چگونه مانند یک ریاضیدان بیاندیشیم؟

نویسنده:
کوین هوستون دانشگاه لیدز

مترجم:
گروه ریاضی دانشگاه شاهد

تابستان ۱۳۸۸

به نام دوست که هر چه هست از اوست

فهرست مطالب

تقدیم به دانشجویان ریاضی

ترجمه این اثر ارزشمند و کاربردی را به همه دانشجویان عزیز رشته ریاضی کشورمان ایران اسلامی تقدیم می کنیم و مطالعه آن را به همه علاقه مندان به ریاضی توصیه می نماییم. امیدواریم انتشار این اثر در اعتلای ریاضی کشورمان، هر چند کوچک، موثر باشد.

در ترجمه و تهیه این کتابچه، افراد بسیاری، از جمله دانشجویان درس زبان تخصصی ترم دوم ۱۳۸۷ ، به ویژه آقای سجاد کاکو نقش داشته اند. همچنین آقای میثم امیری تایپ اولیه این اثر را به عهده داشته اند. صمیمانه از این عزیزان تشکر می کنیم و برای آن ها آرزوی موفقیت و سربلندی داریم.

ترجمه این اثر در هفتمین روز از ماه مبارک رمضان سال ۱۴۳۰ مصادف با ششم شهریور ماه ۱۳۸۸ به اتمام رسید. به امید این که در پرتوی برکات این ماه مبارک، روح تقوی، تعهد و تخصص در جامعه هر چه بیشتر دمیده شود و شاهد ایرانی آباد و شاد باشیم.

فصل ۱

توصیه های عمومی

خوش آمدید

مطالعه ریاضی در دانشگاه، نیازمند مهارت های مطالعاتی است که برای شما تازگی دارند. در این متن، از مهارت های عمومی مطالعه که البته برای موفقیت لازم هستند، همچون مدیریت زمان، نکته برداری، تکنیک امتحان دادن و غیره صحبت نمی کنیم: به این ها در جایی دیگر پرداخته می شود.

وقتی شما فارغ التحصیل می شوید، می خواهیم که شما مانند یک ریاضیدان فکر کنید و بنابراین هدف من، ارائه کتابچه ای لبریز از توصیه های کاربردی و راهنمایی های مفید به شما است که چگونه مهارت های مشخصی را کسب کنید تا مانند یک ریاضیدان فکر کنید. چقدر دوست داشتم وقتی دانش آموز بودم این توصیه ها را کسی به من می گفت.

بعضی از نکات پیچیده هستند، و برخی از آن ها را وقتی بشنوید، واضح به نظر می رسند. بعضی از توصیه ها، شامل افکار ریاضیِ سطح بالا هستند و برای یک مبتدی، بسیار پیچیده خواهند بود. بنابراین نگران نباشید، اگر همه را بلافاصله متوجه نشدید.

چگونه از این متن استفاده کنیم؟

این کتابچه شامل اطلاعات بسیاری است، اما مجبور نیستید که همه را در اولین روزی که اینجا هستید، بخوانید. در واقع، اصلا مجبور نیستید که آن را بخوانید. به یقین می توانید بدون آن نیز

زندگی کنید. بعضی از آنها را می توانید حذف کنید. شما اکنون در دانشگاه هستید، بنابراین انتخاب با شما است.

در حدود ۱۸۰[1] صفحه متن وجود دارد و یک ترم تحصیلی تقریبا ۲۰ هفته است. محاسباتش را خودتان انجام بدهید! توصیه من این است که یک دفعه این کتاب را نخوانید. اگر مطالعه کل کتابچه با جزئیات برای شما ممکن نیست، در این صورت می توانید عنوان ها و قسمت های خلاصه هر قسمت را مطالعه کنید که حاوی اطلاعات مفیدی می باشند.

از کجا شروع کنیم؟

شما باید راه خود را از بین مطالب پیدا کنید، اما یک جای خوب برای شروع، بخش ۳ (*نوشتن ریاضیات*) است چونکه به شما در نوشتن و به اصطلاح راه افتادن دستتان کمک خواهد کرد.

بخش ۴ با عنوان *چگونه مسائل را حل کنیم*، زمانی که نیاز به حل مسائل دارید، مفید واقع خواهد شد. به طور خاص، اگر درحال خواندن ریاضی عمومی یک[2] باشید، این بخش می تواند مفید باشد.

بخش ۷ با عنوان *چگونه یک اثبات را بخوانیم* مهم است. در ریاضی دانشگاهی، فهمیدن اثبات ها لازم است و این همان چیزی است که دانشجویان در زمان ورود با آن ناآشنا هستند. اگرچه این بخش نیاز به پختگی بیشتری دارد، بسیاری از آن تا زمانی که مقداری از درس مبانی ریاضی[3] را نخوانده باشید، موثر نیست.

چند توصیه عمومی

به خودتان بستگی دارد- به احتمال زیاد، اَعمال شما بهترین تعیین کننده بازده مطالعاتتان در دانشگاه [لیدز] است. این ضرب المثل باستانی را در نظر بگیرید: معلم می تواند درب را باز کند، اما شما باید خودتان وارد شوید.

[1] متن به زبان اصلی دارای ۴۰ صفحه است.
[2] مولف درس ریاضی ۱۹۱۰ – به معنای مدل سازی و تحقیقات در دانشگاه لیدز را در متن اصلی آورده است.
[3] مولف در متن اصلی درس ریاضی ۱۲۰۱ - یعنی ساختارهای ریاضی در دانشگاه لیدز را آورده است.

فعال باشید- جزوات و کتاب ها را بخوانید و سعی کنید سوالات مطرح شده در آن ها را حل کنید.

به طور مستقل فکر کنید- این همیشه یک توصیه خوب است.

هر چیزی را بپرسید- به نتایجی که به شما ارائه می شود، مشکوک باشید. تا وقتی که مطمئن نشدید درستی آن ها را باور دارید، آن ها را قبول نکنید.

مشاهده کنید - توانایی شرلوک هولمز به خاطر استتنتاج او نبود بلکه به خاطر مشاهداتش بود.

خود را برای اشتباه کردن، آماده کنید - اغلب اوقات به شما گفته می شود که اشتباه می کنید. نا امید نشوید، ریاضی سخت است اما جوایزش عالی است.

حفظ نکنید – سعی کنید بفهمید- حفظ کردن چیزی که به درستی فهمیده اید، واقعاً آسان است.

شهود خود را توسعه دهید- اما به آن اعتماد نکنید.

همکاری کنید- با دانشجویان دیگر برای درک مفهوم همکاری کنید. این جا خبری از مسابقه نیست. البته از آن ها کپی نکنید.

انعکاس دهید- به عقب نگاه کنید و ببینید چه یاد گرفته اید. از خودتان بپرسید که چگونه می توانید بهتر انجام دهید.

تشکر

از افراد مختلفی که نظرات مفیدشان را در نسخه قبلی ابراز نمودند، تشکر می کنم، به ویژه از پروفسور دیلز و رابسون، دکتر کلوکو و سلومسون و نیز کیتی میلز و راشل اسمیت. لطفا نظر و پیشنهاد دهید[۴]. اگر هر نظر، انتقاد، پیشنهادی دارید یا ذره ای اشتباه می بینید، به من ایمیل بزنید: k.houston@leeds.ac.uk

کوین هوستون سپتامبر ۲۰۰۴ [۵]

[۴]به دانشجویان گرامی توصیه می کنیم در مورد مطالب این کتابچه با استاد راهنمای خود مشورت کنید و از او راهنمایی های تکمیلی را دریافت کنید.

[۵]انتشارات کمبریج، ویراست نهایی این کتابچه را در سال ۲۰۰۹ با همین عنوان چاپ و منتشر کرده است.

فصل ۲

خواندن ریاضیات

در این بخش، به قواعد اساسی خواندن ریاضیات می پردازیم. بسیاری از کتاب های مهارت های مطالعه، نکات مفیدی در بهبود مهارت های خواندن ارائه می دهند، اما بسیاری از مطالب، مربوط به یک ریاضیدان نمی شود و به مطالب اصلی تر پرداخته نمی شود. مثلاً، نکات مربوط به تندخوانی به مطالعه متون ریاضی مربوط نیست، زیرا این روش در مطالعه متون ریاضی کارا نیست. ریاضی به ندرت زیاده نویسی دارد، صفات اضافی کمی دارد. هر حرف و هر علامت مهم است و حذف آن ها باعث تولید مفهومی غیر قابل درک یا نادرست می شود.

نکاتی که اینجا ارائه شده اند، شامل روشی سیستماتیک برای تجزیه کردن کار به بخش های قابل هضم، یا پیشنهادهای کاربردی است، و نه لیستی خشک از دستورعمل ها. نکته مهم این است که در عادات خواندن باید انعطاف پذیر باشید و خواندن باید یک فرآیند پویا باشد. باید یک خواننده فعال باشید. یعنی این که با خودکار و کاغذ در دست برای بررسی متن و تشخیص درستی ادعاهای نویسنده کار کنید و به هیچ وجه مانند یک خواننده بی تفاوت نباشید.

نکاتی در مورد انتخاب و استفاده از کتب وجود دارد و در عین حال اکثر آن ها در مورد خواندن جزوات درسی نیز به کار می روند. نکاتی در مورد وضعیت های مشخص مثل خواندن یک تعریف، قضیه یا اثبات در بخش های بعدی شرح داده می شود.

۱.۲ پیشنهادهای اساسی خواندن

با هدف بخوانید

هدف اصلی خواندن، یادگیری است اما ممکن است هدف ما ادغام کردن، شفاف سازی یا ارائه خلاصه ای از مطالب نیز باشد. قبل از خواندن، باید دقیقاً مشخص کنیم که از متن چه خواسته شده است. هدف، ممکن است یادگیری یک تعریف مشخص یا چگونگی حل نوع مشخصی از یک مسئله مثل محاسبه انتگرال حاصل ضرب دو تابع باشد. دلیل هرچه باشد، مهم این است که با امید اینکه همه چیز در حین مطالعه روشن خواهد شد، شروع به خواندن نکنیم.

کتابی در سطح درست انتخاب کنید

بعضی کتاب ها به خوبی نوشته نشده اند و بعضی هم برای سبک یادگیری شما مناسب نیستند. به هر حال، اگر کتابی را انتخاب کردید، آنگاه این مهم است که دو نکتهٔ به هم مرتبط را در خاطر داشته باشید. هر کتاب برای یک خواننده و هدفی خاص نوشته شده است. ممکن است شما خواننده و هدف کتابی نباشید که می خواهد به یک مبتدی بیاموزد یا به عنوان مرجع برای متخصصانی به کار رود که با شما همخوانی ندارند. با وجود این، نیازی نیست که از کتاب های پیشرفته دوری کنید. برای یادداشت برداری و سطح مفاهیم فرض شده، یک کتاب پیشرفته تر می تواند شامل خلاصه مفیدی از یک موضوع در بخش های ابتدایی خودش باشد.

فعال باشید

با یک خودکار و کاغذ در دست به مطالعه بپردازید. اولین دلیل برای استفاده از یک خودکار و کاغذ در دست، این است که باید از آنچه می خوانید، نکته برداری کنید - به طور مشخص از معنای لغات و اصطلاحات تخصصی و نه ظاهر آن ها– و ایده هایی را که برای خودتان ایجاد می شود، ثبت کنید. در اولین بار که متن را می خوانید، نکته برداری نکنید چرا که مطالب زیادی را بدون آنکه آن ها را بفهمید، کپی برداری می کنید. هدفِ خواندن، فهمیدن است و مفید است که آنچه را می فهمید، ثبت کنید و اینکه چگونه به آنچه در حال حاضر می دانید، مرتبط است.

دلیل دوم مهمتر است. می توانید قضیه ها و فرمول ها را با به کارگیری در مثال ها، بررسی کنید، شکل بکشید و تمرین هایی را خودتان مطرح کنید. خواندن با خودکار و کاغذ در دست در این مرحله، شامل استفاده از ماژیک های فلورسنت نیست. تمایل معمول این است که هر چیزی را علامت بزنیم. بنابراین، اگر مجبور هستید که از آن ها استفاده کنید، تا زمان خلاصه کردن متن صبر کنید.

متن را مثل یک رمان نخوانید

اولین نکته قابل توجه خواندن این است که نباید ریاضی را مثل یک رمان خواند. مجبور نیستید که از ابتدا تا انتها را به یک باره بخوانید یا مطالب را با همان ترتیب ظاهر شده در کتاب بخوانید. قابل قبول این است که در آن فرو بروید و بیرون بیایید، موارد مرتبط با موضوع مورد مطالعه خودتان را بخوانید. ممکن است که از یک صفحه به صفحه ای دیگر جهش کنید. شاید تعجب آور باشد که با وجود این که ریاضی یک موضوع خطی است و مطالب بر روی مطالب قبلی ساخته می شوند، اما روش یادگیری ما خطی نیست و همچنین مفاهیم نیز به صورت خطی تولید نمی شوند. رد پاهای پیشکسوتان و متخصصان یک موضوع به دست شاگردان آن ها پاک می شوند تا آن موضوع به نحوی بیان شود که قابل فهم و استفاده برای عموم شود.

همچنین، تقریبا غیرممکن است که همه جزئیات را در اولین بار بفهمید. ممکن است مجبور شوید که متون مشخصی را چندین بار بخوانید تا معنی درستشان آشکار شود.

۲.۲ یک روش سیستماتیک

حال یک روش سیستماتیک برای مطالعه متون طولانی را خلاصه وار بیان می کنیم. این طرح شامل پنج نکته است:

۱ - نگاه اجمالی بیندازید و مشخص کنید که چه چیز مهم است.

۲ - سوال بپرسید.

۳- به دقت بخوانید. ابتدا ادعاها را بخوانید- اثبات ها را بعداً.

۴- فعال باشید. این شامل بررسی متن و انجام تمرین ها می باشد.

۵- انعکاس دهید.

این روش، ساده ترین روش مطالعه است که با وجود اینکه شماره گذاری شده، نیازی به رعایت بی چون و چرای ترتیب آن نیست. باید انعطاف پذیر باشید و با توجه به وضعیت، از بخشی به بخش دیگری بپرید.

نگاه اجمالی بیندازید

ابتدا نگاه مختصری به متن بیندازید تا یک دید کلی پیدا کنید. در کتاب های مهارت های مطالعه، اغلب گفته می شود که بخش های ابتدایی و انتهایی را برای دریافت نتایج نهایی بخوانید. معمولاً این کار در کتاب های ریاضی جواب نمی دهد، چرا که موضوعات ریاضی اینگونه خلاصه نمی شوند، اما ارزش امتحان را دارد.

تعیین کنید چه چیزی مهم است

در خواندن دقیق تر اما نه با مطالعه جزئیات خیلی دقیق، نکات مهم را مشخص کنید. باید دنبال فرضیات، تعریف ها، قضیه ها و مثال هایی که دوباره و چند باره استفاده می شوند، باشید؛ چرا که اینها کلید روشن شدن موضوع هستند. بنابراین، اگر همان تعریف به طور پیاپی در عبارات ظاهر می شود، مهم است، پس آن را به خوبی یاد بگیرید. دنبال قضیه ها و فرمول هایی بگردید که به شما اجازه می دهد چیزی را محاسبه کنید.معمولاً محاسبه، یک راه برای درک یک موضوع است. همینگ[1]، یکی از بزرگان کامپیوتر در جایی گفته است، هدف از محاسبات، اعداد نیست، بلکه دستیابی به یک نوع بینش است.

سوال بپرسید

در این قسمت، مطرح کردن سوالاتی درباره متن مفید است، مثلا چرا این نظریه به این تعریف یا قضیه مشخص بستگی دارد؟ نتیجه مهم که متن ما را به آن می برد، چیست و چگونه ما را آنجا می برد؟ از سوال هایتان، می توانید لیستی مشروح از چیزی که از متن انتظار دارید، بسازید.

---
[1] Hamming

دقیق خوانی

حالا زمانی است که باید دقیق خوانی را صورت دهید. این کار باید سیستماتیک و همراه با تفکر، انجام تمرین و حل مسائل باشد.

مطالعه، چیزی بیشتر از خواندن کلمات است، باید به معنای آن ها فکر کنید[۲]. به طور مشخص، مطمئن شوید که معنی هر کلمه و هر علامت را می دانید. اگر نمی دانید یا فراموش کرده اید، مرور کنید و پیدا کنید.

معمولاً اگر مشاهده کنید، بهتر به یاد می آورید، پس به دقت فرضیات قضیه ها را مشاهده کنید. ادعاها و احکام بیان شده را دسته بندی کنید، آیا آن ها محاسباتی، استنتاج یا فرضیات یا ...هستند؟

گاهی متوقف شوید تا مرور کنید

سعی نکنید در هر بار مطالعه، مطالب بسیار بخوانید. گاهی برای مرور توقف کنید و درباره متن تفکر کنید. به تفکر درباره ایده و تصویرکلی مطالب، این که به کجا می رویم و این که چگونه یک نتیجه مشخص ما را به آنجا می برد، ادامه دهید.

