int \frac{du}{u(a+bu^q)} = \frac{1}{aq}\,\mathrm{L}\,\frac{u^q}{a+bu^q} + C.$$

101. $$\int \frac{(a+bu^q)^p\,du}{u^m} = -\frac{(a+bu^q)^{p+1}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(m-q-pq-1)}{a(m-1)}\int \frac{(a+bu^q)^p\,du}{u^{m-q}}.$$

102. $$\int \frac{(a+bu^q)^p\,du}{u^m} = \frac{(a+bu^q)^p}{(pq-m+1)\,u^{m-1}} + \frac{apq}{pq-m+1}\int \frac{(a+bu^q)^{p-1}\,du}{u^m}.$$

103. $$\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^p} = \frac{u^{m-q+1}}{b(m-pq+1)\,(a+bu^q)^{p-1}} - \frac{a(m-q+1)}{b(m-pq+1)}\int \frac{u^{m-q}\,du}{(a+bu^q)^p}.$$

104. $$\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^p} = \frac{u^{m+1}}{aq(p-1)\,(a+bu^q)^{p-1}} - \frac{m+q-pq+1}{aq(p-1)}\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^{p-1}}.$$

انتگرالهای شامل $a + bu \pm cu^2$ $\quad (c > 0)$.

عبارت $a + bu + cu^2$ را می‌توان با تغییر متغیر $u = z - \frac{b}{2c}$، و $k = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}$ به صورت دوجمله‌ای درآورد.

بنابراین $\quad a + bu + cu^2 = c(z^2 - k).$

عبارت $a + bu - cu^2$ را می‌توان با تغییر متغیر $u = z + \frac{b}{2c}$، و $k = \frac{b^2 + 4ac}{4c^2}$ به صورت دوجمله‌ای درآورد.

بنابراین $a + bu - cu^2 = c(k - z^2)$.

105. $$\int \frac{du}{a + bu + cu^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) + C,$$ وقتی $b^2 < 4ac$.

106. $$\int \frac{du}{a + bu + cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \mathrm{L}\left(\frac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + C,$$ وقتی $b^2 > 4ac$.

107. $$\int \frac{du}{a + bu - cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \mathrm{L}\left(\frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cu + b}\right) + C.$$

108. $$\int \frac{(\mathrm{M}u + \mathrm{N})\, du}{a + bu \pm cu^2} = \frac{\pm \mathrm{M}}{2c} \mathrm{L}(a + bu \pm cu^2) + \left(\mathrm{N} \mp \frac{b\mathrm{M}}{2c}\right) \int \frac{du}{a + bu \pm cu^2}.$$

109. $$\int \sqrt{a + bu + cu^2}\, du = \frac{2cu + b}{4c} \sqrt{a + bu + cu^2} - \frac{b^2 - 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \mathrm{L}(2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}) + C.$$

110. $$\int \sqrt{a + bu - cu^2}\, du = \frac{2cu - b}{4c} \sqrt{a + bu - cu^2} + \frac{b^2 + 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \arcsin\left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) + C.$$

111. $$\int \frac{du}{\sqrt{a + bu + cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \mathrm{L}(2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}) + C.$$

112. $$\int \frac{du}{\sqrt{a + bu - cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin\left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) + C.$$

113. $$\int \frac{u\, du}{\sqrt{a + bu + cu^2}} = \frac{\sqrt{a + bu + cu^2}}{c} - \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \mathrm{L}(2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}) + C.$$

114. $$\int \frac{u\, du}{\sqrt{a + bu - cu^2}} = -\frac{\sqrt{a + bu - cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \arcsin\left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) + C.$$

انتگرالهای شامل توابع جبری دیگر

115. $$\int \sqrt{\frac{a + u}{b + u}}\, du = \sqrt{(a + u)(b + u)} + (a - b) \mathrm{L}(\sqrt{a + u} + \sqrt{b + u}) + C.$$

116. $$\int \sqrt{\frac{a - u}{b + u}}\, du = \sqrt{(a - u)(b + u)} + (a + b) \arcsin\sqrt{\frac{u + b}{a + b}} + C.$$

117. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b-u}}\,du = -\sqrt{(a+u)(b-u)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-u}{a+b}} + C.$

118. $\int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = -\sqrt{1-u^2} + \arcsin u + C.$

119. $\int \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{u-a}{b-a}} + C.$

انتگرالهای شامل توابع نمائی ولگاریتمی

120. $\int e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a} + C.$

121. $\int b^{au}.du = \frac{b^{au}}{a\,\mathrm{L}\,b} + C.$

122. $\int u\,e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au-1) + C.$

123. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du.$

124. $\int u^n b^{au}\,du = \frac{u^n b^{au}}{a\mathrm{L}b} - \frac{n}{a\mathrm{L}b}\int u^{n-1}b^{au}\,du.$

125. $\int \frac{b^{au}\,du}{u^n} = -\frac{b^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a\mathrm{L}b}{n-1}\int \frac{b^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

126. $\int \mathrm{L}u\,du = u\mathrm{L}u - u + C.$

127. $\int u^n\mathrm{L}u\,du = u^{n+1}\left[\frac{\mathrm{L}u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

128. $\int u^m\mathrm{L}^n u\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\mathrm{L}^n u - \frac{n}{m+1}\int u^m\mathrm{L}^{n-1}u\,du.$

129. $\int e^{au}\,\mathrm{L}u\,du = \frac{e^{au}\mathrm{L}u}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{au}}{u}du.$

130. $\int \frac{du}{u\,\mathrm{L}u} = \mathrm{L}(\mathrm{L}u) + C.$

انتگرالهای شامل توابع مثلثاتی

اگر انتگرالی شامل $\operatorname{tg} u$ ، $\operatorname{cotg} u$ ، $\sec u$ یا $\operatorname{cosec} u$ باشد ولی بصورت هیچ یك از نمونه‌های زیر نباشد، نخست از روابط زیراستفاده می‌کنیم :

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u},\qquad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\sin u},\qquad \sec u = \frac{1}{\cos u},\qquad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}.$$

131. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

132. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

133. $\int \mathrm{tg}\, u\, du = -\mathrm{L} \cos u + \mathrm{C} = \mathrm{L} \sec u + \mathrm{C}.$

134. $\int \mathrm{cotg}\, u\, du = \mathrm{L} \sin u + \mathrm{C}.$

135. $\int \sec u\, du = \int \frac{du}{\cos u} = \mathrm{L}(\sec u + \mathrm{tg}\, u) + \mathrm{C}.$
$= \mathrm{L}\, \mathrm{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{C}.$

136. $\int \mathrm{cosec}\, u\, du = \int \frac{du}{\sin u} = \mathrm{L}(\mathrm{cosec}\, u - \mathrm{cotg}\, u) + \mathrm{C}$
$= \mathrm{L}\, \mathrm{tg} \frac{u}{2} + \mathrm{C}.$

137. $\int \sec^2 u\, du = \mathrm{tg}\, u + \mathrm{C}.$

138. $\int \mathrm{cosec}^2 u\, du = -\mathrm{cotg}\, u + \mathrm{C}.$

139. $\int \sec u\, \mathrm{tg}\, u\, du = \sec u + \mathrm{C}.$

140. $\int \mathrm{cosec}\, u\, \mathrm{cotg}\, u\, du = -\mathrm{cosec}\, u + \mathrm{C}.$

141. $\int \sin^2 u\, dv = \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u + \mathrm{C}.$

142. $\int \cos^2 u\, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u + \mathrm{C}.$

143. $\int \cos^n u \sin u\, du = -\frac{\sin^{n+1} u}{n+1} + \mathrm{C}.$

144. $\int \sin^n u \cos u\, du = \frac{\sin^{n+1} u}{n+1} + \mathrm{C}.$

145. $\int \sin mu \sin nu\, du = -\frac{\sin (m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)u}{2(m-n)} + \mathrm{C}.$

146. $\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{\sin (m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)u}{2(m-n)} + \mathrm{C}.$