ابتدا ادعاها و احکام را بخوانید – بعداً اثبات ها را

بسیاری از متون ریاضی به گونه ای نوشته شده اند که در یک مطالعه اولیه می توان از اثبات ها صرف نظر کرد. این به این معنا نیست که اثبات ها مهم نیستند. آن ها در قلب ریاضی قرار دارند، اما معمولاً – نه همیشه – می شود بعداً آن ها را خواند. البته در جایی از مطالعات خود **باید** با اثبات ها در گیر شوید.

متن را بررسی کنید

چرا به خودکار و کاغذ نیاز دارید؟ دو دلیل وجود دارد. اولاً، برای پر کردن شکاف هایی که به وسیله نویسنده باقی مانده است. اغلب عباراتی مثل "با یک محاسبه مستقیم" یا "جزئیات به خواننده واگذار می شود" در کتاب ها مشاهده می شود. در این موقع، آن محاسبه را انجام دهید یا

[۲] در واقع باید توخوانی بکنید و نه روخوانی. م.

آن جزئیات را بسازید.

دلیل دوم این است که ببینیم چگونه قضایا، فرمول ها و غیره به کار می روند. اگر متن می گوید که قضیه ۳.۵ یا معادله Y را استفاده کنید، بررسی کنید که می توان قضیه ۳.۵ را به کار برد یا بررسی کنید در این وضعیت، چه اتفاقی برای معادله Y می افتد. فرمول را بررسی کنید و شکاک باشید – به سادگی حرف های نویسنده را قبول نکنید.

مسئله و تمرین حل کنید

اکثر کتاب های جدید ریاضی تمرین و مسئله دارند. کم اهمیت جلوه دادن نقش و جایگاه حل مسئله و تمرین در ریاضیات، سخت است. ریاضی یک فعالیت است. خودتان را در حال **انجام** ریاضی تصور کنید نه در حال مطالعه آن. فرض کنید شما دارای عضله ریاضی هستید. برای رشد آن، نیاز به تمرین کردن دارید. خواندن منفعل، مثل تماشای شخصی دیگر است که با وزنه کار می کند. این کار عضلات شما را نمی سازد – مجبور هستید که تمرین کنید. علاوه بر این، صِرف این که شما چیزی را خواندید، به معنای درست فهمیدن آن نیست. پاسخ دادن به تمرین ها و مسائل، تصورات غلط و سوء تعبیرها را مشخص می کند. حتی می توانید تمرین های خودتان را مطرح سازید.

انعکاس دهید

برای درک کامل چیزی، نیاز داریم تا آن را با آنچه که در حال حاضر می دانیم، ارتباط دهیم. آیا این با چیز دیگری متناظر است؟ چه چیزی به ما می گوید که مطلب دیگر نمی گوید؟

۳.۲ بعد از آن، چه کار کنیم

دوباره و دوباره نخوانید، پیش بروید

بعید است که خواندن زیاد یک متن پیچیده و مشکل، منجر به فهمیدن آن شود. اگر دارید دوباره

خوانی می کنید، احتمالاً نشانه این است که فعال نیستید. باید دنبال روش دیگری مثل مراجعه به کتابی دیگر باشیم. در نهایت، قابل قبول است که صرف نظر کنیم و به قسمت بعدی برویم. همیشه می توانید برگردید.

با رفتن به قسمت های بعدی، ممکن است احساس دشواری در درک مفاهیم بعدی داشته باشید، اما این امکان نیز وجود دارد که آن متن پیچیده با واضح شدن چند قسمت مهم بعدی، خود نیز روشن شود.

یک خلاصه بنویسید

ممکن است مفهومی بعد از اینکه خواندید، واضح به نظر برسد. اما آیا در زمان های بعدی نیز به همین روشنی خواهد بود؟ حال زمان خوبی است که یک خلاصه با کلمات خودتان بنویسید. این کار باعث تسهیل کار در هنگام تجدید نظر و بازخوانی می شود.

حالا – فقط همین حالا – اجازه دارید از یک ماژیک فلورسنت استفاده کنید.

بیشتر انعکاس دهید

با وجود این که ریاضی به نظر یک موضوع خطی می آید، ایده ای بر روی ایده های دیگر بنا می شود، اما ریاضی شامل شبکه ای از اتصال های درونی بین ایده ها و موضوعات است. به این که چگونه یک مطب جدید در این شبکه قرار می گیرد، بیشتر فکر کنید.

به موضوعات بعدی فکر کنید. اگر بدانیم که یک موضوع چه کاربردی دارد و بتوانیم ارتباط آن را با موضوعات دیگر ببینیم، به خوبی آن موضوع را یاد می گیریم.

ساختار کلی مطلب را تحلیل کنید و بپرسید که آیا ممکن بود با ترتیب دیگری عرضه شود. دیدن دورنما و رویکردی دیگر، تمرین مفیدی است که به فهمیدن کمک می کند. به کتاب های مختلف برای نقطه نظرهای متفاوت نگاه کنید. آیا قضیه ها و تعاریف متفاوتند؟ آیا اثبات ها، دقیق ترند یا دقت کمتری دارند؟ بعد از آن از خودتان بپرسید که آیا آنچه را که می خواستید، از متن گرفته اید؟ آنچه را فهمیده اید با سوالاتی که قبل از مرحله دقیق خوانی داشتید، مقایسه کنید. مسئله مهم این است که از خودتان بپرسید، چه چیزی یاد گرفته اید؟

۴.۲ خلاصه

- با هدف بخوانید.
- فعالانه بخوانید. خودکار و کاغذ با خود داشته باشید.
- مجبور نیستید که به ترتیب کتاب را بخوانید اما از روی قاعده بخوانید.
- سوال بپرسید.
- ابتدا، تعریف ها، قضیه ها و مثال ها را بخوانید. اثبات ها می توانند بعداً آورده شوند.
- متن را با به کارگیری فرمول ها و غیره بررسی کنید.
- تمرین و مسئله حل کنید.
- اگر گیر افتادید، ادامه بدهید.
- یک خلاصه بنویسید.
- آنچه که یاد گرفته اید را بازتاب دهید.
- راه های تشریحی بیشتر خواندن، در بخش های بعدی آمده اند.

فصل ۳

نوشتن ریاضی

دلایل زیادی برای نوشتن وجود دارد، مثلا یادداشت نکته ها برای استفاده های آتی یا تمایل به تبادل یک ایده با شخصی دیگر. دلیل هرچه باشد، نوشتن، هنر سختی است و برای تولیدِ کاری موثر و واضح، نیاز به تمرین دارد.

خوب نوشتن برای کسی که می خواهد دیگران او را درک کنند، به وضوح مهم است، اما یک پاداش دارد و آن این که مطالب تبادل شده را روشن می کند و بنابراین به درک شما اضافه می کند. هر نوعی از متون، مخاطب مشخصی دارد، خواه یک حل المسائل، یک جزوه درسی، یک گزارش فنی یا خواه یک جزوه شخصی باشد. از سوی دیگر، هر نوشته ای هدفی دارد. برای جزوه درسی، نوشته شما باید نشان دهد که شما مفاهیم را می فهمید، برای یک گزارش فنی، ممکن است برای آموزش دادن بنویسید یا اینکه یک مرجع تهیه کنید. در تمام این موارد، مخاطبان و اهداف، هنگام نوشتن باید در ذهن آورده شوند.

به طور معمول، زمانی که کسی چیزی را برای توضیح دادن مفهمومی به یک شخص دیگر می نویسد، باید آن شخص را مد نظر داشته باشد. دو نکته برای به یاد داشتن این است که باید نسبت به خواننده مهربانی داشته باشید – یعنی کار را برای او سخت نکنید – و اینکه مسئولیت برقراری ارتباط بر عهده شما است.

هنگام نکته برداری، مهم است که مفاهیم را با بیان و کلمات خود بنویسید. این کار کمک می کند که فکر کنید و بر چیزی که نمی دانید، تمرکز کنید و این می تواند در حل مسائل کمک کند.

یک ویژگی مهم ریاضی نویسی، صرفه جویی در به کار بردن عبارات و کلمات و استفاده بهینه از آن ها است. بر خلاف موضوعات دیگر، عبارات و کلمات، زیاده گویی نیستند و حذف آن ها منجر به تحریف منظور نویسنده می شود.

آنچه در ادامه آمده، مجموعه ای از ایده ها در مورد نحوه بهبود دادن به نوشته های تان است. اگر از آنها پیروی کنید، احتمالاً می توانید توضیح هایی واضح بنویسید، بنابراین بهتر درک می شوید و در نتیجه، در ارزیابی ها، امتیاز بیشتری می گیرید.

۱.۳ اصول پایه

قانون پایه ای این است که جملاتی ساده با سجاوندی[1] صحیح بنویسید.

جمله بنویسید

جمله بنویسید. جمله بنویسید و یک بار دیگر با چکش روی دیوار خانه تان بکوبید: جمله بنویسید.

یعنی این توصیه ای است که بر توصیه های دیگر ارجحیت دارد. یکی از رایج ترین اعتقادات غلط دانشجویان مبتدیِ ریاضی این است که به دلیل به شدت نِمادین بودن زبان ریاضی، فکر می کنند پاسخ به یک سوال یعنی جمع آوری لیستی از علامت ها. اگر چه، نمادها مختصر شدۀ برخی مفاهیم مشخص[2] می باشند، اما باید به جمله ها ملحق شوند تا یک معنی به وجود آید.

دانشجویی در انتهای جواب یک تمرین مربوط به پیدا کردن جواب یک دستگاه معادلات نوشت:

[1] آیین استفاده صحیح از علامت های نگارشی مانند نقطه، کاما، پرانتز، خط تیره و ... می باشد.

[2] مثل نماد عضویت در یک مجموعه که از کلمه انگلیسی element گرفته شده است. م.

"$(\emptyset)$مجموعه تهی، جواب ندارد ←، ۰=۱ "[۳]

حال ممکن است منظور دانشجو را بازسازی کرد. حقیقت بسیار مهم را که – هیچ جوابی وجود ندارد – به طور یقین بیان کرده است. همچنین نشان داده است که می داند مجموعه تهی با علامت $\emptyset$ نشان داده می شود.(البته ذکر این علامت در این جا لازم نیست، به دردی نمی خورد.)

اما این یک جمله نیست. این فقط یک رشته از علائم است و به تنهایی هیچ مفهومی را منتقل نمی کند.

جواب می توانست بهتر بیان شود: " از آنجا که تساوی ۰=۱ بدست آمده، دستگاه معادلات ناسازگار است و لذا هیچ جوابی وجود ندارد."

می توانستیم اضافه کنیم "یعنی مجموعه جواب تهی است"، اما ضروری نیست. البته، درک صحیحی از پاسخ درست در این جواب نشان داده شده است و بنابراین نمرات بیشتری در انتظار این دانشجو است. تمام قوانین معمول فارسی نویسی[۴] به کار می رود، مثلا به کارگیری پاراگراف ها و قواعد سجاوندی. همین طور، قوانین دستور زبان نیز مهم است، هر جمله باید یک فعل داشته باشد، فاعل باید منطبق بر فعل باشد و به همین ترتیب، باید مشکلات رایج دستور زبان را بدانید مثل فرق بین "which" و "that" [۵].

سجاوندی کنید

هدف سجاوندی، واضح کردن جملات است. سجاوندی باید مطابق با استاندارد رایج انجام شود. به طور مشخص، تمام جملات با یک حرف بزرگ شروع می شوند[۶] و با نقطه پایان می یابند. بخش دوم (پایان دهی با نقطه)، حتی اگر جمله با یک عبارت ریاضی پایان یابد، برقرار است. مثلا "فرض کنید $x = y^۲ + ۲y$ آنگاه x مثبت است." باید شامل یک نقطه بعد از عبارت $x = y^۲ + ۲y$

[۳] نماد $\emptyset$ برای مجموعه تهی به کار می رود، مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد.
[۴] در متن اصلی، انگلیسی نویسی ذکر شده است.
[۵] به عنوان مثالی از دستور زبان فارسی، به تفاوت "هست" و "است" توجه داشته باشید.
[۶] البته این یک قاعده زبان انگلیسی است.

باشد. این قاعده برای لیستی از عبارت های تساوی نیز درست است:

$$\begin{aligned} x &= y^{۲} + ۲y \\ &= y(y+۲) \end{aligned}$$

که باید با یک نقطه تمام شود. توجه کنید که بعضی نویسنده ها، مخصوصاً نویسنده های کتاب های ریاضی مهندسی، به این قانون نقطه گذاری اعتقاد ندارند. آنها اشتباه می کنند.

عبارات ریاضی نیاز دارند که نقطه گذاری شوند. برای مثال، $A = S^{-۱}BS\, A \in Mat_{۲,۲}$ باید یک کاما داشته باشد، یعنی: $A = S^{-۱}BS, A \in Mat_{۲,۲}$.

به سه کاما و نقطه پایانی در مثال زیر دقت کنید: فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲}, & x \geq ۰ \quad \text{برای}, \\ ۰, & x < ۰ \quad \text{برای}. \end{cases}$$

ساده بیان کنید

ریاضیات به صورت بسیار اقتصادی نوشته می شود. برای رسیدن به این هدف، باید از کلمات و جملات کوتاه استفاده کنید. برای حذف ابهام، از به کار بردن جملات پیچیده با نقیض های زیاد خودداری کنید[۷].

[۷] به طور مثال به جای گفتن: "این طور نیست که معادله جواب ندارد." باید بگوییم: "معادله جواب دارد." م.

۲.۳ هدف خود را به وضوح بیان کنید

هدف از نوشتن، برقراری ارتباط است. اگرچه، ممکن است که ایده اشتباه یا ناخواسته را منتقل کنیم. توصیه های زیر، برای جلوگیری از این اتفاق است.

آنچه را که انجام می دهید، بیان کنید

بسیار مهم است که آنچه را انجام می دهید، توضیح دهید. ایجاد لیستی از علامت ها، فرمول ها یا جملات نامرتبط کافی نیست. این توضیح ضمن نمایش میزان فهم شما، کمک می کند که نمره بگیرید.

می توانید یک استدلال را با گفتن آنچه انجام می دهید، آغاز کنید. به عنوان مثال: "حال نشان می دهیم که X یک مجموعه متناهی است"، "باید ثابت کنیم که ..."‌. به طور مشابه، می توانید با عباراتی مانند "این استدلال، متناهی بودنX را نتیجه می دهد." یا " ثابت کرده ایم که ..." اثبات را پایان دهیم.

باید ادعاهایی واضح و مشخص بیان کنید. بنابراین از به کار بردن عباراتی مثل "باید ممکن باشد"؛ که شاید ممکن باشد یا نباشد، پرهیز کنید. بهتر است بگوییم: "این امکان وجود دارد". مثبت باشید.

البته، باید از توضیح بسیار در مورد جزئیات دوری کنید. باید یک توازن به وجود آورید و این از تمرین و نقد نوشته های خود بدست می آید.

حکم های خود را توجیه کنید

به جای اینکه صرفاً حکمی را بیان کنید، بگویید که آن حکم از کجا می آید. یعنی، عباراتی شامل "در نتیجه، زیرا، از آنجا که، با توجه به، بر طبق، از ... داریم" و غیره. برای مثال، " با استفاده از قضیه (i)۴ می بینیم که مجموعه جواب ناتهی است" به وضوح بر عبارت "مجموعه جواب ناتهی است" ترجیح دارد و "$x^۳ > ۰$ زیرا x مثبت است" بهتر از عبارت خالی "$x^۳ > ۰$" است. مثال دیگر این است که بگوییم که از یک قانون استفاده شده است: "$f'(x) = ۲xcos(x^۲)$ با استفاده

از قاعده زنجیره ای“. با این روش، می توانید دانسته های خود را نشان دهید و بهتر درک شوید.

بگویید منظورتان چیست

در هر نوعی از متون، گفتن این که منظورتان چیست، مهم و دشوار است. استفاده دقیق از دستور زبان می تواند در این کار کمک کند.

قانون اول این است که خواننده نباید مجبور باشد که منظورتان از متن را حدس بزند. تمام اطلاعات ضروری باید در نوشته شما موجود باشد. چیزی نباید مبهم باشد.

یک ریاضیدان واقعی، دقیق است و هر واژه و نمادی را با وسواس زیاد به کار می برد، بنابراین نیاز دارد که ریاضی نیز دقیق باشد. بدون وجود دقت، ریاضی چیزی نیست. بدون آن، نمی توانیم مفهومی را که بر اساس مفهوم دیگری بنا می شود، بسازیم. اگر یکی از ایده ها گنگ و دو پهلو باشد یا هر کسی از آن دارای برداشتی متفاوت باشد، خطاها فرصت بروز پیدا می کنند و تلاش های ما برای جلوگیری از بروز آن ها بی فایده است. پس دقیق باشید.

به عنوان یک مثال، از توصیف کننده های ”بعضی“ و ”برای هر“ استفاده کنید. بنابراین به جای گفتن ”$f(x) = ۵$ “ با توجه به وضعیت، عبارتی مثل ” $f(x) = ۵$ برای بعضی $x \in \mathbb{R}$ “ یا ”$f(x) = ۵$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ “ را به کار ببرید .

اگر از ”اگر“ استفاده می کنید، آنگاه از ”آنگاه“ استفاده کنید

اگر از کلمه ”اگر“ استفاده می کنید، به همین ترتیب از کلمه ”آنگاه“ استفاده کنید. مثلاً ”اگر x فرد باشد، آنگاه $x^۲$ فرد است.“ ارجحیت دارد به ”اگر x فرد باشد، $x^۲$ فرد است“. عبارات را می توان به نحوی بیان نمود که شامل ”اگر“ باشند، اما نیازی به ”آنگاه“ نداشته باشند، به طور مثال: ”$x^۲$ فرد است، اگر x فرد باشد“. اما، به طور معمول از ساختار فوق استفاده کنید. توجه داشته باشید که مرسوم است برای سجاوندی، یک کاما قبل از کلمه ”آنگاه“ آورده شود.

اگر این فرم رعایت نشود، باعث سردرگمی می شود. برای مثال، این چه معنایی می دهد؟ ”اگر $a > ۰$ ، $b > ۰$ ، $a + b > ۰$“. می تواند به این معنا باشد: ”اگر $a > ۰$ باشد، آنگاه $b > ۰$ است و $a + b > ۰$“ (شاید به خاطر اینکه قبلا داشتیم اگر a مثبت باشد، آنگاه الزاماً b مثبت

است). از طرف دیگر، می تواند به این معنا باشد: "اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشند، آنگاه $a+b > 0$ است" (که همیشه درست است). در بسیاری از موارد، خواننده می تواند معنای یک عبارت را زمانی که "آنگاه" در آن حذف شده است، حدس بزند. اما مطمئن تر است که آن را حذف نکنیم. به یاد داشته باشید که نباید منظور شما را خواننده حدس بزند – مسئولیت برقراری ارتباط بر عهده نویسنده است.

هر چیزی فرمول نیست: اشیاء را با نام درستشان بخوانید

قبل از دانشگاه، توجه بیش از حدی به فرمول های ریاضی می شود و به همین دلیل بسیاری از مردم فکر می کنند هر گردایه ای از علامت ها، یک فرمول یا یک معادله نامیده می شود. به طور کلی، یک چنین گردایه ای یک *عبارت* نام دارد، مثلا $3x^2 - 7x$ یک عبارت است.

یک معادله، می گوید دو عبارت با هم مساوی هستند. برای مثال، $3x^2 - 7x = 4x$ یک معادله است. توجه داشته باشید که *نامعادله* $x \leq 5$ یک معادله نیست.

یک *فرمول*، برخی ارتباطات یا قوانین را بیان می کند، مثل آنچه در یک معادله وجود دارد. زمانی استفاده می شود که روشی برای محاسبه چیزی از عبارتی دیگر داده شده است مثل $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$.

مفاهیم و ایده های بسیار دیگری وجود دارند مثل اصل، فرض و تابع. مطمئن شوید که هر چیز را با نام درستش، فراخوانی می کنید. همچنین باید به تفاوت بین مفاهیم دقت کنید. مثلاً بین مجموعه بودن یا عضوی از یک مجموعه بودن.

مثال دیگر این است که باید بین یک تابع و مقدار آن در یک نقطه، تمایز قائل شوید. مثلاً بین f و $f(x)$. اولی به یک تابع اشاره می کند که ما آن را f نامگذاری کرده ایم، در حالی که $f(x)$ *مقدار* تابع f در x است. به طور حتم، نباید $f(x)$ را یک تابع نامگذاری کنید، اما بیشتر مواقع، ریاضیدانان این تمایز را نادیده می گیرند. [8]

بنابراین $f(x) = 3x^2$ یک معادله (یا عبارت یا فرمول) است که مقادیر تابع مشخص f را به دست می دهد.

[8] به طور مثال وقتی می گوییم تابع $sin(x)$ در واقع مقدار تابع sin را به جای خود آن به کار برده ایم. م.

۳.۳ استفاده از علامت ها

حال، سراغ چند نکته درباره نمادها می رویم. هیچ فراری از این واقعیت وجود ندارد که ریاضی به شدت نمادین است. اما استفاده زیاد از علائم ریاضی به معنای خوب بودن در ریاضی نیست.

کلمات یا علامت ها؟

علامت ها به طور موثر، مختصر هستند. برای مثال، $e^{۲\pi\sqrt{-۱}} = ۱$ قضیه خوبی است که با علائم بیان شده است[۹] . عبارت معادل که با کلمات نوشته می شود، تاثیر کمتری دارد. عدد e به توان ۲ برابر محیط دایره تقسیم بر قطرش در ریشه دوم عدد ۱− برابر است با ۱ .

اگرچه توصیه عمومی و برخاسته از تجربه استفاده از کلمات است. برای مثال، از "نتیجه می دهد" به جای علامت "$\Rightarrow$" استفاده کنید. اگر به چند کتاب نگاه کنید، خواهید یافت که در ارائه اثبات ها از علائم کمتر استفاده می شود. به طور مشابه، "مرتبه$\Leftarrow$ گروه آبلی است." باید به صورت "مرتبه نتیجه می دهد که گروه آبلی است." نوشته شود.

در بعضی از جملات، بهتر است از به کار بردن هم زمان علائم و کلمات اجتناب نمود. برای مثال، "جواب = ۱ " باید به صورت "جواب برابر ۱ است" نوشته شود. در غیر این صورت، ممکن است کسی بنویسد "تعداد افراد بالای ۴۰ = ۵" که به درستی خوانده می شود اما چشم به عبارت (نادرست) ۴۰=۵ منحرف می شود.

اعداد کوچک که به عنوان صفت به کار می روند، باید به صورت حرفی نوشته شوند. برای مثال "دو مجموعه". وقتی به صورت اسم یا عدد به کار می روند، باید به صورت عددی باشند، مثل "لم ۳ و ... به معنای تساوی با ۲۳ است". یک استثناء، عدد ۱ است که به طور معمول به

[۹] این یک قضیه عالی است، زیرا که بسیاری از ثابت های معروف ریاضی، یعنی e، π، ریشه عدد ۱− و البته دو عدد طبیعی مهم یعنی ۱ و تنها عدد اول زوج را به هم مرتبط می کند. در ژورنال Intellingencer Mathematical جلد ۱۲ در سال ۱۹۹۰ این قضیه به عنوان زیباترین قضیه در کل ریاضیات عنوان شده است.

هر دو صورت به کار می رود.

توجه داشته باشید که علامت هایی که شبیه هستند، باعث سردرگمی می شوند: باید به طور واضح بین $\in$ و ε تمایز قائل شوید. اولی معمولاً نشان دهنده عضویت در یک مجموعه و دومی حرف یونانی اپسیلون است. اما بدانید که بعضی از سخنرانان آن ها را دقیقاً بر عکس به کار می برند.

مساوی یعنی مساوی

علامت تساوی = یکی از رایج ترین ها در ریاضیات و یکی از اولین آموخته های کودکان است. با وجود این، هنوز توسط بسیاری از دانشجویان مبتدی، مورد سوء استفاده قرار می گیرد.

بیایید به ابتدا برگردیم و توجه کنیم که با به کاربردن علامت تساوی در واقع ادعا می کنیم که دو شیء در دو طرف *دقیقاً یکی هستند*. این برای اعداد، باید طبیعی باشد. اما برای اشیاء دیگر نیز برقرار است. پس اگر در یک طرف تابع است، در طرف دیگر نیز باید یک تابع باشد. اگر در یک طرف ماتریس است، آنگاه در طرف دیگر نیز باید ماتریس باشد.

در پاسخ به سوال تجزیه اعداد به عوامل اول، یک دانشجو نوشته بود:

عوامل ۶=۲و۳.

صرف نظر این که مشاهده عبارت ضعیف "۶=۲" جلوه خوبی ندارد، پاسخ نیز به صورت نادرست بیان شده است. درست است که ۶ *برابر است با حاصلضرب* ۲ و ۳ و در نتیجه ۲ و ۳ عوامل ۶ هستند، اما ۶ *برابر* "۳ و ۲" نیست. یک جواب بهتر عبارت است از :

عوامل اول ۶ عبارتند از ۲ و ۳.

به طور مشابه، تمرین بعدی را در نظر بگیرید، "مشتق $x^۳$ را بدست آورید." جواب به صورت زیر نیست:

$$x^۳ = ۳x^۲$$

حال، این یک عبارت ریاضی، در واقع یک معادله است، اما آن چه بیان می کند این است که تابع x^3 با مشتق خود برابر است که این درست نیست. یک روش صحیح نوشتن آن، عبارت زیر است:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

نمایش نتایج با علامت تساوی

برای نمایش نتایج، اگر تعداد عباراتی که قرار است تساوی آن ها نمایش داده شود کم باشد، می توانیم آنها را از یک طرف به طرف دیگر در امتداد یک سطر بنویسیم. برای مثال، $(x+3)^2 = x^2+6x+9$. $(x+3)(x-3) =$

برای محاسبات طولانی تر، مرسوم است که به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 + x^2 &= (x+3)(x+3) + x^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 + x^2 \\ &= 2x^2 + 6x + 9.\end{aligned}$$

(متاسفانه، این کار قانون نقطه گذاری را نقض می کند، اما به هر حال، به خاطر کاربردی و سنتی بودنش آن را انجام می دهیم.) بعضی وقت ها نیاز داریم که بدانیم یک نتیجه، چگونه بدست آمده است. باید از قطع کردن روند استدلال به شکل زیر اجتناب کنید:

$$\begin{aligned} &= x^2 + 5y \\ \text{بنا به قضیه ۶} &= 2x^2 + 5\ldots \end{aligned}$$

اگر نیاز بود که دلیل درست بودن یک گام مشخص در استدلال بیان شود، مانند مثال زیر آن را انجام دهید. فرض کنید که با استفاده از قضیه ۴.۶ داریم$y = 3$، آنگاه

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y &= x^2 + 4x + 3, \quad \text{بنا به قضیه ۴.۶} \\ &= (x+1)(x+3). \end{aligned}$$

به سجاوندی بعد از عبارت اختصاری در خط اول و بعد از اشاره به قضیه توجه کنید. به خوبی خوانده نمی شود، اما در صفحه واضح دیده می شود.

مصیبت علامت نتیجه گیری

نمادی که معمولاً توسط دانشجویان مبتدی ریاضی سوء استفاده و بیش از حد استفاده می شود، علامت نتیجه گیری است: $\Rightarrow$. اولا این نماد باید به صورت "در نتیجه" یا "نتیجه می دهد که" خوانده شود و نباید به عنوان علامت تساوی به کار رود. بنابراین ننویسید: ۲ $\Rightarrow$ ۳ $-$ ۵.

کاربرد صحیح این نماد به صورت "عبارت $\Rightarrow$ عبارت"، مثل " x فرد $\Rightarrow$ $x^۲$ فرد" [۱۰] می باشد. مشابه با اینکه هیچ عبارتی با یک نماد تساوی شروع نمی شود، هیچ عبارتی نیز با نماد"نتیجه می شود" شروع نمی شود. پس هرگز با $\Rightarrow$ شروع نکنید. اگر احساس می کنید که نیاز دارید که با یک نتیجه گیری شروع کنید، شاید بهتر باشد که بنویسیم "این نتیجه می دهد که ...".

اگر مطمئن نیستید که از این نماد در کجای عبارت استفاده کنید، نماد$\Rightarrow$ را در جاییکه به نظرتان مناسب تر است، قرار دهید. سپس عبارت حاصل را با صدای بلند بخوانید، البته در هنگام خواندن عبارت این نماد را "نتیجه می دهد که" بخوانید. معمولاً این روش کمک می کند تا جای مناسب این نماد را پیدا کنید.

مسائل مشابهی با علامت $\Leftrightarrow$ یعنی نماد دوشرطی، دیده می شود. این برای ادعای اینکه دو عبارت معادل هستند، به کار می رود. به بیان دقیق تر، زمان نوشتن لیست طولانی از علامت های تساوی، از آن ها استفاده می کنیم. بخش مربوط به اشتباهات رایج را ببینید.

فلش ها را به هر جایی نکشید

وسوسه انگیز است که اگر نتیجه ای نیاز به یک نتیجه قبلی داشته باشد، یک فلش طولانی برای نشان دادن آن نتیجه قبلی بکشیم. اینکار را نکنید. به جای آن، برای نتیجه مورد نیاز یک نام، عدد یا علامت معین کنید. حال می توانید به آن ارجاع دهید.

---

[۱۰] توجه کنید که این عبارت ترکیبی از نماد و کلمه شده است که گفتیم باید از آن پرهیز نمود، در اینجا فقط به عنوان یک مثال از این عبارت استفاده کرده ایم.

جملات را با یک نماد شروع نکنید

عبارات نباید با علائم شروع شوند. بنابراین جمله بعدی نباید استفاده شود: f پیوسته است.

یک دلیل برای این کار، جلوگیری از نقض کردن قانونی است که هر جمله باید با یک حرف بزرگ شروع شود. اما اگر علامت هم بزرگ باشد، باز هم نباید با آن، جمله را آغاز نمود. برای مثال، " X یک مجموعه متناهی است" بد است.

برای جلوگیری از این مسئله، می شود از توصیف شیء ای که آن علامت نشان می دهد، استفاده کرد. برای مثال، می توانیم عبارات نادرست قبل را به صورت "تابع f پیوسته است" و "مجموعه X متناهی است." بازنویسی کنیم. روش دیگر برای به کارگیری عبارات " داریم که" برای آغاز جمله است: "داریم که f پیوسته است."

از علائم و نشانه های رایج و معمول استفاده کنید

بعضی از علائم یک معنی رایج و ثابت می دهند. یک مثال ابتدایی از این امر، π است که نشان دهنده محیط یک دایره تقسیم بر قطرش است. نمایش این کسر، با چیزی غیر از π ، غیر معمول است اما از نظر تکنیکی، شروع یک استدلال به صورت "فرض کنید α نسبت محیط یک دایره بر قطرش باشد" درست است.

البته π برای نمایش چیزهای دیگری نیز به کار برده می شود، به طور مثال، به عنوان نگاشت تصویر (از آنجاییکه π متناظر با حرف p اولین حرف projection است.) همچنین برای نمایش گروه اساسی یک فضا در توپولوژی استفاده می شود.

علائم دیگر، مثل ε به معنای یک عدد کوچک مثبت است[۱۱]، n یک عدد طبیعی است و .... این قراردادها را بشناسید و برای تسهیل خواندن و درک نوشته های خود به وسیله دیگران، به کار ببرید. بخش ۱۲ را برای لیستی از این مثال ها، ببینید.

علائم و نمادهای خود را توضیح دهید

اگرچه بسیاری از علائم برای اشیاء مشخصی به کار می روند، مثلاً f به طور معمول یک تابع را

[۱۱] به طور مثال اینکه بگوییم: "فرض کنید ε یک عدد منفی است." یک جوک ریاضی تلقی می شود. م.

نشان می دهد، G یک گروه، R یک حلقه و غیره، اما یک خواننده ممکن است از علائم متفاوتی استفاده کند، بنابراین باید علائم خود را توضیح دهید تا به طور کامل واضح باشند. بنابراین، برای یک استدلال باید بنویسیم: "فرض کنید G یک گروه باشد." به جای استفاده از G بدون توضیح.

بعضی از علائم نیاز به معرفی ندارند؛ اکثر ریاضیدانان می دانند که π که در متن به کار رفته، چه کاربردی دارد و می دانند که $\sum$ به مجموع اشاره می کند.

۴.۳ اصلاحات دادن

از عبارات متصل کننده استفاده کنید

یک مشکل دیگر این است که فرضیات و نتایج به طور واضح در جریان یک استدلال مشخص نمی شوند. بنابراین، برای ارائه یک توضیح، از عبارات و کلمات متصل استفاده کنید، از قبیل در *نتیجه* و *بنابراین* تا نشان دهید که حکمی در حال نتیجه گیری است. اگر در یک کتاب ریاضی نگاه کنید، خواهید دید که استفاده بسیاری از اگرچه، در نتیجه و بنابراین می شود.

به عنوان مثال، فرض کنید می خواهیم بگوییم که ترتیب براکت ها یا پرانتزها در تقسیم اعداد مهم است. اینکه بنویسیم "$(۸/۲)/۴ = ۱$" و "$۸/(۲/۴) = ۱۶$" کافی نیست. باید بگوییم که "داریم $۸/(۲/۴) = ۱۶$ " اما "$(۸/۲)/۴ = ۱$ ". توجه کنید که متصل کننده "اما" توجه ویژه ای را روی تفاوت بین دو محاسبه به وجود می آورد. استفاده از متصل کننده "و" عبارت را غلط نمی کند، اما آن توجه مورد نظر را بر نمی انگیزد.

از مترادف ها استفاده کنید

تکرار لغات می تواند منجر به خستگی خواننده شود. استفاده از مترادف ها کمک می کند که مطلب جالب تر شود.

بعضی از مترادف های استنتاج عبارت اند از: لذا، پس، نتیجه می شود، نتیجه می شود که، به عنوان نتیجه، در نتیجه، بنابراین، به همان صورت. مثل همه مترادف ها، ممکن است تفاوت اندکی

در کاربردها وجود داشته باشد. همیشه نمی شود "بنابراین" را با "آنگاه" جایگزین کرد.

مترادف های توضیح دادن عبارت اند از: چنانکه، زیرا، از آنجاییکه، با توجه به، نظر به، به علت[۱۲].