147. $\int \sin mu \cos nu\, du = -\frac{\cos (m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)u}{2(m-n)} + \mathrm{C}.$

148. $\int \frac{du}{1 + \cos a \cos u} = 2 \,\mathrm{cosec}\, a \,\mathrm{arc\,tg} \left(\mathrm{tg} \frac{a}{2}\, \mathrm{tg} \frac{u}{2}\right) + \mathrm{C}.$

149. $\int \frac{du}{\cos a + \cos u} = \mathrm{cosec}\, a\, \mathrm{L} \frac{1 + \mathrm{tg} \frac{a}{2}\, \mathrm{tg} \frac{u}{2}}{1 - \mathrm{tg} \frac{a}{2}\, \mathrm{tg} \frac{u}{2}} + \mathrm{C} \quad \left(\mathrm{tg}^2 \frac{u}{2} < \mathrm{cotg}^2 \frac{a}{2}\right)$
$= 2 \,\mathrm{cosec}\, a \,\mathrm{arg\,th} \left(\mathrm{tg} \frac{a}{2}\, \mathrm{tg} \frac{u}{2}\right) + \mathrm{C} \left(\mathrm{tg}^2 \frac{u}{2} < \mathrm{cotg}^2 \frac{a}{2}\right).$

150. $\int \frac{du}{1 + \cos a \sin u} = 2 \,\mathrm{cosec}\, a \,\mathrm{arc\,tg} \left(\mathrm{cosec}\, a\, \mathrm{tg} \frac{u}{2} + \mathrm{cotg}\, a\right) + \mathrm{C}.$

151. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos a + \sin u} = \operatorname{cosec} a \, \mathrm{L} \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}\frac{u}{2} - \sec a}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \sec a} + C.$

$\left[\left(\operatorname{cotg} a \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \operatorname{cosec} a\right)^2 < 1\right]$

$\displaystyle = -2 \operatorname{cosec} a \operatorname{arg\,th}\left(\operatorname{cotg} a \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \operatorname{cosec} a\right) + C.$

$\left[\left(\operatorname{cotg} a \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \operatorname{cosec} a\right)^2 < 1\right].$

152. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b \operatorname{tg} u}{a}\right) + C.$

153. $\displaystyle\int e^{au} \sin nu \, du = \frac{e^{au}(a \sin nu - n \cos nu)}{a^2 + n^2} + C.$

154. $\displaystyle\int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}(n \sin nu + a \cos nu)}{a^2 + n^2} + C.$

155. $\displaystyle\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C.$

156. $\displaystyle\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C.$

دستورهای کاهش مثلثاتی

157. $\displaystyle\int \sin^n u \, du = -\frac{\sin^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u \, du.$

158. $\displaystyle\int \cos^n u \, du = \frac{\cos^{n-1} u \sin u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u \, du.$

159. $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^n u} = -\frac{\cos u}{(n-1)\sin^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\sin^{n-2} u}.$

160. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{\sin u}{(n-1)\cos^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^{n-2} u}.$

161. $\displaystyle\int \cos^m u \sin^n u \, du = \frac{\cos^{m-1} u \sin^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} u \sin^n u \, du.$

162. $\displaystyle\int \cos^m u \sin^n u \, du = -\frac{\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m u \sin^{n-2} u \, du.$

163. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^m u \sin^n u} = \frac{1}{(m-1)\sin^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{du}{\cos^{m-2} u \sin^n u}.$

164. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^m u \sin^n u} = \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^m u \sin^{n-2} u}.$

165. $\displaystyle\int \frac{\cos^m u \, du}{\sin^n u} = -\frac{\cos^{m+1} u}{(n-1)\sin^{n-1} u} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m u \, du}{\sin^{n-2} u}.$

166. $\displaystyle\int \frac{\cos^m u \, du}{\sin^n u} = \frac{\cos^{m-1} u}{(m-n)\sin^{n-1} u} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} u \, du}{\sin^n u}.$