تقریب های اعشاری

ما تمایل نداریم که از تقریب های اعشاری اعداد در ریاضی محض استفاده کنیم، اما آن ها در ریاضی کاربردی و آمار مرسوم هستند.

بنابراین اگر در ریاضی محض، جواب نهایی برابر $sin۷$ است، به جای نوشتن چیزی مثل ۰.۶۵۶۹۸۶ آن را به همان صورت رها کنید. برای عبارتی مثل $sin(\pi/۶)$ ، از ۱/۲ یا ۰.۵ استفاده کنید و $x = ۱/\sqrt{۳}$ را به کار ببرید.

۵.۳ به پایان رساندن

خواندن اثبات

وقتی بخشی نوشته می شود، باید غلط گیری شود. یعنی باید بازخوانی شود تا خطاهایش یافت شود؛ خطاهایی از قبیل خطاهای چاپی که شامل کاراکتر اشتباه، خطاهای املائی، خطاهای دستوری می باشند.

متن باید با سرعت کم خوانده شود. با صدای بلند خواندن، در دستیابی به خطاهای زیادی که باعث توقف شما از مرور کردن می شود، کمک می کند. بازبینی مهم دیگر، درخواست از شخص دیگری است تا کار شما را بخواند، چرا که آن شخص غالبا برداشت خود را از متن شما دارد و نه آنچه که فکر می کنید باید او از نوشته شما برداشت کند. بنابراین این فرصت خوبی است تا ببینید که آیا ایده های مد نظرتان در نوشتن آن متن به درستی منتقل شده اند. اگر بررسی کننده شما، اشکالات را ندید، اجازه ندارید که او را سرزنش کنید. مسئولیت نهایی همیشه بر عهده نویسنده

[۱۲] مولف این بخش را با ذکر تفاوت گرامری Let و Suppose به پایان می برد. توجه کنید: Let X be a set ولی Suppose that X is a set .

است.

یکی از روشهای مفید غلط گیری، تمرکز روی یکی از جنبه های غلط گیری در هر بار بازبینی است. به طوری که ابتدا، برای یافتن اشتباهات املایی و چاپی نوشته خود را بخوانید. آیا تمام براکت ها بسته هستند؟ و غیره. بعد، برای بررسی صحت و درستی نوشته خود آن را بخوانید.مثلا آیا آن درست است؟ سپس بررسی کنید که آیا ترتیب مطالب صحیح است، آیا زمانی که آن را می خوانید، متن روان است و مواردی از این قبیل.

بازتاب دهید

بازتاب، یکی از بخش های مهم از فرآیند نوشتن است. یک راه برای بازتاب متن، آن است که برای چند هفته آن را کنار بگذارید و سپس با یک دید تازه به سراغش بروید. به طور آشکار، این کار برای کارهای ضرب الاجلی امکان پذیر نیست، اما برای پروژه ها، قابل اجرا می باشد. وقتی دوباره دارید می خوانید، باید بپرسید "چه چیزی را می توانم حذف کنم؟" (منظور ما استفاده مقرون به صرفه از کلمات است) و "چه چیزی را می توانم اضافه کنم؟" (مثال های بیشتر می توانند به وضوح متن کمک کنند.) برای اولی می توان لغات و جملات غیرضروری را حذف کرد. همچنین بپرسید: آیا تمام علائم توضیح داده شده اند و آیا آنها ضروری هستند؟ آیا منظور من را بیان می کنند و ساده هستند؟ آیا چیزی بیش از گردایه ای از علامت ها است؟

۶.۳ خلاصه

- جملات ساده و سجاوندی شده بنویسید.
- آنچه را انجام می دهید، توضیح دهید.
- ادعاهای خود را توضیح دهید.
- منظورتان را بگویید.
- از "اگر ...، آنگاه ... " استفاده کنید.
- اشیاء را با نام درستشان نامگذاری کنید.
- از کلمات بیشتر از علائم استفاده کنید.
- از علامتهای تساوی و استلزام به درستی استفاده کنید.
- جملات را با نماد شروع نکنید.
- نمادهای خود را توضیح دهید.
- از عبارات متصل کننده و مترادف ها استفاده کنید.
- غلط گیری کنید.
- بازتاب دهید.

فصل ۴

چگونه مسائل را حل کنیم؟

حل مسائل ریاضی سخت است و هیچ فرمول جادوئی برای حل تمام مسائل وجود ندارد. اگر وجود داشت، هرکسی می توانست آن کار را انجام بدهد و کارفرمایان علاقه ای به استخدام حل کننده مسئله نداشتند.

اجازه دهید اول بین مسئله[۱] و تمرین[۲] تمایز قائل شویم. تمرین، چیزی است که می تواند با یک روش عادی حل شود، مثل پیدا کردن ریشه های یک معادله درجه دوم که بر اساس یک قاعده مشخص قابل حل است. مسئله، چیزی است که به فکر بیشتری نیاز دارد. برای مثال، اثبات کردن یک قضیه که برای این منظور باید چندین ایده را جمع کنیم و احتمالاً چندین روش عادی را در ترکیبی جدید به کار ببریم.

اغلبِ ریاضیات سطح بالا شامل انتخاب و به کارگیری تکنیک یا فرمول درست برای جواب دادن به یک سوال است. اگرچه این موضوع برای سطوح بالاتر ریاضیات هم صحیح است، اما گاهی نیز نیاز است صحت یک ادعا، مثل "تعداد اعداد اول نامتناهی است" را بررسی کنیم. تکنیک های مورد نیاز برای حل این نوع مسئله، با آن هایی که برای حل آن ها کافی است یک

---

[۱] problem
[۲] exercise

تکنیک صحیح را که قبلاً پیدا شده است، بکار ببریم، متفاوت است.

کتاب های زیادی در مورد حل مسئله نوشته شده است. خواندن یک یا دو تا از آن ها می تواند ارزشمند باشد، اما *بهترین راه برای یادگیری چگونگی حل مسئله، حل مسئله است.* تجربه ارزشمند است و به کار می آید. با وجود این، نکات مفیدی وجود دارند، بعضی از آن ها در این بخش توضیح داده شده اند که می توانید در حل مسائل استفاده کنید.

اگر در حل سوالات گرفتار شدید (که معمولاً هم خواهید بود)، به کتابخانه بروید و کتابی با موضوع سوال خود پیدا کنید. به یاد داشته باشید که راهنمای صفحه فهرست را جستجو کنید. مباحثه با دیگر دوستان در مورد مسائل به شرط اینکه صرفا از جواب آنها کپی نکنید، خوب است. راه درست همکاری، بحث کردن ریاضی و تبادل نظرات است، که به شما در تحصیل در دانشگاه بسیار کمک می کند.

۱.۴ طرح چهار مرحله ای پولیا

درباره حل مسئله، کتاب کلاسیک "چگونه آن را حل کنیم[۳] " به دست توانای جورج پولیا نوشته شده است. او برای حل هر نوعی از مسئله – نه فقط مسائل ریاضی – یک نقشه چهار مرحله ای ارائه می کند:

۱ - مسئله را بفهمید.

۲ - نقشه را حدس بزنید.

۳- نقشه را اجرا کنید.

۴ - به عقب نگاه کنید.

در نگاه اول، به نظر طرح کم اهمیتی می آید – مراحل ۲ و ۳ به نظر مثل دستورالعمل حل مسئله می آیند – اما هنوز به ما بینش و درکی از موضوع ارائه می دهد. در ادامه، مطالب در چهارچوب طرح بالا دسته بندی می شوند. این نکات قرار است به شما کمک کنند نه اینکه یک فرمول جادویی

[۳] How to solve it

برای حل مسئله به شما بدهند. نیازی نیست که به ترتیب اجرا شوند، به طوریکه ممکن است رفت و برگشتی بین این مراحل در حل بعضی مسائل نیاز باشد.

۲.۴ فهم مسئله

در ابتدا باید مسئله را بفهمیم و آن را کشف کنیم. با بررسی و جستجو خود را متقاعد سازید که یک ادعای داده شده درست است.

تمام کلمات به کار رفته در صورت سوال را بفهمید

همیشه تعجب آور است که دانش آموزان بدون آنکه تمام کلمات به کار رفته در صورت مسئله ای را درک کرده باشند، سعی می کنند آن مسئله را حل کنند. ممکن است کلید راه حل، استفاده از شرایط و نتایج بعضی تعاریف به کار رفته در صورت مسئله باشد. اگر ندانید که آن تعاریف، آن شرایط را تولید می کنند، هرگز مسئله را حل نخواهید کرد. پس مطمئن شوید که تمام تعاریف لازم را *می دانید* و *می فهمید*.

حدس بزنید- از شهود خود استفاده کنید

تقویت شهود مهم است و با ایجاد حدس های علمی برای جواب یک مسئله قابل دستیابی است. شاید این حدس، حدس زدنِ روش مورد نیاز برای حل مسئله یا تخمین محدوده مقادیر جواب باشد. هر چند، بیان حدس های افراط آمیز و بدون پشتوانه نیز روش ضعیفی است.

با حالت های ابتدایی و خاص کار کنید

در بسیاری از مسائل به نوعی از اندیس استفاده می شود، برای مثال، فضای برداری n- بعدی، یا n خط یا ماتریس های $n \times n$. در این گونه موقعیت ها با مقادیر کوچک و اولیه n مانند ۱، ۲ و۳ مسئله را بررسی کنید. بنابراین برای فضای n- بعدی، ابتدا ببینید برای صفحه یا فضای سه بعدی چه اتفاقی می افتد.

گاهی اندیس به کار رفته در مسئله به طور آشکار بیان نمی شود، برای مثال وقتی صحبت از

ماتریس های مربعی می شود باید ابتدا با ماتریس های مربعی ۳ × ۳ و از این قبیل، کار را شروع کنیم.

یک مثال عینی را بررسی کنید

با روش مشابه ایده فوق، برای حل یک مسئله مجرد و انتزاعی، آن را در یک مثال عینی بررسی کنید. در مسائل مربوط به مجموعه ها، یک مجموعه مشخص مانند مجموعه اعداد طبیعی یا یک مجموعه سه عضوی خاص را انتخاب کنید. در آنالیز، مثال های مشخصی از دنباله ها را به کار ببرید.

آگاه باشید که برای اثبات یک قضیه کلی، نشان دادن برقراری آن در یک یا دو حالت خاص کافی نیست[۴]. در واقع بررسی و برقراری آن یک یا دو حالت خاص برای یافتن ایده ای برای اثبات در حالت کلی به کار می آید و اغلب این روند راه گشا می باشد.

یک تصویر یا دیاگرام بکشید

ذهن در کار با تصاویر بسیار خوب است. تصاویر برای گسترش شهود مربوط به یک مسئله و متعاقباً برای پیشنهادِ پاسخی برای آن بسیار عالی هستند. در واقع، معمولاً ترسیم نمودار یا دیاگرام در مسائل هندسی و فیزیکی ضروری است.

در مورد فرض و حکم چه می دانید؟

آن چه را که در مورد فرض و حکم یک قضیه می دانید، بر روی کاغذ بیاورید. این کار باعث به وجود آمدن ایده هایی برای رسیدن از فرض به حکم و در نتیجه اثبات قضیه می شود.

در مورد مسئله مشابه فکر کنید

همان طور که قبلاً بیان شد، راه خوب شدن در حل مسئله، حل مسئله است. مسائل مشابه، معمولاً جواب های مشابه دارند. بنابراین مسائلی را با فرض ها یا حکم های مشابه بررسی کنید که قبلا حل کرده اید و ببینید آیا همان روش ها در این مسئله جدید نیز قابل اجرا هستند.

---

[۴] در واقع حکم کلی را باید کلی نیز ثابت نمود.

یک مسئله هم ارز پیدا کنید

فرمول بندی مجدد مسئله، می تواند مفید باشد. برای مثال فرض کنید که مسئله می خواهد نشان دهید دو تابع برابر هستند. کافی است نشان دهیم که تفاوت آنها صفر است[۵]. به بیان دقیق تر، فرض کنید f و g آن دو تابع حقیقی باشند. تابع جدید h را به صورت $h(x) = f(x) - g(x)$ تعریف کنید. در این صورت "به ازای هر x، $f(x) = g(x)$" هم ارز است با "به ازای هر x، $h(x) = ۰$". حال در این فرمول بندی جدید، باید دنبال قضایایی باشید که نتایج آن ها این است که تابعی تابع صفر است.

اغلب برای اثبات منحصر به فردی یک شیء خاص می توان از این روش استفاده کرد. فرض کنید دو تا از این شیء وجود دارد و سپس نشان دهید که تفاوت آن ها بدیهی است. این روش در مورد موجودات غیر از تابع، مانند اعداد و دیگر ساختارهای ضربی[۶] مثل ماتریس ها نیز قابل اجرا است؛ یعنی برای نشان دادن $a = b$، نشان دهیم $ab^{-۱} = ۱$.

یک مسئله آسان تر را حل کنید

این همانند کار کردن با حالت های خاص است. به فرض ها، شرایط اضافی بیفزائید یا نتیجه ضعیف تری را هدف قرار دهید. با تجربه بدست آمده از حل این مسئله آسان تر، شاید حل مسئله کلی تر نیز ممکن شود.

جلو و عقب بروید

در یافتن جواب، مجبور نسیتید که همیشه از فرض به حکم بروید. ممکن است روی حکم کار کنید و سعی کنید بفهمید چه چیزی آن را نتیجه می دهد. بدین ترتیب یک حکم جدید تعیین می گردد که آن چیزی است که حکم اصلی ما را نتیجه می دهد. با ادامه این روندِ رو به عقب، سعی می کنیم به فرض برسیم. یعنی با زنجیره ای از احکام واسطه که از حکم به فرض متصل می گردد، به راه حل مسئله دست می یابیم. وقتی این زنجیره تکمیل شد، حال با حرکت در این زنجیره و با بازنویسی

---

[۵] یا اینکه نشان دهیم خارج قسمت آن ها، در صورتیکه قابل تعریف باشد، برابر یک است.

[۶] ساختارهایی که در آن ها ضرب دو عنصر تعریف شده باشد که اغلب این ضرب باید در یک سری اصول نیز صدق کند.

اثبات ها در جهتِ رو به جلو، از فرض به حکم می رسیم. البته، یک خطر این روش این است که آنچه که قرار است درستی آن را ثابت کنیم، درست فرض کنیم[۷].

۳.۴ طراحی یک نقشه

وقتی مسئله را فهمیدید، شروع به طراحی یک نقشه برای حل آن بکنید.

مسئله را به چند زیرمسئله بشکنید

یکی از ابتدایی ترین رویکردها برای حل مسئله، شکستن آن به چند زیرمسئله است به امید اینکه هر زیرمسئله یک مسئله آسان تر و ترجیحاً یک تمرین باشد. بنابراین، مسئله را تا جای ممکن به زیرمسئله های طبیعی تقسیم کنید.

برای مثال، برای نشان دادن تساوی دو مجموعه A و B به طور مجزا نشان دهید $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. نشان دادن اینکه یک مجموعه، زیرمجموعهٔ مجموعه دیگری است، کار آسان تری است.

مثال دیگر، این است که نشان دهیم دو عبارت هم ارز هستند، مسائلی از نوع *اگر و فقط اگر* که در آن ها از نماد $\Longleftrightarrow$ استفاده می شود. اگر داشته باشیم "گزاره $A \Longleftrightarrow$ گزاره B" آنگاه به طور مجزا نشان می دهیم: "گزاره $A \Longrightarrow$ گزارهB" و "گزاره $B \Longrightarrow$ گزاره A". بعد از اتمام اثبات یک جهت، ممکن است ببینیم که استدلال های ما برگشت پذیرند، در این صورت اثبات جهت دیگر نیز به طور ضمنی کامل شده است.

سطح مسئله را تعیین کنید

برای مسائل ریاضی سطوح متفاوتی وجود دارد که هر کسی می تواند در سطح مناسب خود کار کند. بعضی مسائل را می توان با اِعمال یک قضیه، برخی دیگر را با به کارگیری یک تعریف حل کرد.

---

[۷] چنانچه در این حالت، روش بالا به درستی هم به کار برده شود و استدلال ها کاملاً صحیح باشند، در بهترین وضعیت یک مسئله دیگر را حل کرده ایم! مثلاً به جای $p \Rightarrow q$ در واقع$p \Rightarrow q$ را ثابت کرده ایم. م.

به طور مثال، برای نشان دادن $A \subseteq B$ ، می توان در سطح عناصر و اعضاء کار کرد[۸]: فرض کنید که x عضو دلخواه A است، یعنی $x \in A$ و سپس زنجیره ای از نتیجه گیری ها را برای رسیدن به $x \in B$ به کار بگیرید.

در کار با ماتریس ها، ممکن است لازم باشد که هر درایه ای از ماتریس را نامگذاری کنیم، یعنی a_{ij}. در مسائل دیگر با ماتریس ها، ممکن است قضیه ای آماده وجود داشته باشد که به ما اجازه دهد تا ماتریس ها را اینگونه ننویسیم و بدون نوشتن درایه های ماتریس ها، حکم مطلوب را به دست آوریم.

اشیاء را نامگذاری کنید

نامگذاری یک شیء کمک به مدیریت آن می کند و اجازه می دهد که مسئله را به زبان ریاضی ترجمه کنید. زبانی که در آن امیدواریم مسئله حل شود.

برای مثال، در مسئله ای فرض کنید یک تانکر آب داریم که با سرعت ۱۰ مترمکعب در ساعت در حال تخلیه است. در این مسئله، حجم آب را V می نامیم[۹]. در این صورت سرعت تخلیه را می توانیم به صورت $\frac{dV}{dt} = -۱۰$ بیان کنیم (علامت منفی برای نشان دادن این است که حجم در حال کاهش است).

نظام مندانه یک روش انتخاب کنید

دانستن روش های استاندارد حل مسئله و به کارگیری آگاهانه و قاعده مند آن ها مفید است. هنگام انتگرال گیری یک تابع، روش هایی مثل روش انتگرال گیری جزء به جزء و روش جانشینی در دسترس است و ممکن است بتوان به سرعت روش مورد نیاز را در موارد خاص تشخیص داد. اگر نه، از روی قاعده کار کنید و با این شروع کنید که ''آیا می توانم این را با انتگرال جزء به جزء حل کنم؟'' اگر این روش کار نکرد، ادامه دهید که ''آیا روش جانشینی آن را حل می کند؟'' و به همین ترتیب ادامه دهید.

[۸] سطح دیگری که می توان در آن کار کرد، جبر گزاره ها است، یعنی نشان بدهیم $A \cup B = B$. م.
[۹] به دلیل اینکه حرف اول معادل انگلیسی حجم، یعنی volume است

همین امر برای اثبات یک ادعا هم درست است. روش های زیادی برای اثبات در اختیار ریاضیدان است، برای مثال روش مستقیم، برهان خلف، عکس نقیض، استقراء و تفکیک به حالت های ممکن و بررسی جداگانه هر حالت[۱۰]. اگرچه، همان طور که آشکار است - می توان به طور مستقیم از فرضیات به حکم رسید – روش مستقیم، روشی است که معمولاً توسط مبتدیان به کار برده می شود. باید روش های دیگر را نیز امتحان کنید و بررسی کنید که آیا ما را به جواب می رسانند.

مسائلی هستند که به طور رایج با روش مشخصی حل می شوند. برای مثال، مسائل در ارتباط با اعداد طبیعی با استقراء حل می شوند؛ مسائل در ارتباط با بررسی وجود یک شیء با برهان خلف حل می شوند، یعنی، فرض کنید که چنین شیءای وجود ندارد، سپس ثابت کنید که این فرض منجر به تناقض می شود.

۴.۴ اجرای یک طرح

وقتی طرح آماده شد، باید اجرا شود. مطالب زیر را در ذهن داشته باشید. تا حالا باید ایده خوبی در مورد اینکه چرا حکم درست است، پیدا کرده باشید. با دقت کار کنید تا به این نتیجه برسید که آن چیزی که شما را در مورد درستی حکم متقاعد کرده است، درست است و سپس آن را پیرایش کنید.

هر مرحله را بررسی کنید – از شهود استفاده نکنید

هر مرحله را با دقت بررسی کنید و مطمئن شوید که دلایل اقامه شده در آن ها خود درست می باشند. هر استدلالی دقیقاً به اندازه ضعیف ترین حلقه ارتباطی خود قدرت دارد[۱۱]. اگر تنها یک گام کوچک غلط باشد، آنگاه کل استدلال نیز فرو می ریزد و دیگر برقرار نمی باشد. اینجا زمانی است که باید از به کار بردن شهود اجتناب کنید. اگر فکر می کنید چیزی درست است، بدون هیچ شکی،

[۱۰] Exhaustion method

[۱۱] در اینجا یک استدلال را زنجیره ای از احکام در نظر گرفته ایم که هر حکمی به حکم بعدی با یک حلقه ارتباطی وصل شده است. م.

با استفاده از گام های کوتاه منطقی، آن را اثبات کنید.

مطمئن شوید که منطق تان درست است

در هیچ نقطه ای از اثبات، نمی توانید آن چه را که قرار است اثبات شود، درست فرض کنید. شاید این آسان ترین اشتباهی باشد که می تواند رخ دهد. توجه داشته باشید که اگر گزاره A گزاره B را نتیجه دهد، آنگاه صرفاً به خاطر اینکه گزاره B درست است، درست بودن گزاره A نتیجه نمی شود. برای مثال گزاره نادرست $-۱ = ۱$ با به توان رساندن دو طرف، گزاره درست $۱ = ۱$ را نتیجه می دهد، یعنی : $-۱ = ۱ \Longrightarrow ۱ = ۱$. اما هیچ کسی نمی تواند نتیجه بگیرد که $-۱ = ۱$. بعضی اشتباهات متداول دیگر در فصل بعدی آمده اند.

۵.۴ به عقب نگاه کنید

حتی اگر یک راه حلی به دست آوردید، طرح حل مسئله تمام نشده است. همیشه، باید آنچه را انجام داده اید، بازتاب دهید. در پایان، از حل مسئله چه چیزی یاد گرفته اید؟

جواب را بررسی کنید

سنجش درستی جواب، مهم است. اولاً، آیا جوابی که بدست آمده معنادار است، آیا در مرتبه درستی است؟ اگر محاسبه کرده اید که ماشین تان یک میلیون مایل در ساعت حرکت می کند، به احتمال زیاد جواب شما صحیح نیست. این شانس دیگری برای تیز شدن شهود شما است.

خوشبختانه، اگرچه ممکن است به دست آوردن یک راه حل سخت باشد، اغلب بررسی درست بودن آن آسان است. می توان جواب ها را در معادلات قرار داد یا از یک انتگرال مشتق گرفت تا تابع اصلی را بدست آورد. این کار همیشه ارزش انجام دارد.

تست های بسیار دیگری روی یک مسئله می توان انجام داد، به طور مثال، پس از یافتن زوایای یک مثلث، بررسی کنید که آیا مجموع زوایای به دست آمده برابر ۱۸۰ درجه است یا نه و مانند این.

معمولاً، هر یک از اطلاعات بیان شده در صورت یک مسئله در راه حل آن باید استفاده شوند. پس بررسی کنید که تمام فرضیات و داده ها استفاده شده اند. اگر این طور نیست، احتمالا یک اشتباهی در جواب شما وجود دارد[۱۲].

پاسخ دیگری بیابید.

حتی اگر یک پاسخ پیدا کردید، ممکن است جواب های بهتری نیز وجود داشته باشد. پس سعی کنید مسئله را با یک روش متفاوت نیز حل کنید.ممکن است این کار باعث به دست آمدن جوابی بهتر یا مشخص شدن یک اشتباه جزیی در جواب فعلی نیز بشود.

اگر حل المسائلی در اختیار دارید، جواب های خودتان را با جواب های پیشنهادی در آن مقایسه کنید.

بازتاب دهید

حل مسئله جایی است که بازتاب دادن، واقعاً ارزشمند است. در مورد چیزی که مسئله را حل کرد، فکر کنید و سوال بپرسید. چقدر این پاسخ شبیه بقیه است؟ چقدر متفاوت است؟ آیا قضیه یا تکنیک مشخصی استفاده شد و هنوز استفاده می شود؟ در مورد این که چه چیزی باعث این برداشت می شود، فکر کنید و آن را در کیسه تجربه خود قرار دهید و آماده حمله به مسائل آتی باشید.

فکر کنید که چگونه یک جواب می تواند بهتر شود. در هنگام بازتاب دادن، شاید ببینیم که استدلال ما به جای اثبات $A \subseteq B$ که قرار بوده اثبات شود، در واقع ثابت کرده ایم که $B \subseteq A$.

سعی کنید نشان دهید که جوابتان غلط است. این کار به شما کمک می کند تا متقاعد شوید پاسختان درست است و خطاهای پنهان را پیدا کنید. برای یک اثبات، روش هایی که در این بخش توضیح داده شد، روی اثبات ها به کار ببرید. مثل استفاده از موارد خاص ابتدایی و انتهایی فرضیات در هر مرحله.

[۱۲] البته این به معنای وجود اشتباه قطعی در راه حل نیست. ممکن است طراحان سوال برای ساده کردن آن یک سری شرایط اضافی به صورت سوال اضافه کرده باشند.

۶.۴ خلاصه

- از طرح ۴ مرحله ای پولیا استفاده کنید.
- تمام کلمات به کار رفته در صورت یک مسئله را درک کنید.
- حدس بزنید.
- با حالت های ابتدایی، خاص و عینی کار کنید.
- شکلی بکشید.
- آنچه در مورد فرض و نتیجه می دانید، بر روی کاغذ آورید.
- به مسئله مشابه فکر کنید.
- یک مسئله معادل پیدا کنید.
- مسئله آسان تری را حل کنید.
- به عقب و جلو بروید.
- مسئله را به چند زیرمسئله بشکنید.
- سطح درستی را پیدا کنید.
- اشیاء را نامگذاری کنید.
- به طور سامان یافته، یک راه حل پیدا کنید.
- هر مرحله را بررسی کنید و مطمئن شوید که منطق تان درست است.
- جواب را بررسی کنید.
- جواب دیگری بیابید.
- بازتاب دهید.

فصل ۵

برخی اشتباهات رایج

در این فصل برخی از اشتباهات رایج را که اتفاق می افتند، بررسی می کنیم. مشاهده کرده ام که همه این اشتباهات به وقوع می پیوندد و مانند بیشتر ریاضیدانان من نیز آن ها را مرتکب شده ام.

آنچه را که قرار است درستی آن ثابت شود، درست فرض نکنید

فرض کنید می خواهیم ثابت کنیم که: اگر a و b عدد حقیقی باشند، در این صورت داریم $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$. اثباتی نادرست برای این گزاره درست عبارت است از:

"داریم $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab \Leftarrow a^۲ - ۲ab + b^۲ \geq ۰ \Leftarrow (a-b)^۲ \geq ۰$. این یک نامساوی همیشه درست است، زیرا مجذور یک عدد همواره نامنفی است، بنابراین $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$."

اشتباه رخ داده در این اثبات این است که ادعایی را که باید درستی آن ثابت شود، درست فرض کرده ایم، و رسیده ایم به یک چیزی که می دانیم همیشه درست است. نمی توانیم درستی یک ادعا را صرفاً به خاطر اینکه یک چیز درست را نتیجه داده است، نتیجه بگیریم. به $-۱ = ۱ \Longrightarrow ۱ = ۱$ فکر کنید که قبلاً بحث کردیم.

(در واقع اثبات صحیح فقط با عوض کردن جهت نتیجه گیری ها در اثبات بالا به دست می آید، یعنی با نامساوی $(a-b)^۲ \geq ۰$ که می دانیم درست است کار را شروع می کنیم، سپس با برعکس کردن جهت نتیجه گیری های بالا به نتیجه مطلوب خود می رسیم.)

از ضرب کردن در یا تقسیم کردن بر صفر اجتناب کنید

احتمالاً تا الان به منظور اینکه نباید بر صفر تقسم نمود، اثباتی برای $۰ = ۱$ دیده اید. با وجود این هشدار، ممکن است چنین عملی از نظر پنهان بماند.

این ادعا را در نظر بگیرید: فرض کنیم a، b، c و d عدد حقیقی هستند. اگر $ab = cd$ و $a = c$، آنگاه $b = d$.

اثبات.

داریم:

$$ab = cd$$

چون $a = c$

$$\Leftrightarrow ab = ad$$

لذا بنا به قانون حذف داریم:

$$\Leftrightarrow b = a. \qquad \square$$

این اثبات شاید متقاعد کننده به نظر برسد. مشکل آنجایی رخ می نماید که حالت حدی $a = c = ۰$ را در نظر بگیریم. در این صورت همواره بدون در نظر گرفتن مقادیر b و d داریم $ab = cd$، لذا با قرار دادن $b = ۴$ و $d = ۳$ خواهیم داشت $۰ \times ۳ = ۰ \times ۴$ اما $۴ \neq ۳$.

این نکته در مورد مجموعه ها نیز برقرار است، یعنی می توانیم نشان دهیم که $A \times B = C \times D$ و $A = C$ نتیجه می دهند $B = D$، اما مجدداً باید فرض کنیم A مجموعه تهی نیست. (مجموعه تهی نقش عدد صفر را بازی می کند.)

نمادهای شرطی[1] را صحیح به کار ببرید

در حل کردن معادلات، ما از یک مرحله به مرحله بعدی می رویم به این ترتیب که نشان می دهیم اولی دومی را نتیجه می دهد. اگرچه، این نیز مهم است که بررسی کنیم که آیا دومی هم اولی را نتیجه می دهد. آنچه که ما می خواهیم زنجیره ای از معادلات هم ارز است تا به همه جواب ها و البته نه بیشتر برسیم.

معادله بعدی و راه حل آن این نکته را روشن می سازد:

$$\sqrt{x+3} = x+1$$

با مجذور کردن دو طرف داریم:

$$x+3 = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$

$$0 = x^2+x-2$$

$$0 = (x-1)(x+2).$$

بنابراین $x = 1$ یا $x = -2$. جایگذاری $x = 1$ در معادله اصلی نشان می دهد که یک جواب درست به دست آورده ایم. اما با جایگذاری $x = -2$ در معادله اصلی می رسیم به $\sqrt{-2+3} = -2+1$، یعنی $\sqrt{1} = -1$. (به کاربرد صحیح عملگر رادیکال توجه داشته باشید[2]). بنابراین $x = -2$ جواب نیست. مشکل از اینجا پدید می آید که اگر معادله $f(x) = g(x)$ را داشته باشیم و با مجذور کردن دو طرف آن به حل آن بپردازیم، آنگاه در این روند ما جواب های

---

[1] $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$.

[2] تقریبا این اعتقاد وجود دارد که با گرفتن رادیکال ما به دو عدد می رسیم: یکی مثبت و دیگری منفی. در واقع این مطلب صحیح نیست. عملگر $\sqrt{\ }$ را به عنوان عملگری در نظر بگیرید که فقط یک عدد به شما تحویل می دهد. بنابراین $\sqrt{4} = 2$ و نه اینکه $\sqrt{4} = \pm 2$. لذا جواب های معادله $x^2 - 4 = 0$ عبارتند از $\pm\sqrt{4}$ یعنی $x = 2$ یا $x = -2$ و نه اینکه $\sqrt{4}$. این نکته به نظر بدیهی است ولی استفاده صحیح آن به درک و دریافت بهتر مفاهیم بعدی کمک می کند.

اضافی معادله $f(x) = -g(x)$ را نیز به دست می آوریم.

در این قسمت می توانستیم با به کار بردن صحیح نمادهای شرطی، با دقت بیشتری باشیم، لذا راه حل به صورت زیر خواهد بود:

$$\sqrt{x+۳} = x+۱$$

با مجذور کردن دو طرف داریم:

$$\Rightarrow x+۳ = (x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$$

$$\Leftrightarrow ۰ = x^۲ + x - ۲$$

$$\Leftrightarrow ۰ = (x-۱)(x+۲).$$

اولین $\Rightarrow$ برگشت پذیر نیست، در نتیجه در پایان باید بدانیم که جواب های اضافی خواهیم داشت.

همچنین مثال بالا اهمیت به کار گیری نمادهای شرطی را نشان می دهد.

ثابت انتگرال گیری را فراموش نکنید

برای انتگرال ها باید ثابت انتگرال گیری را اضافه کنیم، زیرا در غیر این صورت با روش انتگرال جزء به جزء می توانیم به تناقض $۰ = ۱$ برسیم: داریم

$$\int \frac{۱}{x} dx = \frac{۱}{x} . x - \int x \frac{-۱}{x^۲} dx = ۱ + \int \frac{۱}{x} dx.$$

سپس با حذف نمودن، نتیجه می گیریم $۰ = ۱$.

فصل ۶

چگونه یک تعریف را بخوانیم؟

در ریاضیات سطح بالا تعاریف دقیق حیاتی می شوند. به آن ها نیاز داریم تا همه بر سر چیزی که درباره آن صحبت می کنیم توافقی داشته باشیم. اگرچه، توجه داشته باشید که تعاریف ممکن است از کتابی به کتاب دیگر کمی تغییر داشته باشند. البته، بیشتر مجموعه اصلاحات ریاضیات دوره کارشناسی مورد قبول همگان است، ولی باید نسبت به این امر هوشیار بود.

در طول زمان دلایل نامگذاری یک شیء ریاضی با یک نام خاص فراموش می شود و از دست می رود. به کرّار نام ها از انگلیسی روزمره اقتباس می شوند، اما معانی آن ها ممکن است با معانی رایج آن ها در زندگی روزمره متفاوت باشند و هیچ سر نخی هم به معنای آن ها در ریاضیات از خود این نام ها به دست نیاید. برای مثال، اصلی ترین اشیاء در جبر عبارتند از گروه ها[۱]، میدان ها[۲] و حلقه ها[۳]. نام اشیاء گاهی خنده دار است، مثل گریدوید[۴] یا می تواند از اسامی اشخاص گرفته شده باشد، مثل حلقه های گرونشتاین. در حالت دوم، هیچ دلیلی ندارد آن شخص در مورد آن شیء ریاضی کاری کرده باشد- گرونشتاین مدعی شده است که حتی تعریف حلقه گرونشتاین را نمی-

---

[۱] groups

[۲] fields

[۳] rings

[۴] کهgreedoid یک واژه تخصصی در نظریه مجموعه ها می باشد و معنای تحت اللفظی آن حریص وار است. م.