167. $$\int \frac{\sin^n u\,du}{\cos^m u} = \frac{\sin^{n+1} u}{(m-1)\cos^{m-1} u} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n u\,du}{\cos^{m-2} u}.$$

168. $$\int \frac{\sin^n u\,du}{\cos^m u} = -\frac{\sin^{n-1} u}{(n-m)\cos^{m-1} u} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} u\,du}{\cos^m u}.$$

169. $$\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du.$$

170. $$\int \operatorname{cotg}^n u\,du = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\,du.$$

171. $$\int e^{au}\cos^n u\,du = \frac{e^{au}\cos^{n-1} u\,(a\cos u + n\sin u)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au}\cos^{n-2} u\,du.$$

172. $$\int e^{au}\sin^n u\,du = \frac{e^{au}\sin^{n-1} u\,(a\sin u - n\cos u)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au}\sin^{n-2} u\,du.$$

173. $$\int u^m \cos au\,du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(au\sin au + m\cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2}\cos au\,du.$$

174. $$\int u^m \sin au\,du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(m\sin au - au\cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2}\sin au\,du.$$

توابع مثلثاتی معکوس

175. $$\int \operatorname{arc\,sin} u\,du = u\operatorname{arc\,sin} u + \sqrt{1-u^2} + C.$$

176. $$\int \operatorname{arc\,cos} u\,du = u\operatorname{arc\,cos} u - \sqrt{1-u^2} + C.$$

177. $$\int \operatorname{arc\,tg} u\,du = u\operatorname{arc\,tg} u - L\sqrt{1+u^2} + C.$$

178. $$\int \operatorname{arc\,cotg} u\,du = u\operatorname{arc\,cotg} u + L\sqrt{1+u^2} + C.$$

179. $$\int \operatorname{arc\,sec} u\,du = u\operatorname{arc\,sec} u - L\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) + C.$$
$$= u\operatorname{arc\,sec} u - \operatorname{arg\,ch} u + C.$$

180. $$\int \operatorname{arc\,cosec} u\,du = u\operatorname{arc\,cosec} u + L\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) + C.$$
$$= u\operatorname{arc\,cosec} u + \operatorname{arg\,ch} u + C.$$

توابع هذلولی

181. $$\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C.$$

182. $$\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C.$$

183. $$\int \operatorname{th} u\,du = L\operatorname{ch} u + C.$$

184. $$\int \operatorname{coth} u\,du = L\operatorname{sh} u + C$$

185. $\int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{sh} u) + C = \operatorname{gd} u + C.$

186. $\int \operatorname{cosech} u\, du = \mathrm{L}\, \operatorname{th} \frac{u}{2} + C.$

187. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{th} u + C.$

188. $\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\coth u + C.$

189. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{th} u\, du = -\operatorname{sech} u + C.$

190. $\int \operatorname{cosech} u \coth u\, du = -\operatorname{cosech} u + C.$

191. $\int \operatorname{sh}^2 u\, du = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2u - \frac{u}{2} + C.$

192. $\int \operatorname{ch}^2 u\, du = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2u + \frac{u}{2} + C.$

193. $\int \operatorname{th}^2 u\, du = u - \operatorname{th} u + C.$

194. $\int \coth^2 u\, du = u - \coth u + C.$

195. $\int u \operatorname{sh} u\, du = u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u + C.$

196. $\int u \operatorname{ch} u\, du = u \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u + C.$

197. $\int \arg \operatorname{sh} u\, du = u \arg \operatorname{sh} u - \sqrt{1 + u^2} + C.$

198. $\int \arg \operatorname{ch} u\, du = u \arg \operatorname{ch} u - \sqrt{u^2 - 1} + C.$

199. $\int \arg \operatorname{th} u\, du = u \arg \operatorname{th} u + \frac{1}{2} \mathrm{L} (1 - u^2) + C.$

200. $\int \arg \coth u\, du = u \arg \coth u + \frac{1}{2} \mathrm{L} (1 - u^2) + C.$