داند، با وجود این از نام او برای این منظور استفاده شده است.

مثال ها

برای شروع به چند مثال (نسبتاً ساده) که در ادامه به آن ها نیاز داریم، نگاهی می اندازیم.

۱ - یک عدد صحیح *زوج* است هرگاه حاصل ضرب ۲ در یک عدد صحیح دیگر باشد.

۲ - یک عدد صحیح *فرد* است هرگاه حاصل ضرب ۲ در یک عدد صحیح دیگر به اضافه یک باشد.

۳ - مجموعه X با تعداد متناهی عضو را یک *مجموعه متناهی* می نامیم.

مشاهده کنید

بدیهی است که در تعریف داده شده باید به طور دقیق مشاهده کنیم که چه شرایطی قرار داده شده است. به خاطر داشته باشید که اجازه نداریم چیز اضافه تری را به شرایط یک تعریف اضافه کنیم.

با چه چیزی داریم کار می کنیم؟

اولین وظیفه ما این است که تشخیص دهیم با چه چیزی داریم کار می کنیم. آیا چیزی است که ما آن را می شناسیم ولی با یک خاصیت اضافه تر؟ آیا مشابه با یا متفاوت از تعریفی است که ما قبلاً دیده ایم؟ آیا متناظر با چیز دیگر است[۵]؟ آیا اصلاح یک تعریف قبلی است؟

چه مثال هایی از این تعریف وجود دارند؟

پس از اینکه یک تعریف ارائه شد، باید از خود بپرسیم آیا چنین چیزی وجود دارد. بعید است به شما تعریفی داده شود که مثالی از آن موجود نباشد، نکته مهم این است که فهم و درک خود را با نقاد بودن، از همان ابتدای کار، گسترش دهید.

اگر مثالی برای تعریف وجود دارد، در مورد تعداد این مثال ها چه چیزی می توانیم بگوییم؟ آیا آن شیء منحصر به فرد است؟ آیا تعداد آن ها متناهی است؟ نامتناهی است؟ شمارا است؟ ناشمارا است؟

در مورد مثال ما، مجموعه های متناهی، بدیهی است که تعداد نامتناهی از آن ها وجود دارد.

[5] مانند صفر و تهی.

بنابراین یک منبع کافی از آن ها را در اختیار داریم و در نتیجه ساختن مثالی از آن ها ساده است.

مثال های استاندارد را پیدا کنید

از میان مثال های یک تعریف، باید برخی مثال های استاندارد را انتخاب کنیم که خواص آن تعریف را به خوبی آشکار می کنند و مهم تر اینکه به خاطر سپاری آن تعریف را برای ما ساده می کنند. به کار بردن یک مثال برای به خاطر نگه داشتن یک تعریف می تواند گمراه کننده باشد، اما غالباً مفید است.

یکی از دلایل یافتن مثال های استاندارد این است که در هنگام تحلیل و آنالیز یک قضیه می توانیم آن قضیه را در مورد آن مثال ها اجرا کنیم و درک خودمان را عمیق تر کنیم.

مثال های بدیهی را پیدا کنید

مثال های بدیهی کمک می کنند تا نسبت به یک تعریف نگرشی بیابیم و در تحلیل قضایا و اثبات آن ها ارزشمند می باشند.

عدد صفر و مجموعه تهی مثال هایی از یک عدد بدیهی و یک مجموعه بدیهی می باشند. آیا این ها در شرایط تعریف داده شده صدق می کنند؟ لذا برای مثال، آیا صفر یک عدد صحیح زوج است؟ فرد چطور؟ در مورد مجموعه های متناهی، مجموعه هایی با یک عضو نیز بدیهی هستند. حقیقی تابع ثابت صفر یک تابع بدیهی است. در هندسه، از خود بپرسید آیا خط، دایره یا صفحه در شرایط تعریف صدق می کند؟ یک دنباله بدیهی در آنالیز عبارت است از دنباله ۰، ۰، ۰، ....

مثال های کرانی[۶] را پیدا کنید

پرداختن به مثال های کرانی یک وظیفه پیچیده است. در حال حاضر فقط آگاه باشید که این موضوعی است که در ادامه تحصیلات خود به آن خواهید پرداخت. مثال های بدیهی نیز به نوعی کرانی هستند، اما اینجا منظور چیزی قوی تر و پیچیده تر است. مثالی از یک مثال کرانی مجموعه کانتور در آنالیز است.

---

[۶] extream

نامثال ها را پیدا کنید

در مورد یک تعریف، ایده خوبی است که مثال هایی را نیز بشناسیم که در شرایط آن تعریف صدق نکنند، به چنین مثال هایی نامثال می گوییم. آن ها برای یافتن مثال نقض برای ادعاها مفید هستند، اما همچنین برای تثبیت تعریف در ذهن مان نیز مفید هستند. برای مثال، وقتی تعریف تابع پیوسته را یادآوری می کنیم، یک نامثال خاص را نیز در نظر می گیریم، یعنی یک تابع ناپیوسته.

یک نامثال برای مجموعه های متناهی مجموعه اعداد طبیعی[۷] است که با $\mathbb{N}$ نمایش داده می شود.

اشیاء جدیدی از روی اشیاء قدیمی بسازید

وقتی تعریفی ارائه شد، آنگاه ساختن اشیاء جدید از روی اشیاء قدیمی رایج است. برای مثال، اگر شیء مذکور یک مجموعه باشد که دارای خاصیتی است، آنگاه می توانیم حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه با آن خاصیت را در نظر بگیریم و بپرسیم آیا این حاصل ضرب نیز دارای آن خاصیت است. مثلاً، حاصل ضرب دو مجموعه متناهی یک مجموعه متناهی است. به طور مشابه، می توانیم بپرسیم که آیا آن خاصیت به زیرمجموعه ها نیز به ارث می رسد، یا در اشتراک گیری و اجتماع گیری نیز آن خاصیت حفظ می شود.

در مورد توابع نیز می توانیم سوالات مشابهی بپرسیم. آیا خاصیت برای جمع، حاصل ضرب یا ترکیب توابع برقرار است؟ درباره تصویر یا تصویرمعکوس توابع چطور؟

---

[۷] به یاد آورید که $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$. برخی ریاضیدانان، به ویژه منطق دانان، مایل هستند که صفر را نیز به عنوان عدد طبیعی در نظر بگیرند. دیگران می گویند اعداد طبیعی، اعداد شمارشی هستند و شما شمارش را با صفر شروع نمی کنید (مگر اینکه برنامه نویس کامپیوتر باشید)، بعلاوه، صفر چگونه طبیعی است که به تازگی اختراع شده است؟ از طرف دیگر، برخی قضایا بیان بهتری دارند هرگاه صفر را عدد طبیعی در نظر گرفته باشیم. البته می توانیم بگوییم با اعداد صحیح نامنفی یا اعداد صحیح مثبت کار می کنیم.

خلاصه

- شرایط موجود در یک تعریف را مشاهده کنید
- با چه چیزی داریم کار می کنیم؟
- چه مثال هایی از این تعریف وجود دارند؟
- مثال های استاندارد را پیدا کنید
- مثال های بدیهی را پیدا کنید
- مثال های کرانی را پیدا کنید
- نامثال ها را پیدا کنید
- اشیاء جدیدی از روی اشیاء قدیمی بسازید

فصل ۷

چگونه یک قضیه را بخوانیم؟

در این فصل راهنمایی هایی را در ارتباط با نحوه برخورد با یک قضیه جدید ارائه می کنیم؛ نکات مربوط به اثبات ها در فصل آتی ارائه خواهند شد. حال اجازه دهید به بحث خود برگردیم و چند قضیه ای را در نظر بگیریم.

درستی اولین آن ها باید برای شما قطعی باشد و ممکن است بخواهید اثبات خودتان را برای آن به کار ببرید. دومین و سومین آن ها قضایایی بسیار قدیمی هستند (هر دوی آن ها سابقه ۲ هزار ساله دارند) و کمتر شهودی هستند. هر دوی آن ها را می توان با برهان خلف اثبات نمود.

سه قضیه

۱ - اگر m و n عدد طبیعی فرد باشند، آنگاه mn یک عدد صحیح فرد است.

۲ - تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

۳ - عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است، یعنی قابل بیان به صورت $\frac{m}{n}$ که m و n عدد صحیح هستند، نمی باشد.

فرض ها و حکم ها را بیابید

قضیه معمولاً قابل بیان به صورت ”برخی فرض ها نتیجه می دهند یک حکم را“ می باشند. یعنی، به فرم ”اگر ...، آنگاه ...“. تعیین دقیق فرض ها و حکم ها، اولین هدف ما در برخورد با یک

قضیه است. در این قسمت بحث زیادی وجود دارد.

در قضیه اول اینکه m و n عدد طبیعی و فرد هستند، فرض های ما هستند و اینکه mn یک عدد صحیح فرد است، حکم است.

قضیه دوم را می توانیم به صورت "اگر X مجموعه اعداد اول باشد، آنگاه X نامتناهی است" بیان کنیم. این یک بیان زشت قضیه است، در آن نماد غیر ضروری X معرفی شده است، اگرچه در این بیان می توانیم فرض ها و حکم ها را به وضوح ببینیم.

قضیه سوم قابل بازنویسی به صورت "اگر $x = ۲$، آنگاه $\sqrt{x}$ گنگ است" یا "اگر $x = \sqrt{۲}$، آنگاه x گنگ است" می باشد.

میزان قوت و ضعف فرض ها و حکم ها را تعیین کنید

می خواهیم بدانیم به چه میزان فرض ها و حکم های قضیه قوی یا ضعیف هستند. بهترین قضیه ها دارای فرض های ضعیف و حکم های قوی می باشند.

یک فرض قوی دلالت به یک مجموعه کوچکی از اشیاء دارد و یک حکم قوی آن است که چیزی بسیار دقیق درباره آن اشیاء می گوید. مطلوب این است که فرض تا جای ممکن ضعیف باشد؛ هر چه فرض ضعیف تر، کارایی قضیه بیشتر، یعنی در مورد اشیاء بیشتری قابل اجرا است.

فرض قضیه دوم قوی است، آن فقط به مجموعه اعداد اول ارجاع دارد. به طور مشابه، قضیه سوم خواص ریشه دوم ۲ را بیان می کند. از طرف دیگر، قضیه اول دارای فرض ضعیف تری (کلی تری) است، اجازه داریم که هر عدد طبیعی فرد را در نظر بگیریم که تعداد آن ها نامتناهی است.

می توانیم با جایگزین کردن فرض طبیعی بودن در قضیه ۱ با فرض صحیح بودن، فرض این قضیه را ضعیف تر(کلی تر) بکنیم. در مورد قضیه ۳، می توانیم با در نظر گرفتن ریشه دوم اعداد اول، فرض آن را ضعیف تر بکنیم. فرض آن بیشتر ضعیف می شود، اگر ریشه دوم اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، البته در این حالت حکم دیگر برقرار نیست، به طور مثال $\sqrt{۴}$ گنگ نیست.

حکم قوی چیزی دقیق و معین را می گوید. تمامی قضایای بالا دارای حکم قوی می باشند. لذا، این قضیه را در نظر بگیرید "فرض کنید $x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$، در این صورت $x \geq -۱۰۰۰$".

این قضیه دارای حکم بسیار ضعیفی می باشد، به راحتی می توان حدس زد این قضیه درست است. قوی ترین حکم برای این قضیه عبارت خواهد بود از $x = -۱$.

با قضایای قبلی مقایسه کنید

توان مشاهداتی خود را می توانیم به کار ببریم. قضیه حاضر را با قضایای قبلی مقایسه کنید. فرض ها و حکم چگونه تغییر کرده اند؟ آیا بیشتر محدود شده اند یا کمتر؟

این امر به ما اجازه می دهد که قضیه را در یک کلیت ببینیم و به ارتباطات درونی گوناگون بین قضایا پی ببریم.

جزییات را ببینید

در یک قضیه تقریباً هر کلمه ای مهم خواهد بود، حتی کوچکترین آن ها. هر کلمه را بخوانید و به هر یک توجه داشته باشید و فکر کنید که هر یک چه چیزی معنی می دهد.

کارکرد قضیه و چگونگی این کارکرد را طبقه بندی بکنید

مهمترین سوال برای پرسیدن از خود این است که "این قضیه واقعاً چه چیزی به ما می گوید؟" آیا قدرت محاسبه چیزی را به ما می دهد؟ آیا یک دسته از اشیاء را طبقه بندی می کند؟

به طور مثال، قضیه ۱ در مورد زوجیت حاصل ضرب می تواند برای بررسی صحت محاسبات به کار برده شود. قضیه ۲ اطلاعاتی راجع به ساختار کلی اعداد اول در اختیار ما قرار می دهد. اگر مجموعه اعداد اول متناهی بود، آنگاه احتمالاً می توانستیم تمام آن ها را مثلاً به کمک کامپیوتر تعیین کنیم، یا قضایای مربوط به آن ها را می توانستیم به کمک روش تفکیک اثبات کنیم. همانطور که هست، نامتناهی بودن آن ها می گوید که این روش ها برای اعداد اول قابل اجرا نیست.

قضیه ۳ در مورد گنگ بودن $\sqrt{۲}$، یک قضیه طبقه بندی است؛ به ما می گوید $\sqrt{۲}$ چه نوع عددی است.

شکلی بکشید

کشیدن یک شکل همیشه ایده خوبی است، اگرچه گاهی امکان پذیر نیست. در مورد اعداد اول یا قضایای گنگ بودن کمک زیادی نخواهد کرد ولی در مورد قضیه ۱ کمک می کند. (امتحان

کنید.)

قضیه را روی مثال های ساده اجرا کنید

حال به توصیه اساسی می پردازیم. ادعا را روی مثال های ساده یا استاندارد پیاده کنید. در یادگیری یک موضوع، مثال های خوبی را که در فرض ها صدق می کنند به خاطر داشته باشید. برای مثال در مورد فضاهای برداری به صفحه یا فضای ۳-بعدی فکر کنید. در جبر، مجموعه اعداد صحیح تحت عمل جمع یک مثال خوب از گروه ها می باشد. بنابراین همانطوریکه دارید مطالعه می کنید، یک مجموعه مطلوب، گروه، تابع یا هر چیز دیگر را در ذهن داشته باشید. در این روش شما مطالب را به طور زنده و فعال یاد می گیرید و می توانید با مطالب مرتبط که قبلاً آموخته اید ارتباط برقرار سازید.

روی مثال های بدیهی اجرا کنید

مانند توصیه قبلی ببینید روی مثال های بدیهی از اشیاء مورد نظر در فرض ها چه اتفاقی می افتد. چه اتفاقی می افتد اگر مقدار یک عدد خاص برابر صفر یا یک باشد؟ چه اتفاقی می افتد اگر تابع بدیهی صفر را در نظر بگیریم؟ چه اتفاقی می افتد اگر مجموعه تهی یا گروه بدیهی را در نظر بگیریم؟ اگر دنباله بدیهی ۱، ۱، ۱، ... را در نظر بگیریم، چطور؟ چه اتفاقی روی دایره ها یا خطوط می افتد؟

این مثال ها درک ما را دقیق تر می کنند. اغلب یک تصویر روشن از جایی که قضیه قابل اجرا است در اختیار ما قرار می دهند. مثال های کرانی مانند مجموعه کانتور نیز می توانند در نظر گرفته شوند.

آیا عکس مطلب نیز برقرار است؟

می توان پرسید که آیا عکس ادعا نیز برقرار است، یعنی اگر قضیه به صورت "اگر A درست باشد، آنگاه B درست است" باشد، آنگاه این ادعا را در نظر بگیریم "اگر B درست باشد، آنگاه A درست است".

عکس قضیه ۱ را در نظر می گیریم که عبارت است از "اگر mn یک عدد صحیح فرد باشد،

آنگاه m و n دو عدد طبیعی فرد هستند.» این صحیح *نیست*. برای نشان دادن این مطلب، کافی است یک مثال نقض ارائه دهیم. قرار دهید $m = -۱$ و $n = ۳$، لذا عدد $mn = -۳$ یک عدد صحیح فرد است ولی m یک عدد طبیعی نیست.

در بیشتر اوقات، اساتید و نویسندگان بهترین نتایج ممکن را ارائه می دهند، بنابراین به احتمال زیاد عکس قضیه ها درست نیست، و بررسی کردن این مطلب کمی بی نتیجه است. اما اگر عکس قضیه برقرار نیست، مثال نقضی را بیابید که این موضوع را نشان دهد. این امر درک ما از مسئله را عمق می بخشد و تمرینی است برای یافتن مثال نقض که حربه مناسب و مفیدی در حل مسائل است.

با نمادها یا با کلمات بازنویسی کنید

یک راه خوب برای فهمیدن یک قضیه که با کلمات بیان شده است، بازنویسی آن با نمادها است و برعکس. بنابراین، مثال بالای ما تبدیل می شود به

$$m, n \in \{x \in \mathbb{N} | x = ۲j - ۱ \ \exists j \in \mathbb{N}\} \Rightarrow mn \in \{x \in \mathbb{Z} | \ x = ۲j - ۱ \ \exists j \in \mathbb{Z}\}.$$

گاهی با این کار قضیه واضح تر شده و راحت تر به ذهن سپرده می شود، گاهی نیز مانند این مثال این طور نمی شود.

چه اتفاقی برای نامثال ها می افتد؟

مثال هایی را در نظر بگیرید که در فرض های قضیه صدق نکنند، یعنی نامثال ها. آیا هنوز حکم برای برخی از آن ها برقرار است؟ به طور مشابه، چه اتفاقی می افتد اگر یکی از شرایط در فرض را حذف کنیم؟ ممکن است جواب دادن به این سوالات پس از مطالعه اثبات ساده تر باشد.

خلاصه

- فرض ها و حکم ها را بیابید
- میزان قوت و ضعف فرض ها و حکم ها را تعیین کنید
- با قضایای قبلی مقایسه کنید
- جزییات را ببینید
- شکلی بکشید
- قضیه را روی مثال های ساده اجرا کنید
- روی مثال های بدیهی اجرا کنید
- آیا عکس مطلب نیز برقرار است؟
- با نمادها یا با کلمات بازنویسی کنید
- چه اتفاقی برای نامثال ها می افتد؟

فصل ۸

چگونه یک اثبات را بخوانیم؟

اثبات در قلب ریاضیات جای دارد؛ بدون آن، ریاضیات قدرت خود را از دست می دهد. در این فصل طرز برخورد با یک اثبات و نحوه شکستن آن به قسمت های قابل فهم و درک را توضیح می‌دهیم. در نوشتن یک اثبات، معمولاً نویسندگان سرنخ های مهم و نکات مفیدی را که نشان دهنده صحت نتایج هستند، کنار می گذارند و به آن ها اشاره نمی کنند. مراحل ساخت پاک می گردند، و متاسفانه[۱] این به عهده خواننده است که آن ها را بازسازی بکند. یک اثبات را به عنوان کلاف سر در گمی در نظر بگیرید که باید آن را باز کنید.

۱.۸ یک قضیه ساده و اثبات آن

قضیه بعدی باید قابل فهم باشد و بر تجربیات شما منطبق باشد. توجه داشته باشید که شباهت هایی با قضیه ۱ در فصل قبل دارد، اما در واقع با آن متفاوت است. اثبات پس از آن نیز یک مثال مقدماتی در این فصل است.

قضیه ۱. *فرض کنید m و n دو عدد طبیعی فرد هستند. حاصل ضرب mn فرد است اگر و فقط*

[۱] شاید هم خوشبختانه. م.

اگر m و n هر دو فرد باشند.

اثبات. فرض کنیم m و n فرد باشند. آنگاه، بنا به تعریف $m = ۲k + ۱$،و $n = ۲j + ۱$ به ازای برخی اعداد طبیعی k و j. در این صورت $mn = ۲(۲kj + j + k) + ۱$. چون $۲kj + j + k$ یک عدد طبیعی است، مثل r، داریم $mn = ۲r + ۱$. یعنی mn فرد است.
حال برای عکس، فرض کنیم یکی از m و n زوج باشند. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می کنیم $m = ۲k$ به ازای یک عدد طبیعی k. در این صورت داریم $mn = ۲kn$، یعنی mn بر دو بخش پذیر است و لذا زوج است. □

اگر هنوز اثبات را به طور کامل نفهمیده اید، نگران نباشید. با به کار بردن ایده های زیر و بازسازی جزییات حذف شده، اثبات واضح تر خواهد شد. بعلاوه اینکه در آن یک اشتباه رفع شدنی[۲] نیز وجود دارد. آیا می توانید آن را بیابید؟

۲.۸ نحوه خواندن یک اثبات

در هنگام مطالعه توصیه های زیر باید به این فکر کنید که چگونه آن ها روی قضیه بالا و اثبات آن اعمال می گردند.

مهارت های مطالعه را به کار ببرید

مهارت های مطالعه را که قبلاً ارائه شدند، به کار ببرید. یک نگاه اجمالی به کل اثبات بیندازید تا یک دید کلی نسبت به آن بیابید، نکات مهم را تشخیص دهید، سوالاتی را مطرح کنید و ادامه دهید. هدف این است که قسمت هایی از اثبات را بیابید که کلیت اثبات روی آن ها بنا شده است.

آن را به قسمت هایی بشکنید

اثبات را به قسمت هایی بشکنید که از لحاظ منطقی از یکدیگر مستقل باشند. اثبات ها از قسمت-

[۲] non-fatal error یعنی اشتباهی که قابل اصلاح است به نحوی که استدلال درست باقی بماند.

های کوچکتری تشکیل شده اند، به طور مثال محاسبات، بررسی ادعاهای دیگر، و از این قبیل.

در اثبات بالا یک نشانهٔ شروع بخشی مستقل، جمله ابتدایی پاراگراف دوم است که در آن آغاز استدلال قسمت عکس قضیه اعلام شده است.

راه دیگری برای دیدن این مطلب وجود دارد. صورت قضیه به فرم یک *اگر و فقط اگر* است، بنابراین به احتمال زیاد-که در این مثال ما همین طور است- اثبات به دو بخش تجزیه می شود: بخش اگر و بخش فقط اگر. لذا اثبات بالا به دو بخش تقسیم می شود:

۱ - "mn فرد است اگر m و n فرد باشند." (یا به طور معادل "mn فرد است $\Leftarrow$ m و n فرد ند ".)

۲ - "mn فرد است فقط اگر m و n فرد باشند." (یا به طور معادل "m و n فرد ند $\Leftarrow$ فرد است mn".)

روش به کار رفته در اثبات را تعیین کنید

ریاضیدانان چندین روش برای اثبات کردن در اختیار دارند: محاسبه، مستقیم، استقراء، عکس نقیض، برهان خلاف، مثال نقض، مباحث شمارشی و .... تعیین کنید کدام یک استفاده شده است-البته به طور معمول در یک اثبات برجسته، ترکیبی از روش های مذکور به کار برده می شود. با روش مستقیم ثابت کرده ایم که هرگاه m و n فرد باشند، آنگاه mn فرد است.

خوب، درباره قسمت عکس قضیه چطور؟ یعنی "اگر mn فرد باشد، آنگاه m و n فرد هستند." به طور حتم از روش مستقیم استفاده نکرده ایم: با فرض اینکه mn فرد است، استدلال شروع نشده است. در عوض فرض کرده ایم که یکی از m و n زوج باشد. این نقیض "m و n فرد هستند." است. لذا، روش عکس نقیض را به کار برده ایم، (یعنی برای اثبات "$p \Rightarrow q$" نشان دهیم "pنقیض $\Leftarrow$ qنقیض".) [3] توجه داشته باشید که نویسندگان به روشنی این مطلب را ذکر نمی کنند و این وظیفه خواننده است که خود متوجه این موضوع گردد.

در حالت کلی تر، توجه کنید که آیا از قضیه دیگری برای اثبات قضیه حاضر استفاده می شود یا اینکه صرفاً استفاده از تعاریف کار را تمام کرده است.

[3] به قولی شنونده باید خودش عاقل باشه! م.

محل نقش آفرینی[۴] هر یک از فرض ها را بیابید

مکان استفاده فرض ها را تعیین کنند. ممکن است چندین بار از آن ها استفاده شود، اما دست کم باید یک بار از آن ها استفاده شده باشد، در غیر این صورت آن فرض غیر ضروری است.

این مطلب در مورد یافتن جاییکه قضایای قبلی نیز استفاده شده اند، نیز صادق است. مطمئن شوید که فرض ها برآورده شده اند- فعال باشید! همچنین، اگر قضیه ای بارها و بارها در اثبات قضایای دیگر به کار رفت، آنگاه آن قضیه را به خوبی یاد بگیرید؛ زیرا آن قضیه مهمی است و قابلیت این را دارد که در اثبات قضایای دیگر و یا حل مسائل از آن استفاده شود.

در بالا، فرض اینکه m و n عدد طبیعی هستند چندین بار استفاده شده است. در پاراگراف اول، در قرار دادن $m = ۲k + ۱$ استفاده شده است و .... در بخش "فقط اگر" تشخیص نحوه استفاده از فرض سخت تر است، چون از نقیض آن استفاده کرده ایم تا بتوانیم عکس نقیض را به کار ببریم. کمی پنهان و پوشیده است، اما به هر حال از این طرز بیان استفاده می شود.

اثبات را روی یک مثال اعمال کنید

یک روش موثر برای آموختن یک اثبات این است که هر یک از مراحل آن را روی یک مثال خاص که شرایط فرض های قضیه را برآورده می کند، اعمال کنیم. ایده مشابه ایده ای که در مورد حل مسئله گفتیم، مثال های خاص یا عینی.

مثال بالا بسیار بدیهی است، اما هنوز در مورد آن نیز می توان این کار را انجام داد. فرض کنید $m = ۳$ و $n = ۷$. سپس اثبات را برای این دو عدد بازنویسی بکنید. البته برای بخش "فقط اگر" باید فرض کنید m زوج است، لذا فرض کنیم $m = ۶$. هیچ فرضی روی n نداریم، یعنی می تواند زوج یا فرد باشد، هر دو حالت را بررسی کنید. مجدداً این مطالب مربوط به فعال بودن است.

البته این روش همیشه قابل اجرا نیست و در همه موارد نیز روشنگر نیست.

---

[۴] شاید جالب باشد که بدانید واژه های theorem به معنای قضیه و theater به معنای تئاتر از یک ریشه مشترک به معنای تماشا کردن گرفته شده اند. همانطوریکه در تئاتر هر هنروری نقشی را ایفا می کند، هر فرض قضیه نیز باید دارای نقشی در اثبات آن باشد. م.

شکلی بکشید

خواندن اثبات مانند حل مسئله است. بنابراین برخی از تکنیک های مربوط به حل مسئله مانند رسم شکل را در اینجا نیز به کار ببرید.

متن اثبات را بررسی کنید

بار دیگر با بررسی متن اثبات می توانیم فعال باشیم. بررسی کنید که آیا به کارگیری قضایای قبلی مجاز بوده است. در مثالِ ما از هیچ قضیه قبلی استفاده نشده است، اما اگر در اثباتی به طور مثال گفته شد بنا به قضیه ۶.۳، مطمئن شوید که در واقع به کار گیری قضیه ۶.۳ در قضیه حاضر مجاز است و شرایط آن برقرارند. اگر در اثباتی گفته شد "یک محاسبه نشان می دهد که ..." آن محاسبه را خودتان انجام دهید.

در مثالِ ما ادعای اینکه $mn = ۲(۲kj + j + k) + ۱$ نتیجه بدیهی نیست و باید تمام جزییات آن روشن شود:

$$\begin{aligned} mn &= (۲k + ۱)(۲j + ۱) \\ &= ۴kj + ۲k + ۲j + ۱ \\ &= ۲(۲kj + j + k) + ۱. \end{aligned}$$

اگر گفته شد "بدون کاسته شدن از کلیت"، آنگاه عملی بودن این کار را بررسی کنید. در پاراگراف دوم مثال دیدیم که فرض شد بدون کاسته شدن از کلیت m زوج است. خوب، بیایید فرض کنیم m زوج نباشد، در این صورت باید n زوج باشد، چون بنا به فرض (حداقل) یکی از این دو باید زوج باشد. حال به سادگی با یک تغییر نامگذاری و تعویض نام m و n با یکدیگر مجدداً m زوج خواهد بود. در نتیجه هیچ کاسته شدنی از کلیت وجود ندارد.

به دنبال یافتن اشتباهات باشید

نویسندگان و اساتید انسان هستند (صادقانه می گویم!). آنان اشتباه می کنند، لذا به دنبال یافتن این اشتباهات باشید. در مورد هر چیزی نقاد باشید و واقعاً سعی کنید نشان دهید که آن ها غلط هستند.

به دنبال فرض های پنهان، استدلال های دوری و تسلسلی باشید و بررسی کنید که آیا قضایای به کار رفته واقعاً قابل به کارگیری بوده اند.

مثال های بدیهی مانند تابع ثابت صفر را در نظر بگیرید. در مثال بالا حالتیکه m برابر یک است را امتحان کنید، عدد یک اولین عدد فرد طبیعی است[۵] . حال $m = ۲k + ۱$ نتیجه می دهد $۲k + ۱ = ۱$، یعنی $k = ۰$. بله! بر خلاف ادعای قضیه، این یک عدد طبیعی نیست. بنابراین اثبات نادرست است! اگرچه، اشکال مذکور جدی نیست و قابل رفع است به این ترتیب که یا صفر را جزء اعداد طبیعی در نظر بگیریم یا اینکه در قضیه بگوییم k عضو مجموعه $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ است یا اینکه بگوییم k عدد صحیح است. به هر طریق که عمل کنیم، ادعای قضیه صحیح است، اثبات ارائه شده غلط است[۶]، البته کمی!

نحوه به خاطر سپاری یک قضیه

ساده ترین راه به خاطر سپاری یک قضیه فهمیدن آن است. یادگیری یک مطلب از طریق حفظ کردن و تکرار نمودن سخت ترین راه انجام این کار است- به دنبال فهمیدن باشید. اگرچه، برخی قسمت ها را باید حفظ کنید، به طور مثال به منظور بالا بردن سرعت نوشتن در آزمون ها.

اگر قضیه ای را فهمیده باشید، آنگاه می دانید که چگونه به قسمت های کوچک تر تقسیم می شود و ایده کلیدی هر قسمت چیست. آیا یک محاسبه است؟ آیا جایی است که فرض کلیدی قضیه استفاده می شود؟ آیا مرحله معرفی نمادها است؟ این نکات راحت تر به خاطر سپرده می شوند. با چه روشی اثبات صورت گرفته است؟ به روش مستقیم، استقراء، عکس نقیض، برهان خلف؟ یا متکی بر محاسبه است؟

تلاش کنید اثبات را در چند جمله خلاصه کنید، آنچه را که هر مرحله معنی می دهد، و نه می گوید، ثبت کنید. خوب، برای مثال بالا، ثبت کنید که"روش مستقیم، از $m = ۲k + ۱$ و

---

[۵] به نوعی یک مثال کرانی است. م.

[۶] آنچه که ناممکن است این است که برای ادعای غلط، اثباتی صحیح ارائه کنیم! در یک امتحان، دانشجویی برای یک حکم غلط، اثباتی ارائه نمود. استاد بدون نگاه کردن به اثبات او، اعلام کرد که اثباتش غلط است. دانشجو بی درنگ گفت استاد نگران نباشید یک اثبات دیگر هم دارم!! م.

$n = ۲j + ۱$ استفاده کنید، یک محاسبه نشان می دهد حاصل ضرب به فرم $mn = ۲r + ۱$ است. برعکس، از عکس نقیض استفاده کنید، با استفاده از بکشاک [۷] نتیجه می گیریم $mn = ۲(۲kj + j + k) + ۱$ زوج است."

توجه کنید که نگفتم "فرض کنیم زوج است ". این به خاطر این است که اگر ما از نقیض اینکه m و n فرد هستند، استفاده کنیم، خود به خود نتیجه می گیریم که یکی از m و n زوج است. در نقیض کردن گزاره ها باید مهارت پیدا کنید.

روی یک نامثال اجرا کنید

به طور دقیق معین کنید در تعمیم قضیه به یک نامثال چه قسمتی از قضیه از کار می افتد. این فعالیت می تواند یکی از ابزارهای بسیار موثر در یادگیری باشد.

به عنوان مثال، اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید. سعی کنید همان استدلال را برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۴}$ اعمال کنید- البته این یک ادعای غلط است، اما همین تلاش برای به کار بردن روند اثبات در این مورد نادرست، می تواند نشان دهد چرا و چگونه آن استدلال برای $\sqrt{۲}$ کار می کند.

بازتاب دهید

مانند همیشه، پس از پایان کار بازتاب دهید. آیا اثبات شبیه به اثبات های دیگر در این حوزه می باشد؟ برخی گونه های اثبات بارها و بارها ظاهر می شوند، دریافتن این امر، یاد گرفتن و به کار بردن آن ها را آسان تر می کند.

[۷] بدون کاسته شدن از کلیت، معادل فارسی wlog=without loss of generality است.

۳.۸ خلاصه

- مهارت های مطالعه را به کار ببرید
- آن را به قسمت هایی بشکنید
- روش به کار رفته در اثبات را تعیین کنید
- محل نقش آفرینی هر فرض را بیابید
- اثبات را روی یک مثال اعمال کنید
- شکلی بکشید
- متن اثبات را بررسی کنید
- به دنبال یافتن اشتباهات باشید
- نحوه به خاطر سپاری یک قضیه
- روی یک نامثال اجرا کنید
- بازتاب دهید

فصل ۹

چگونه منطقی فکر کنیم؟

در این فصل پایه های تفکر منطقی-یکی از مهم ترین ویژگی های یک ریاضیدان، را به اختصار بیان می کنم.