201. $\int \arg \operatorname{sech} u\, du = u \arg \operatorname{sech} u + \operatorname{gd} (\arg \operatorname{th} u) + C.$

$= u \arg \operatorname{sech} u + \arcsin u + C.$

202. $\int \arg \operatorname{cosech} u\, du = u \arg \operatorname{cosech} u + \arg \operatorname{sh} u + C.$

203. $\int \operatorname{sh} mu \operatorname{sh} nu\, du = \frac{\operatorname{sh} (m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\operatorname{sh} (m-n)u}{2(m-n)} + C. \quad (m \gtrless n).$

204. $\int \operatorname{ch} mu \operatorname{ch} nu\, du = \frac{\operatorname{sh} (m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sh} (m-n) u}{2(m-n)} + C. \quad (m \gtrless n)$

205. $\int \operatorname{sh} mu \operatorname{ch} nu\, du = \frac{\operatorname{ch} (m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{ch}(m-n)u}{2(m-n)} + C. \quad (m \gtrless n).$

206. $\int \frac{du}{\text{ch}\, a + \text{ch}\, u} = 2 \text{ cosech}\, a . \arg \text{th} \left(\text{th}\, \frac{u}{2} \text{th}\, \frac{a}{2}\right) + C.$

207. $\int \frac{du}{\cos a + \text{ch}\, u} = 2 \text{ cosec}\, a .\ \text{arc tg} \left(\text{th} \frac{u}{2} \text{ tg} \frac{a}{2}\right) + C.$

208. $\int \frac{du}{1 + \cos a\, \text{ch}\, u} = 2 \text{ cosec}\, a . \arg \text{th} \left(\text{th} \frac{u}{2} \text{tg} \frac{a}{2}\right) + C. \left(\text{tg}^2 \frac{u}{2} < \text{cotg}^2 \frac{a}{2}\right)$

209. $\int e^{au} \text{ sh}\, nu\, du = \frac{e^{au}(a \text{ sh}\, nu - n \text{ ch}\, nu)}{a^2 - n^2} + C.$

210. $\int e^{au} \text{ ch}\, nu\, du = \frac{e^{au}(a \text{ ch}\, nu - n \text{ sh}\, nu)}{a^2 - n^2} + C.$

معادلات دیفرانسیل

در دستورهای زیر A و B و α مقادیر ثابت و دلخواهی را نشان میدهند .

۱ ـ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نوسانی عبارتست‌از :

$$\frac{d^۲s}{dt^۲} + k^۲s = ۰$$

جواب عمومی آن را میتوان به صورتهای زیر نوشت :

(a) $$s = Ae^{kti} + Be^{-kti}$$

(b) $$s = A \cos kt + B \sin kt$$

(c) $$s = A \cos (kt + \alpha)$$

(d) $$s = A \sin (kt + \alpha)$$

۲ ـ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نوسانی کاهنده عبارتست از :

$$\frac{d^۲s}{dt^۲} + ۲\mu \frac{ds}{dt} + k^۲s = ۰ \quad , \quad \mu < k$$

جواب عمومی آن به صورت زیر است :

$$s = e^{-\mu t} (A \cos \sqrt{k^۲ - \mu^۲}\ t + B \sin \sqrt{k^۲ - \mu^۲}\ t)$$

یا

$$s = e^{-\mu t} \cos (\sqrt{k^۲ - \mu^۲}\ t + \alpha)$$

۳- معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نوسانی فزاینده به یکی از دو صورت (a) یا (b) است :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = L\cos nt + M\sin nt \qquad (n \neq k) \tag{a}$$

جواب عمومی آن عبارتست از :

$$s = A\cos kt + B\sin kt + \frac{L}{k^2 - n^2}\cos nt + \frac{M}{k^2 - n^2}\sin nt$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = L\cos kt + M\sin kt \tag{b}$$

جواب عمومی آن عبارتست از :

$$s = A\cos kt + B\sin kt + \frac{L}{2k}t\sin kt - \frac{M}{2k}t\cos kt$$

فهرست الفبایی

ق

ک

گ

ل

م

ن

و ـ ه