قصد ندارم خیلی دقیق باشم. واقعاً اگر می خواهید وارد منطق شوید، آنگاه باید درس مبانی ریاضی یا حتی درس پیشرفته تر منطق ریاضی را اخذ کنید. نمی خواهم روی مسائل بغرنج و تناقض-نماها[1] متمرکز شوم که یک ورود واقعی به منطق ریاضی با آن ها شروع می شود. همچنین بحث مفصلی روی مسائل تکنیکی مانند سورها، گزاره های مرکب، جداول ارزشی و از این قبیل انجام نخواهد شد. هدف هشدار دادن به شما در مورد تله های اصلی است.

گزاره

گزاره فقط یک جمله است که یا درست است یا نادرست. برای مثال، "**۳** یک عدد زوج است". مثال های دیگر از قبیل "همه گربه ها خاکستری هستند"، یا "تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد" یا درست یا نادرست هستند- هیچ حالت میانی وجود ندارد. این نکته اخیر در اصطلاح تخصصی به عنوان *قانون طرد شق سوم* مطرح است. یعنی، ایده اینکه چیزی بین درست و نادرست قرار بگیرد از حالت های ممکن کنار گذاشته شده است.

[1] paradoxes

برای روشن تر شدن مباحث و پرهیز از نگران کردن شما درباره ریاضیات، در حالت کلی از گزاره های غیر ریاضی استفاده خواهم کرد. در حقیقت، در نگاه اجمالی اولیه به منطق، به کار بردن گزاره هایی از زندگی روزمره مفید است.

برای مثال، بیایید با این حقیقت شروع کنیم که وینستون چرچیل (نخست وزیر انگلستان در بیشتر جنگ جهانی دوم) در شهر بلنهام انگلیس به دنیا آمده است. از این حقیقت به عنوان یک حقیقت اولیه در می یابیم که "چرچیل یک انگلیسی است".[۲]

برای نمایش گزاره ها می توانیم از حروف استفاده کنیم. بنابراین ما صحبت از "گزاره A" و مانند آن خواهیم نمود.

نقیض

نقیض گزاره A گزاره ای است که نادرست است هرگاه A درست باشد. برای مثال نقیض "چرچیل یک انگلیسی است" عبارت است از "چرچیل یک انگلیسی نیست".

نقیض "x فرد است" عبارت است از "x فرد نیست" که قابل بازنویسی به این صورت است "x زوج است".

اگر گزاره A را داشته باشیم، آنگاه نقیض آن را به صورت نهA می نویسیم. لذا "نه چنین است که x فرد است" در واقع مانند بالا همان "x فرد نیست" می باشد.

تمرین

گزاره های زیر را نقیض کنید.

۱- گربه من خاکستری است.

۲- گربه من یک سگ است.

۳- همه گربه ها خاکستری هستند.

۴- گربه ای وجود دارد که خاکستری است.

۵- هر گربه ای صاحبی دارد.

[۲] البته ممکن است شما بر این باور باشید که کشور محل تولد، ملیت را مشخص نمی کند.

۶- گربه ای وجود دارد که برای همه است.

A نتیجه می دهد B

یکی از مهم ترین اجزاء ساختاری گزاره های ریاضی، ساختار ساده "اگر چیزی درست باشد، آنگاه چیز دیگری درست خواهد بود" است. برای مثال، "اگر x زوج باشد، آنگاه x^2 زوج است".

به طور معمول "اگر A درست باشد، آنگاه B درست است" به این صورت خلاصه نویسی می شود "اگر A، آنگاه B" یا "A نتیجه می دهد B" و گاهی به این صورت نمایش داده می شود "$A \Rightarrow B$".

این گزاره درست را در نظر بگیرید "اگر من وینستون چرچیل باشم، آنگاه من انگلیسی هستم". در اینجا A عبارت است از "من وینستون چرچیل هستم" و B عبارت است از "من انگلیسی هستم". توجه داشته باشید که درستی هر یک از دو گزاره A و B اهمیتی ندارد. در واقع، من وینستون چرچیل نیستم، یعنی A نادرست است، ولی من یک انگلیسی هستم [۳]، یعنی B درست است. مطمئن هستم که دست کم یکی از این دو گزاره برای خواننده نیز نادرست خواهد بود. با وجود این "اگر من وینستون چرچیل باشم، آنگاه من انگلیسی هستم" درست است.

عکس

عکس گزاره "$A \Rightarrow B$" عبارت است از "$B \Rightarrow A$".

عکس "اگر من وینستون چرچیل باشم، آنگاه من انگلیسی هستم" عبارت است از "اگر من انگلیسی باشم، آنگاه من وینستون چرچیل هستم". این مثال ساده نشان می دهد که حتی اگر گزاره ای درست باشد، عکس آن لزومی ندارد درست باشد. می تواند درست باشد، اما تضمینی برای این امر نیست.

یک ریاضیدان خوب، وقتی با یک گزاره از نوع A نتیجه می دهد B برخورد می کند، از خود خواهد پرسید " آیا عکس آن نیز برقرار است؟" این سوال را بخشی از وجود خود کنید و آن را به جعبه ابزار خود برای مطالعه و انجام ریاضی بیفزایید.

---
[۳] در اینجا نویسنده اشاره به ملیت خود دارد. م.

تمرین

عکس گزاره های زیر را بنویسید.

۱ - اگر گربه من سیاه باشد، آنگاه این چنین نیست که همه گربه ها خاکستری هستند.

۲ - اگر x فرد باشد، آنگاه $x^۲$ فرد است.

۳ - اگر من فرانسوی باشم، آنگاه من ناپلئون هستم.

یک اشتباه رایج

حال به سراغ یک نکته ریز می رویم که مسبب مشکلات بسیاری برای ریاضیدان های تازه کار است. پس صاف بنشینید و تمام هوش و حواس خود را جمع کنید.

بیایید فرض کنیم گزاره "A نتیجه می دهد B" درست باشد. (برای مثال "اگر x زوج باشد، آنگاه $x^۲$ زوج است"). گزاره زیر را در نظر بگیرید:

"نه A نتیجه می دهد نه B را"

آیا این درست یا اینکه نادرست است؟ خوب، بیایید مثل یک ریاضیدان فکر کنیم و آن را روی یک مثال پیاده کنیم.

مثال بالا درباره x، گزاره درست می باشد. در این حالت، "نهA نتیجه می دهد نهB" عبارت است از "اگر x زوج نباشد، آنگاه $x^۲$ زوج نیست" یعنی "اگر x فرد باشد، آنگاه $x^۲$ فرد است". آیا این درست است؟ بله، درست است. آیا این به این معناست که اگر "A نتیجه می دهد B" درست باشد، آنگاه "نهA نتیجه می دهد نهB" نیز درست است؟ نه، چنین نیست! درست بودن یک ادعا برای یک مثال خاص، نتیجه نمی دهد که آن ادعا برای همه مثال ها درست است.

مثال وینستون چرچیل را امتحان کنید: "اگر من وینستون چرچیل باشم، آنگاه من انگلیسی هستم" گزاره نه ای آن می شود "اگر من وینستون چرچیل نباشم، آنگاه من انگلیسی نیستم" این به طور حتم نادرست است، زیرا من وینستون چرچیل نیستم ولی انگلیسی هستم.

بنابراین به عنوان یک جمع بندی:

درستی "A نتیجه می دهد B" نتیجه **نمی دهد** "نهA نتیجه می دهد نهB" درست است.

این اشتباه به طور شگفت انگیزی رایج است. نسبت به آن هوشیار باشید!

عکس نقیض

حال نکته ریز بعدی. مجدداً فرض کنیم که "A نتیجه می دهد B" درست است. آیا گزاره زیر

"نهB نتیجه می دهد نهA"

درست است یا نه؟ توجه داشته باشید که این گزاره با گزاره ای که در اشتباه رایج بالا گفتیم فرق دارد.

در واقع، این گزاره صحیح است و گزاره عکس *نقیض* نامیده می شود.

بنابراین، اگر گزاره (درست) "اگر من وینستون چرچیل باشم، آنگاه من انگلیسی هستم" را در نظر بگیریم، آنگاه نتیجه می گیریم که "اگر من انگلیسی نباشم، آنگاه وینستون چرچیل نیستم" نیز درست است. (می توان به سادگی مشاهده کرد که این گزاره درست است.)

تمرین

ثابت کنید اگر "A نتیجه می دهد B" درست باشد، آنگاه "نهB نتیجه می دهد نهA" نیز درست است. (اثبات این موضوع واقعاً کوتاه است، اما اگر برای اولین بار این کار را دارید انجام می دهید، ممکن است واقعاً گیج کننده باشد. به هر حال، امتحان کردن آن ارزش دارد.)

خلاصه

۱ - گزاره ها یا درست یا نادرست هستند، حالت میانه وجود ندارد.

۲ - *نقیض* گزاره A گزاره ای است که نادرست است هرگاه A درست باشد.

۳ - *عکس* گزاره "$A \Rightarrow B$" عبارت است از "$B \Rightarrow A$".

۴ - درستی "A نتیجه می دهد B" نتیجه **نمی دهد** "نهA نتیجه می دهد نهB" درست است.

۵ - عکس نقیض صحیح است: درستی "A نتیجه می دهد B" نتیجه **می دهد** "نهB نتیجه می دهد نهA" درست است.

فصل ۱۰

چگونه اثبات کنیم که ... ؟

در این فصل خلاصه ای از نحوه اثبات ادعاهای گوناگون را ارائه می دهیم. به منظور خلاصه گویی از ذکر مثال صرف نظر می شود.

چگونه ثابت کنیم گزاره ای گزاره دیگری را نتیجه می دهد؟

برای اثبات اینکه گزاره A گزاره B را نتیجه می دهد، می توانید از روش های متفاوتی استفاده کنید. واضح ترین آن ها روش مستقیم است، یعنی زنجیره ای از نتیجه گیری های مستقیم. روش دیگر به کار بردن عکس نقیض است: ثابت کنیم که نقیض گزاره B نقیض گزاره A را نتیجه می دهد. همچنین می توانید از برهان خلف استفاده کنید: فرض کنید گزاره B غلط است، سپس سعی کنید به یک گزاره مزخرف و نامعقول مانند "$۱=۰$" برسید. البته روش های دیگری نیز وجود دارد.

چگونه ثابت کنیم دو گزاره با هم معادل هستند؟

اگر بخواهیم ثابت کنیم که گزاره A معادل با گزاره B است، در این صورت مسئله را به دو بخش تجزیه کنید: به طور جداگانه ثابت کنید که

"گزاره A گزاره B را نتیجه می دهد" و "گزاره B گزاره A را نتیجه می دهد"

چگونه ثابت کنیم دو شیء یکسان هستند؟

از یک ساختار جمعی یا ضربی استفاده کنید تا نشان دهید که اختلاف آن ها بدیهی است. راهنمایی های زیر در مورد نشان دادن تساوی دو عدد یا دو مجموعه را ملاحظه کنید.

چگونه ثابت کنیم دو عدد برابر هستند؟

برای نشان دادن اینکه $a = b$:

۱. به طور جداگانه ثابت کنید $a \leq b$ و $a \geq b$.

۲. ثابت کنید $a - b = ۰$.

چگونه ثابت کنیم دو تابع برابر هستند؟

برای نشان دادن اینکه به ازای هر x $\quad f(x) = g(x)$:

۱. به طور جداگانه ثابت کنید به ازای هر x $\quad f(x) \geq g(x)$ و $f(x) \leq g(x)$.

۲. ثابت کنید به ازای هر x $\quad f(x) - g(x) = ۰$.

چگونه ثابت کنیم مجموعه ای مشمول در مجموعه ای دیگر است؟

برای اثبات $A \subseteq B$ به ازای دو مجموعه A و B:

۱. در سطح بیان مجموعه ای کار کنید و از دنباله ای از تساوی های مجموعه ای استفاده کنید.

۲. در سطح اعضاء کار کنید: ثابت کنید $x \in A \Rightarrow x \in B$. با این شروع کنید "فرض کنید $x \in A$" سپس از اینجا کار را پیش ببرید.

چگونه ثابت کنیم دو مجموعه برابر هستند؟

برای اثبات $A = B$ به ازای دو مجموعه A و B: مسئله را به دو بخش تجزیه کنید: ثابت کنید $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

چگونه ثابت کنیم یک چیزی وجود دارد؟

برای نشان دادن وجود یک شیء، مثلاً یک عدد خاص، تابع یا مجموعه ای با ویژگی معین:

۱. آن را به طور مستقیم بسازید.

۲. از برهان خلف استفاده کنید: فرض کنید چنین چیزی وجود نداشته باشد.

چگونه ثابت کنیم یک چیزی وجود ندارد؟

مانند قبلی، فرض کنید چنین چیزی وجود دارد و با برهان خلف اثبات کنید.

چگونه ثابت کنیم یک چیزی منحصر به فرد است؟

فرض کنید یکی دیگر و متمایز وجود دارد، سپس نشان دهید آن دو یکسان هستند و به یک تناقض برسید. برای این منظور از راهنمایی های بالا استفاده کنید تا نشان دهید اختلاف آن دو بدیهی است.

چگونه ثابت کنیم خاصیتی برای همه اعضای یک مجموعه برقرار است؟

ارائه توصیه کلی در این مورد دشوار است. سعی کنید مسئله تبدیل به بررسی چند حالت بکنید (همان روش تفکیک). اما هوشیار باشید که *تمام* حالت ها را در نظر بگیرید ؛ بررسی تنها یک حالت خاص کافی نیست. به خاطر بسپارید- یک مثال برای همه ثابت نمی کند.

چگونه ثابت کنیم مجموعه ای نامتناهی است؟

برای نشان دادن نامتناهی بودن یک مجموعه:

۱. یک تناظر یک به یک با یک مجموعه نامتناهی، مانند $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Q}$ برقرار سازید.

۲. فرض کنید مجموعه متناهی است. سپس از این نکته استفاده کنید که یک بزرگترین عضوی وجود دارد و سپس به دنبال یک تناقض باشید.

چگونه ثابت کنیم ادعایی که در آن یک اندیس وجود دارد، درست است؟

برای اثبات گزاره اندیس داری که مقادیر اندیس آن در اعداد طبیعی است از استقراء استفاده کنید.

فصل ۱۱

الفبای یونانی

اغلب حروف الفبای یونانی در ریاضیات به کار گرفته می شوند، بنابراین لیست آن ها را ارائه می دهیم. در راهنمای تلفظ آن ها حرف i مانند تلفظ آن در کلمه big و همچنین eye با تلفظش به معنای چشم باید تلفظ گردند.

Name	حرف بزرگ	حرف کوچک	تلفظ
Alpha	A	α	al-fa
Beta	B	β	bee-tah
Gamma	Γ	γ	gam-ah
Delta	Δ	δ	del-tah
Epsilon	E	ϵ یا ε	ep-sigh-lon/ep-sil-on
Zeta	Z	ζ	zee-tah
Eta	H	η	ee-tah
Theta	Θ	θ	thee-tah
Iota	I	ι	eye-oh-tah
Kappa	K	κ	cap-ah
Lambda	Λ	λ	lam-dah
Mu	M	μ	mew
Nu	N	ν	new
Xi	Ξ	ξ	ks-eye
Omicron	O	o	oh-mi-kron
Pi	Π	π	p-eye
Rho	P	ρ	r-oh
Sigma	Σ	σ	sig-ma
Tau	T	τ	taw
Upsilon	Υ	υ	up-sil-on یا up-sigh-lon
Phi	ϕ	Φ	f-eye
Chi	X	χ	k-eye
Psi	Ψ	ψ	ps-eye
Omega	Ω	ω	oh-meg-ah

فصل ۱۲

نمادهای رایج

پایه لگاریتم طبیعی	e
یکه موهومی، ریشه دوم ۱-	i
بی نهایت	∞
برای هر	$\forall$
وجود دارد	$\exists$
نشان دهنده پایان اثبات	$\square$
نابلا	∇
الف	$\aleph$
مجموعه تهی	$\emptyset$
مجموع	Σ
حاصل ضرب	Π
عضویت	$\in$
زیر مجموعه بودن	$\subseteq$
زیر مجموعه محض بودن	$\subset$
اشتراک	$\cap$
اجتماع	$\cup$
نتیجه می دهد	$\Rightarrow$
معادل است با	$\Leftrightarrow$
پریم	$'$
زِگوند	$''$

$\mapsto$	تصویر می کند به
$\twoheadrightarrow$	به طور پوشا تصویر می کند به
$\hookrightarrow$	به طور یک به یک تصویر می کند به
$\propto$	متناسب است با
$\equiv$	هم ارز است با/ همنهشت است با
$\approx$	تقریباً مساوی است با
$\perp$	عمود است بر (پِرپ خوانده می شود)
$\neg$	نفی
$\tilde{}$	تیلد (مَد)
$\hat{}$	هت (کلاه)
$\therefore$	بنابراین
$\because$	زیرا
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح، یعنی مجموعه $\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	مجموعه اعداد گویا، اعدادی به فرم $\frac{a}{b}$ که a و b عدد صحیح هستند و b ناصفر است.
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی. خوب باید صبور باشید و کمی بزرگ تر شوید تا تعریف آن را ببینید!
$\mathbb{C}$	مجموعه اعداد مختلط، اعدادی به فرم $a+bi$ که a و b عدد حقیقی و i یکه موهومی است.
$\|x\|$	قدر مطلق x
$\bar{x}$	مزدوج x